

Из предисловия к первому американскому изданию	6
Предисловие ко второму американскому изданию	8
Предисловие к третьему американскому изданию	9
Глава I. Балки на упругом основании	11
1. Балки неограниченной длины	11
2. Полубесконечные балки	20
3. Балки конечной длины на упругом основании	23
Глава II. Балки, подверженные одновременному действию осевых и поперечных нагрузок	30
4. Одновременное действие осевых сжимающих и поперечных нагрузок	30
5. Неразрезные сжатые стержни	38
6. Растянутый стержень с поперечной нагрузкой	41
7. Представление кривой изгиба тригонометрическим рядом	45
8. Прогиб брусьев с малой начальной кривизной	51
Глава III. Особые задачи при изгибе балок	54
9. Местные напряжения при изгибе балок	54
10. Касательные напряжения в балках переменного поперечного сечения	58
11. Полезная ширина тонких полок	60
12. Ограничения метода наложения	64
Глава IV. Тонкие пластинки и оболочки	69
13. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности	69
14. Изгиб длинной, равномерно нагруженной прямоугольной пластинки	71
15. Изгиб длинных прямоугольных пластинок, имеющих первоначальную малую цилиндрическую кривизну	76
16. Чистый изгиб в двух перпендикулярных направлениях	77
17. Температурные напряжения в пластинках	81
18. Изгиб круглых пластинок, нагруженных симметрично относительно центра	82
19. Изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки	85
20. Изгиб круглых пластинок переменной толщины	90
21. Изгиб круглой пластинки, нагруженной в центре	92
22. Изгиб круглой пластинки, нагруженной концентрически	94
23. Изгиб симметрично нагруженной круглой пластинки с круглым отверстием в центре	96

24. Изгиб прямоугольных пластинок	100
25. Тонкостенные сосуды, подверженные внутреннему давлению	103
26. Местные напряжения изгиба в тонкостенных сосудах	108
27. Температурные напряжения в цилиндрических оболочках	115
28. Кручение круглого кольца под действием моментов, равномерно распределенных по его оси	117
Глава V. Потеря устойчивости стержней, пластинок и оболочек	124
29. Продольный изгиб призматических стержней (простые случаи)	124
30. Продольный изгиб призматических стержней (более сложные случаи)	131
31. Энергетический метод определения критических сжимающих нагрузок	137
32. Продольный изгиб призматических стержней под действием равномерно распределенных осевых сил	141
33. Продольный изгиб стержней переменного поперечного сечения	143
34. Влияние поперечной силы на величину критической нагрузки	145
35. Продольный изгиб составных стержней	146
36. Неупругий продольный изгиб прямолинейных колонн	150
37. Устойчивость круглых колец и труб под действием внешнего давления	156
38. Устойчивость прямоугольных пластинок	162
39. Выщупывание балок, не имеющих боковых опор	167
Глава VI. Деформации, симметричные относительно оси	173
40. Толстостенный цилиндр	173
41. Напряжения, вызываемые горячей посадкой	177
42. Вращающийся диск постоянной толщины	180
43. Вращающийся диск переменной толщины	187
44. Температурные напряжения в длинном полом цилиндра	191
Глава VII. Кручение	196
45. Вали некругового поперечного сечения	196
46. Мембранная аналогия	198
47. Кручение прокатных профилей	204
48. Кручение тонкостенных трубчатых стержней	206
49. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля, в которых предотвращено искажение некоторых поперечных сечений	212
50. Совместный изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля	222
51. Крутильная форма потери устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля	227
52. Потеря устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля от одновременного действия изгиба и кручения	231
53. Продольные нормальные напряжения в скручиваемых стержнях	237
54. Цилиндрическая пружина с большим шагом витка	241
Глава VIII. Концентрация напряжений	248
55. Концентрация напряжений в растянутых или сжатых элементах	248
56. Напряжения в пластинке с круглым отверстием	249
57. Другие случаи концентрации напряжений в растянутых элементах	253
58. Концентрация напряжений при кручении	258
59. Круглые вали переменного диаметра	262
60. Концентрация напряжений при изгибе	268
61. Исследования концентрации напряжений с помощью моделей	273
62. Оптический метод измерения напряжений	276
63. Напряжения при касании шаров и цилиндров	281

Глава IX. Деформации за пределом упругости	287
64. Системы из идеально пластических материалов	287
65. Предельное сопротивление систем	294
66. Чистый изгиб балок, материал которых не следует закону Гука	304
67. Изгиб балок поперечной нагрузкой за пределом упругости	310
68. Остаточные напряжения, вызываемые неупругим изгибом	312
69. Кручение за пределом упругости	316
70. Пластические деформации толстостенных цилиндров под действием внутреннего давления	320
Глава X. Механические свойства материалов	326
71. Общие соображения	326
72. Испытания на растяжение хрупких материалов	328
73. Испытания на растяжение пластических материалов	332
74. Испытания образцов из монокристалла в упругой области	335
75. Пластическое растяжение образцов из монокристалла	338
76. Испытания на растяжение мягкой стали в упругой области	341
77. Предел текучести	346
78. Растяжение стали за пределом текучести	349
79. Типы разрушений при растяжении	358
80. Испытания на сжатие	362
81. Испытания материалов при сложном напряженном состоянии	365
82. Теории прочности	370
83. Испытания на удар	384
84. Усталость металлов	391
85. Усталость металлов при сложном напряженном состоянии	399
86. Факторы, влияющие на предел выносливости	403
87. Усталость и концентрация напряжений	408
88. Уменьшение влияния концентрации напряжений на усталость	415
89. Разрушение поверхности при усталости	422
90. Причины усталости	425
91. Механические свойства металлов при высоких температурах	431
92. Изгиб балок при высоких температурах	441
93. Релаксация напряжений	444
94. Ползучесть при сложном напряженном состоянии	447
95. Частные случаи двумерной ползучести	450
96. Рабочие напряжения	456
Обозначения	470
Именной указатель	472
Предметный указатель	476

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

Второй том сопротивления материалов написан главным образом для аспирантов, инженеров-исследователей и проектировщиков. Автор стремился написать книгу, которая содержала бы новейшие достижения практической важности в области сопротивления материалов и теории упругости. В большинстве случаев дан полный разбор задач, представляющих практический интерес. Только в сравнительно немногих случаях даны лишь окончательные результаты более сложных задач, решения которых нельзя получить, не выходя за пределы обычного для инженеров объема знаний по математике. При этом разобраны практические приложения результатов и в то же время даны ссылки на литературу, в которой можно найти полный вывод решения.

В первой главе рассмотрены более сложные задачи изгиба призматических стержней. Подробно разобраны важные задачи изгиба стержней, лежащих на упругом основании, и даны приложения теории по исследованию напряжений в рельсах и трубах. Также разобрано приложение тригонометрических рядов к исследованию задач изгиба и выведены важные приближенные формулы для случаев одновременного действия продольных и поперечных нагрузок.

Во второй главе подробно развита теория кривых брусьев. Приложение этой теории к проектированию машин иллюстрировано анализом напряжений в крюках, маховых колесах, звеньях цепей, поршневых колесах и кривых трубах.

Третья глава содержит теорию изгиба пластинок. В ней подробно рассмотрены случаи изгиба пластинок по цилиндрической поверхности и симметричный изгиб круглых пластинок; даны практические приложения. Приведены также некоторые данные относительно изгиба прямоугольных пластинок под действием равномерной нагрузки.

В четвертой главе разобраны задачи о распределении напряжений в элементах, имеющих форму тела вращения и нагруженных симметрично. Эти задачи особенно важны при проектировании сосудов, подверженных внутреннему давлению, и вращающихся машинных частей. Уделено внимание напряжениям растяжения и изгиба в тонкостенных сосудах, напряжениям в толстостенных цилиндрах, напряжениям сжатия элементов, а также динамическим напряжениям, возникающим в роторах и во вращающихся дисках под действием сил инерции, и напряжениям от неравномерного нагревания.

Пятая глава содержит теорию потери устойчивости сжатых стержней и тонких пластинок вследствие упругой неустойчивости. Эти задачи являются чрезвычайно важными во многих новейших сооружениях, где размеры поперечных сечений сведены к минимуму, благодаря применению более прочных материалов и желанию уменьшить вес. Во многих случаях разрушение инженерных сооружений объясняется упругой неустойчивостью, а не недостаточной прочностью самого материала.

В шестой главе рассмотрена неправильность в распределении напряжений, вызываемая резкими изменениями поперечных сечений вследствие наличия отверстий и вырезов, и рассмотрено практическое значение концентрации напряжений. Описан также оптический метод, который оказался весьма полезным при исследовании концентрации напряжений. Объяснена мембранная аналогия в задачах кручения и ее приложение к исследованию концентрации напряжений во входящих углах, а также в прокатных и трубчатых сечениях. Рассмотрены также валы переменного диаметра, и при объяснении местных напряжений у выкружек таких валов использована электрическая аналогия.

В последней главе рассмотрены механические свойства материалов. Здесь внимание направлено скорее на общие принципы, чем на описание стандартных методов испытаний материалов. Изложены результаты новейших исследований механических свойств монокристаллов и указано их практическое значение. Такие вопросы, как усталость металлов и их прочность при высокой температуре, представляют значительный практический интерес при проектировании современных машин. Эти вопросы трактуются главным образом со ссылками на новейшие достижения в этих областях.

В заключение рассмотрены различные теории прочности. Разработан важный вопрос о связи между этими теориями и методом

установления допускаемых напряжений при различных напряженных состояниях.

Уже было упомянуто, что книга написана отчасти для учебных целей, но она также может быть использована для более углубленного изучения. Автор, на основании своего опыта, разделил книгу на три таких курса: 1) курс, заключающий в себе главы I, III и V, предназначен главным образом для аспирантов, интересующихся инженерно-строительным делом; 2) курс, содержащий главы II, III, IV и VI, — для аспирантов, главный интерес которых представляет машиностроение; 3) курс, использующий главу VII как основу и сопровождаемый демонстрацией опытов в лаборатории по испытанию материалов. Автор полагает, что такой курс, в котором рассматриваются основные механические свойства материалов и устанавливается зависимость между этими свойствами и допускаемыми напряжениями, применимыми при различных условиях проектирования, имеет первостепенное практическое значение, и изучению такого курса должно быть уделено большое внимание в нашем инженерном образовании.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к новому изданию этого тома общий характер книги оставлен неизменным, были лишь приложены усилия к тому, чтобы сделать ее более полной и современной путем включения нового теоретического и экспериментального материала, отражающего новейшие достижения в области анализа напряжений, и экспериментального исследования механических свойств строительных материалов.

Наиболее важные изменения, внесенные во второе издание, сводятся к следующему:

1. Более полно рассмотрены задачи, относящиеся к изгибу, сжатию и кручению гибких и тонкостенных конструкций. Такого рода конструкции находят в настоящее время широкое применение в авиационных аппаратах, и было сочтено нужным включить в новое издание больше задач из этой области.

2. Добавлена глава о пластических деформациях, трактующая изгиб и кручение балок и валов за пределом упругости, а также пластическое течение материала в толстостенных цилиндрах, подверженных действию высоких внутренних давлений.

3. Внесено значительное количество нового материала экспериментального характера, относящегося к поведению строительных материалов при высоких температурах и к усталости металлов под действием знакопеременных напряжений, особенно в тех случаях, где усталость металлов сочетается с высокой концентрацией напряжений.

4. Сделаны важные дополнения в части книги, посвященной балкам на упругом основании; к главам по теории кривых брусков и теории пластинок и оболочек; и к главе о концентрации напряжений, в которую были включены некоторые позднейшие результаты оптических испытаний.

Со времени появления первого издания этой книги были опубликованы три книги более углубленного характера: «Теория упругости», «Теория устойчивости систем» и «Теория пластинок и оболочек». Ссылки на эти книги сделаны в различных местах этого тома, особенно в тех случаях, когда даются лишь конечные результаты без полного математического вывода.

Можно надеяться, что с упомянутыми выше добавлениями книга будет давать представление о современном состоянии учения о сопротивлении материалов и может быть полезна как для аспирантов, интересующихся строительной механикой, так и для практиков-инженеров, имеющих дело со сложными задачами исследования напряжений.

С. П. Тимошенко

Пало Альто, Калифорния
12 июня 1941 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ АМЕРИКАНСКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке нового издания этой книги было добавлено значительное количество материала. Включены ссылки на новейшую литературу, внесены новые задачи для самостоятельного решения и дополнительные иллюстрации. Большинство изменений внесено в главы о кручении, пластических деформациях и механических свойствах материалов.

Что касается кручения, то была рассмотрена задача о скручивании трубчатых стержней с несколькими контурами, а также продольный изгиб при кручении тонкостенных стержней открытого профиля. Каждый

из этих вопросов является важным при проектировании тонкостенных конструкций, которые являются составляющими частями самолетов. В главе о пластических деформациях рассмотрены основные принципы проектирования по предельному состоянию. Представлено несколько примеров применения метода к проектированию строительных конструкций.

Много дополнений было сделано в главе о механических свойствах материалов, и одна эта глава теперь содержит свыше 160 страниц. Цель такого расширения главы заключается в сосредоточении внимания на новейших достижениях в области экспериментального изучения свойств строительных материалов. Рассмотрены следующие вопросы: 1) влияние несовершенств на предел прочности хрупких материалов и «масштабный эффект»; 2) сравнение результатов испытаний образцов из монокристаллов и поликристаллов; 3) испытание материалов в условиях плоской и пространственной задачи и различные теории прочности; 4) сопротивление удару; 5) усталость металлов при различных напряженных состояниях и методы повышения сопротивления усталости частей машин; 6) сопротивление материалов при высоких температурах, явление ползучести и использование данных испытаний ползучести при проектировании. Для читателя, который желает расширить в дальнейшем свои познания в этих вопросах, будут полезны многочисленные ссылки на новейшую литературу. Наконец, в заключительном параграфе книги приводятся достаточно подробные сведения для надлежащего выбора рабочих напряжений.

Автор надеется, что с этими добавлениями книга будет более полной для изучения расширенных курсов по механике материалов, а также более полезной для инженеров-исследователей и конструкторов при проектировании машин и сооружений.

В заключение автор выражает благодарность профессору Станфордского университета Джемсу М. Гиру за его помощь и многочисленные советы при просмотре книги и при чтении корректур.

С. Тимошенко

Станфордский университет
10 февраля 1936 г.

ГЛАВА I

БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. Балки неограниченной длины

Рассмотрим призматическую балку, опирающуюся по всей своей длине на сплошное упругое основание таким образом, что, когда балка изгибается, интенсивность равномерно распределенной реакции в каждой точке пропорциональна прогибу в этой точке¹⁾. При таких условиях реакция, приходящаяся на единицу длины балки, может быть представлена выражением ky , в котором y есть прогиб, а k — постоянное число, обычно называемое коэффициентом основания²⁾. Этот коэффициент представляет собой реакцию на единицу длины балки при ее прогибе, равном единице. Простое предположение, что непрерывная реакция основания пропорциональна прогибу, дает удовлетворительные результаты во многих случаях практики. Например, в случае железнодорожного пути полученные при этом предположении решения хорошо согласуются с действительностью³⁾. При исследовании

¹⁾ Балка уложена на постель из материала, способного сопротивляться как силам, действующим вниз, так и силам, действующим вверх.

²⁾ По предложению Н. И. Фусса, k называется коэффициентом постели (прим. перев.).

³⁾ См. S. Timoshenko и V. P. Langer, Trans. A. S. M. E., т. 54, стр. 277, 1932. Теория изгиба балок на упругом основании разработана E. Winkler'ом, Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague, стр. 182, 1867. См. также H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahn — Oberbaues, Berlin, 1888. Дальнейшее развитие теории можно найти в следующих источниках: Hayashi, Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin, 1921 (русский перевод: Теория расчета балок на упругом основании, ГИИ, 1930. Прим. ред.); Wieghardt, Z. angew. Math. u. Mech., т. 2, 1922; K. V. Sanden and Schleicher, Beton u. Eisen, тетрадь 5, 1926; Rastepnak, Beton u. Eisen, тетради 9 и 10, 1926; W. Prager, Z. angew. Math. u. Mech., т. 7, стр. 354, 1927; M. A. Biot, J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-1, 1937; M. Hetényi, Beamson Elastic Foundation, Ann. Arbor, 1946. (На русск. яз. в 1930 г. вышла книга: А. Н. Крылов, О расчете балок на упругом основании. — Прим. ред.)

изогнутой оси балки мы пользуемся дифференциальным уравнением¹⁾

$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q, \quad (a)$$

где q означает интенсивность нагрузки, действующей на балку. Для ненагруженной части балки нагрузкой является лишь непрерывно распределенная реакция со стороны основания интенсивностью ky . Следовательно, $q = -ky$, и уравнение (a) получается в таком виде:

$$EJ_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky. \quad (1)$$

Используя обозначение

$$\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_z}} = \beta, \quad (2)$$

общее решение уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (b)$$

Это можно легко проверить подстановкой уравнения (b) в уравнение (1). В частных случаях постоянные интегрирования A , B , C и D должны быть определены из известных условий для некоторых точек.

В качестве примера рассмотрим случай одного сосредоточенного груза, действующего на бесконечно длинную балку (рис. 1, a), взяв начало координат в точке приложения силы. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть лишь часть балки справа от груза (рис. 1, b). Для применения к этому случаю общего решения уравнения (b) необходимо сначала найти произвольные постоянные.

Логично предположить, что в точках, бесконечно удаленных от силы P , прогиб и кривизна оси балки обращаются в нуль. Это условие может быть выполнено лишь в том случае, если постоянные A и B в уравнении (b) принять равными нулю. Следовательно, уравнение изогнутой оси для правой части балки получается в таком виде:

$$y = e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (c)$$

Остальные две постоянные интегрирования C и D найдутся из условий в начале координат при $x = 0$. В этой точке изогнутая ось балки

1)

должна иметь горизонтальную касательную, поэтому

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

или, подставляя значение y из уравнения (c), получаем

$$e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x + C \sin \beta x - D \cos \beta x)_{x=0} = 0,$$

откуда $C = D$.

Поэтому уравнение (c) получается в таком виде:

$$y = Ce^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x). \quad (d)$$

Последовательные производные этого уравнения будут:

$$\frac{dy}{dx} = -2\beta Ce^{-\beta x} \sin \beta x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\beta^2 Ce^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \quad (e)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4\beta^3 Ce^{-\beta x} \cos \beta x. \quad (f)$$

Постоянная C теперь может быть определена из условия, что при $x = 0$ поперечная сила для правой части балки (рис. 1, b) равна $-P/2$. Знак минус вытекает из принятого нами условия относительно знаков для поперечных сил (см. т. I, стр. 71). Тогда

$$(Q)_{x=0} = \left(\frac{dM}{dx}\right)_{x=0} = -EJ_z \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=0} = -\frac{P}{2},$$

или, пользуясь уравнением (f), получаем

$$EJ_z 4\beta^3 C = \frac{P}{2},$$

откуда

$$C = \frac{P}{8\beta^3 EJ_z}.$$

Подставляя это значение C в уравнения (d) и (e), получаем следующие уравнения для прогиба и изгибающего момента:

$$y = \frac{P}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad (3)$$

$$M = -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x). \quad (4)$$

График каждого из выражений (3) и (4) представляет собой волнообразную кривую с постепенно уменьшающейся амплитудой. Длина a этих волн определяется периодом функций $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$, т. е.

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4EJ_z}{k}}. \quad (5)$$

¹⁾ См. С. Тимошенко, Сопротивление материалов, т. I, уравнение (80), стр. 125.

Чтобы упростить вычисление прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил, приведена таблица (табл. 1), в которой приняты следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \\ \psi &= -e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x), \\ \theta &= e^{-\beta x} \cos \beta x, \quad \zeta = e^{-\beta x} \sin \beta x. \end{aligned} \right\} (6)$$

На рис. 2 показаны графики функций φ и ψ . Пользуясь обозначениями (6) и уравнениями (d) — (f), получим:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \zeta(\beta x), \\ M &= -EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x), \\ Q &= -EJ_z \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2} \theta(\beta x). \end{aligned} \right\} (7)$$

По этим уравнениям и табл. 1 можно вычислить прогиб, угол наклона касательной, изгибающий момент и поперечную силу для любого

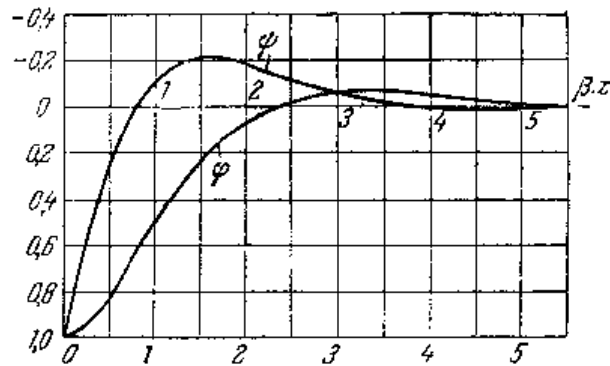


Рис. 2.

поперечного сечения балки. Наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент имеют место в начале координат и соответственно равняются

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{P\beta}{2k}, \quad (8)$$

$$M_0 = (M)_{x=0} = \frac{P}{4\beta}. \quad (9)$$

Пользуясь решением (3) для одиночного груза и принципом сложения действия сил, можно легко получить прогиб, вызываемый в бесконечно длинной балке на упругом основании любым другим видом нагрузки.

Таблица 1

Значения функций φ, ψ, θ и ζ

βx	φ	ψ	θ	ζ	βx	φ	ψ	θ	ζ
0	1,0000	1,0000	1,0000	0	3,6	-0,0866	0,0124	-0,0245	-0,0121
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903	3,7	-0,0841	-0,0079	-0,0210	0,0181
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627	3,8	-0,0814	-0,0040	-0,0177	-0,0137
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189	3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	0,0140
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610	4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	0,0139
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908	4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099	4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	0,0131
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199	4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0125
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223	4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	0,0117
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185	4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0108
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096	4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	0,0100
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967	4,7	-0,0092	0,0090	0,0001	-0,0091
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807	4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	0,0082
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626	4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430	5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226	5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0057
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018	5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812	5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042

Таблица 1 (продолжение)

βx	φ	ψ	θ	ζ	βx	φ	ψ	θ	ζ	βx	φ	ψ	θ	ζ	βx	φ	ψ	θ	ζ		
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610	5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035	6,0	0,0017	0,0031	0,0027	-0,0014	7,0	0,0013	0,0002	0,0006	0,0001	0,0006	
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415	5,5	-0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029	6,1	0,0018	0,0026	0,0026	-0,0010	7,1	0,0015	0,0004	0,0006	0,0003	0,0004	
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1230	5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023	6,2	0,0019	0,0036	0,0027	-0,0007	7,2	0,0017	0,0005	0,0006	0,0003	0,0005	
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057	5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018	6,3	0,0018	0,0031	0,0024	-0,0007	7,3	0,0016	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0895	5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0013	6,4	0,0018	0,0031	0,0024	-0,0007	7,4	0,0015	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748	5,9	0,0015	0,0036	0,0026	-0,0010	6,5	0,0018	0,0031	0,0024	-0,0007	7,5	0,0013	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613	6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007	6,6	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007	7,6	0,0011	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0492	6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004	6,7	0,0016	0,0031	0,0024	-0,0007	7,7	0,0010	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383	6,2	0,0019	0,0022	0,0019	-0,0002	6,8	0,0015	0,0031	0,0024	-0,0007	7,8	0,0008	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287	6,3	0,0019	0,0018	0,0018	0,0002	6,9	0,0014	0,0031	0,0024	-0,0007	7,9	0,0007	0,0006	0,0006	0,0003	0,0005	
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204	6,4	0,0018	0,0015	0,0018	0,0002	7,0	0,0013	0,0031	0,0024	-0,0007							
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132	6,5	0,0018	0,0012	0,0018	0,0002												
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0070	6,6	0,0017	0,0009	0,0017	0,0002												
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019	6,7	0,0016	0,0006	0,0016	0,0002												
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	0,0024	6,8	0,0015	0,0004	0,0015	0,0002												
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	0,0058	6,9	0,0014	0,0002	0,0014	0,0002												
3,4	-0,0408	0,0237	0,0323	0,0085	7,0	0,0013	0,0001	0,0013	0,0002												
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106																	

Для примера рассмотрим случай равномерной нагрузки, определенной по длине l бесконечно длинной балки (рис. 3). Возьмем какую-либо точку A , и пусть c и b представляют расстояния от этой точки до конца нагруженного участка балки. Прогиб в точке A , вызываемый элементарной нагрузкой $q dx$, получится из уравнения (3) путем подстановки в него $q dx$ вместо P , что даст

$$\frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x).$$

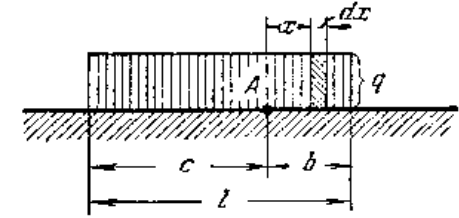


Рис. 3.

Следовательно, прогиб в точке A , вызываемый нагрузкой, распределенной по всей длине l , будет

$$y = \int_0^b \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \int_0^c \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \\ = \frac{q}{2k} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c). \quad (g)$$

Если c и b велики, то значения $e^{-\beta b}$ и $e^{-\beta c}$ будут малыми, и прогиб (уравнение g) будет приблизительно равен q/k , т. е. в точках, удаленных от конца нагруженного участка балки, изгибом балки можно пренебречь и можно предположить, что равномерная нагрузка q непосредственно передается упругому основанию. Взяв точку A в конце нагруженного участка балки, мы будем иметь $c=0$, $b=l$; $e^{-\beta c} \cos \beta c = 1$. Предполагая, что l велико, мы имеем также $e^{-\beta b} \cos \beta b \approx 0$. Тогда $y = q/2k$, т. е. в этом случае прогиб составляет лишь половину полученного выше значения.

Подобным же образом при помощи уравнения (4) можно вывести выражение для изгибающего момента в точке A .

Если точка A взята вне нагруженного участка балки и если величины b и c представляют соответственно большее и меньшее расстояние от этой точки до концов нагруженного участка балки, то прогиб в точке A будет равняться

$$y = \int_0^b \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) - \int_0^c \frac{q dx}{8\beta^3 EJ_z} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) = \\ = \frac{q}{2k} (e^{-\beta c} \cos \beta c - e^{-\beta b} \cos \beta b). \quad (h)$$

Когда $c=0$, а $b=l$ является большой величиной, мы получаем для прогиба значение $q/2k$, что совпадает с нашим предыдущим заключением. Когда расстояния b и c увеличиваются, то прогиб, согласно уравнению (h), уменьшается, приближаясь к нулю, если b и c весьма велики.

Случай пары сил, действующей на бесконечно длинную балку (рис. 4, а) может быть также разобрать при помощи решения (3) для одиночного груза. Действие момента пары эквивалентно действию двух сил P , показанных на рис. 4, б, если Pe приближается к M_0 , в то время как e стремится к нулю. Пользуясь

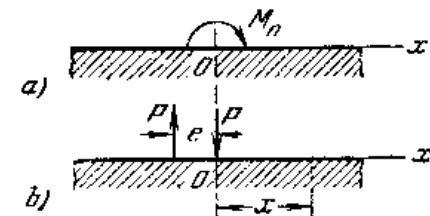


Рис. 4.

первым из уравнений (7), находим прогиб в расстоянии x от начала координат:

$$y = \frac{P\beta}{2k} \{ \varphi(\beta x) - \psi[\beta(x + e)] \} = \frac{M_0 \beta}{2k} \frac{\varphi(\beta x) - \psi[\beta(x + e)]}{e} = - \frac{M_0 \beta}{2k} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Из уравнений (7) имеем

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\beta\zeta(\beta x),$$

и уравнение кривой прогибов от действия пары M_0 получается в виде

$$y = \frac{M_0 \beta^2}{k} \zeta(\beta x). \quad (10)$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{M_0 \beta^3}{k} \psi(\beta x), \\ M &= -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_0}{2} \eta(\beta x), \\ Q &= -EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{M_0 \beta}{2} \varphi(\beta x). \end{aligned} \quad (10')$$

Пользуясь этими уравнениями и таблицей 1, мы можем легко вычислить прогиб, угол наклона касательной, изгибающий момент и поперечную силу для любого поперечного сечения балки.

Рассмотрим теперь случай нескольких грузов, действующих на бесконечно длинную балку. В качестве примера разберем изгиб рельса, вызываемый давлением колес паровоза. Издаваемый здесь метод определения напряжений в рельсах основан на допущении, что под рельсом имеется жесткое упругое основание. Это допущение дает довольно хорошие приближения¹⁾, так как расстояние между шпалами мало по сравнению с длиной волны a изогнутой оси, определяемой по уравнению (5). Чтобы получить значение k коэффициента основания, нужно нагрузку, необходимую для того, чтобы вызвать осадку шпала, равную единице, разделить на расстояние между шпалами. Предполагается, что шпала симметрично нагружена двумя грузами, соответствующими давлениям рельсов. Допустим, например, что шпала получила осадку в 0,75 см под каждым из двух грузов по 4000 кг и что расстояние между шпалами равно 55 см; тогда

$$k = \frac{4000}{0,75 \times 55} = 97 \text{ кг/см}^2.$$

В случае расположения на рельсе одного колеса, вызывающего давление P , для определения наибольшего прогиба и наибольшего изгибающего момента пользуемся уравнениями (8) и (9). Наибольшее напряжение в рельсе от изгиба будет

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{P}{4\beta W} = \frac{P}{4W} \sqrt{\frac{4EJ_z}{k}}, \quad (i)$$

где W — момент сопротивления рельса²⁾.

¹⁾ См. статью автора «Прочность рельсов», Вестник Института инженеров путей сообщения (Петербург), 1915 г. и статью автора в Proc. 2-d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, 1926. См. также сноску на стр. 11.

²⁾ При написании выражения (i) предполагалось, что элементарная формула при изгибе балки может быть применена к поперечному сечению, где приложен груз P . Более детальные исследования показывают, что вследствие местных напряжений следует ожидать значительного отклонения от элементарной формулы (i).

Для возможности сравнивать напряжения в рельсах, поперечные сечения которых геометрически подобны, уравнение (i) представим в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \frac{F \sqrt[4]{J_z}}{4W} \sqrt[4]{\frac{4E}{k}}, \quad (j)$$

где F — площадь поперечного сечения рельса. Так как второй множитель правой части уравнения (j) остается постоянным для геометрически подобных поперечных сечений и так как третий множитель не зависит от размеров рельса, то наибольшее напряжение обратно пропорционально площади поперечного сечения, т. е. обратно пропорционально весу рельса, приходящемуся на единицу его длины.

Приближенное значение наибольшего давления R_{\max} на шпалу получится путем умножения наибольшей осадки на расстояние между шпалами и на коэффициент основания. Таким образом, пользуясь уравнением (8), получаем

$$R_{\max} = \frac{P\beta}{2k} l k = \frac{P\beta l}{2} = \frac{P}{2} \sqrt[4]{\frac{k l^3}{4EJ_z}}. \quad (k)$$

Отсюда видно, что давление на шпалу зависит главным образом от расстояния l между шпалами. Надо также заметить, что величина k в обоих выражениях (j) и (k) находится под корнем четвертой степени. Поэтому ошибка в определении величины k повлечет за собой значительно меньшую ошибку в величинах σ_{\max} и R_{\max} .

Когда на рельс действует несколько грузов, следует пользоваться принципом сложения действия сил. Для иллюстрации метода расчета разберем численный пример. Возьмем рельс, момент инерции сечения которого $J_z = 1830 \text{ см}^4$, а расстояние между шпалами такое, что $k = 100 \text{ кг/см}^2$; тогда по формуле (2) находим

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ_z}} = \sqrt[4]{\frac{100}{4 \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot 1830}} = \frac{1}{110} \text{ см}^{-1},$$

а по формуле (5)

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 690 \text{ см}.$$

Возьмем для примера систему четырех колес равных давлений, находящихся на расстоянии 165 см одно от другого. Если мы примем начало координат в точке контакта первого колеса, то значения βx для других колес будут те, которые даны в табл. 2. Там же приведены соответствующие значения функций φ и ψ , взятые из табл. 1.

Таблица 2

Грузы	1	2	3	4
βx	0	1,5	3,0	4,5
ψ	1	-0,207	-0,056	0,008
φ	1	0,238	-0,042	-0,013

Складывая влияния всех четырех грузов, находящихся на рельсе, изгибающий момент под первым колесом определяем по уравнению (4):

$$M_1 = \frac{P}{4\beta} (1 - 0,207 - 0,056 + 0,008) = 0,745 \frac{P}{4\beta},$$

т. е. изгибающий момент в этом случае на 25,5% меньше, чем в случае одного груза. Поступая таким же образом, для точки контакта второго колеса получаем

$$M_2 = \frac{P}{4\beta} (1 - 2 \cdot 0,207 - 0,056) = 0,530 \frac{P}{4\beta}.$$

Видно, что благодаря действию смежных колес изгибающий момент под вторым колесом гораздо меньше, чем под первым. Это обстоятельство подтверждается многочисленными опытными данными, полученными при измерении напряжений в железнодорожных рельсах.

Пользуясь уравнением (3) и значениями, приведенными в последней строчке таблицы 2, находим следующий прогиб под первым колесом:

$$f_1 = \frac{P\beta}{2k} (1 + 0,238 - 0,042 - 0,013) = 1,183 \frac{P\beta}{2k}.$$

Подобным образом определяются прогибы и в других точках. Отсюда следует, что метод наложения может быть легко применен к исследованию изгиба рельса, вызываемого любой системой грузов, как угодно расположенных.

Выполненный расчет основан на предположении, что опоры рельса могут развивать отрицательные реакции. Так как обычно между рельсом и костылями имеется зазор, то при перемещении рельса вверх возникает небольшое сопротивление, что приводит к увеличению изгибающего момента в рельсе под первым и последним колесами. Тем не менее, в общем, изложенная теория изгиба рельса, вызываемого статической нагрузкой, вполне удовлетворительно согласуется с результатами проведенных опытов.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь данными таблицы 2, построить эпюру изгибающих моментов для рельса, полагая, что давления колес равны 16 т. Такая эпюра должна показать, что в сечениях посередине между колесами моменты отрицательны; это указывает на то, что при движении паровоза рельс подвергается действию знакопеременных напряжений от изгиба, которое в конечном результате может вызвать трещины усталости.

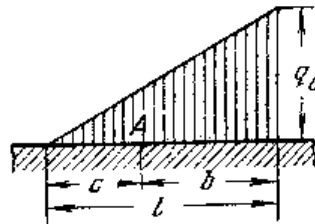


Рис. 5.

2. Найти изгибающий момент посередине нагруженного участка балки, показанной на рис. 3, и угол наклона изогнутой оси на левом конце этого участка.

3. Найти прогиб в произвольной точке A на участке треугольной нагрузки, приложенной к бесконечно длинной балке на упругом основании (рис. 5).

Ответ. Поступая так же, как при выводе уравнения (g), стр. 17, мы получаем

$$y = \frac{q_0}{4\beta k} \frac{1}{l} [\psi(\beta c) - \psi(\beta b) - 2\beta l(\beta b) + 4\beta c].$$

2. Полубесконечные балки

Если длинная балка на упругом основании изгибается силой P и моментом M_0 , приложенными на конце балки, как показано на рис. 6, мы опять можем использовать общее решение (b) предыдущего параграфа. Так как прогиб и изгибающий момент приближаются к нулю, если расстояние x от нагруженного конца увеличивается, мы должны в решении положить

$A = B = 0$; получим

$$y = e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x). \quad (a)$$

Для определения постоянных интегрирования C и D имеем условия в начале координат, т. е. под грузом P :

$$EJ_z \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = -M_0, \quad EJ_z \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -Q = P.$$

Подставляя в эти уравнения значение y из уравнения (a), получаем два линейных уравнения относительно C и D , из которых находим

$$C = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (P - \beta M_0); \quad D = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z}.$$

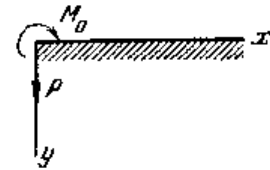


Рис. 6.

Подставляя эти значения в уравнение (a), получаем

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 EJ_z} [P \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \quad (11)$$

или, пользуясь обозначениями (6),

$$y = \frac{2\beta}{k} \{ P\theta(\beta x) - \beta M_0 [\theta(\beta x) - \zeta(\beta x)] \}.$$

Чтобы найти прогиб под грузом, мы должны в уравнение (11) подставить $x=0$. Тогда

$$f = (y)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (P - \beta M_0). \quad (11')$$

Выражение для угла наклона касательной получится путем дифференцирования уравнения (11). Для конца, т. е. при $x=0$, это будет

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (P - 2\beta M_0). \quad (12)$$

При помощи уравнений (11') и (12) на основе принципа наложения можно решать и более сложные задачи. Возьмем, например, равномерно нагруженную бесконечно длинную балку на упругом основании, имеющую свободно опертый конец (рис. 7, a). Реакция R на конце найдется из того условия, что прогиб на опоре равен нулю. Замечая, что на большом расстоянии от опоры изгиб балки является незначительным и что ее осадка может быть принята равной q/k , мы можем вычислить значение R путем подстановки в уравнение (11') $M_0=0$ и $f=q/k$. В результате найдем

$$R = 2\beta^2 EJ_z \frac{q}{k} = \frac{q}{2\beta}. \quad (13)$$

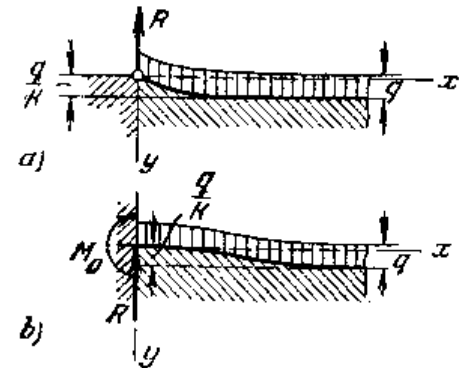


Рис. 7.

Уравнение изогнутой оси в этом случае получается путем вычитания прогибов, определяемых из уравнения (11) для $P=R$, $M_0=0$, из равномерной осадки q/k балки, что дает

$$y = \frac{q}{k} - \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 EJ_z} R \cos \beta x = \frac{q}{k} (1 - e^{-\beta x} \cos \beta x). \quad (14)$$

В случае балки с заделанным концом (рис. 7, б) величины реакции R и момента M_0 получаются из условий, что на опоре прогиб и угол наклона касательной равны нулю. Замечая, что на большом расстоянии от опоры прогиб равен q/k и пользуясь уравнениями (11') и (12), мы получаем следующие уравнения¹⁾ для вычисления R и M_0 :

$$-\frac{q}{k} = -\frac{1}{2\beta^3 EJ_z} (R + \beta M_0)$$

$$0 = \frac{1}{2\beta^2 EJ_z} (R + 2\beta M_0),$$

$$M_0 = -2\beta^2 EJ_z \frac{q}{k}, \quad R = 4\beta^3 EJ_z \frac{q}{k} = \frac{q}{\beta}. \quad (15)$$

Минус в выражении для M_0 указывает на то, что момент имеет направление, обратное показанному стрелкой слева на рис. 7, б.

ЗАДАЧИ

1. Получить уравнение изогнутой оси полубесконечной балки на упругом основании, шарнирно закрепленной на конце, при действии момента M_0 (рис. 8).

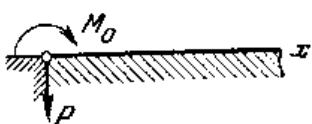


Рис. 8.

Решение. Реакция в шарнире получается из уравнения (11') путем подстановки $f=0$, что дает $P=3M_0$. Подставляя это значение P в уравнение (11), получаем

$$y = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z} e^{-\beta x} \sin \beta x = \frac{M_0}{2\beta^2 EJ_z} \zeta(\beta x). \quad (16)$$

Последовательным дифференцированием находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2\beta^2 M_0}{k} \psi(\beta x), \\ M &= -EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M_0 \theta(\beta x), \\ Q &= -EJ_z \frac{d^3 y}{dx^3} = -\beta M_0 \varphi(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

2. Найти изгибающий момент M_0 и силу P , действующие на конец волубесконечной балки на упругом основании (рис. 9), если прогиб f и угол α наклона касательной на этом конце даны.

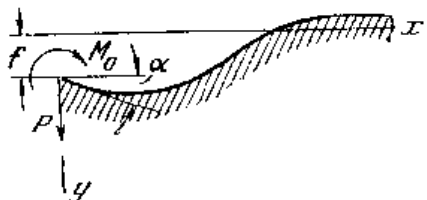


Рис. 9.

Решение. Значение M_0 и P получаются из уравнений (11') и (12) путем подстановки заданных величин f и $(dy/dx)_{x=0} = \alpha$.

3. Вывести уравнение изогнутой оси полубесконечной балки на упругом основании, если на балку действует груз P , приложенный на расстоянии c от ее свободного конца A (рис. 10).

¹⁾ В уравнениях (11') и (12) подставлено $P = -R$, так как положительное направление для реакции принято вверх.

Решение. Предположим, что балка продолжена влево от конца A , как показано штрихами. В таком случае уравнение (3) дает изогнутую ось для $x > 0$, и в поперечном сечении A фиктивной бесконечной балки мы имеем из уравнений (7) и используя условия симметрии:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\beta} \psi(\beta c), \\ Q &= \frac{P}{2} \theta(\beta c). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

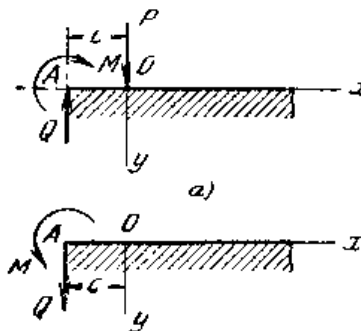


Рис. 10.

Чтобы получить требуемое уравнение изогнутой оси полубесконечной балки, свободной на конце A , мы, очевидно, должны наложить прогиб полубесконечной балки, вызываемый силами, показанными на рис. 10, б, на прогиб фиктивной бесконечной балки. При помощи уравнений (8), (11) и (с) таким путем получаем для $x > 0$

$$y = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) + \frac{2\beta}{k} \{ Q_0 [\beta(x+c)] + \beta M_0 [\beta(x+c)] - \beta M_0 [\beta(x+c)] \} = \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x) + \frac{\beta P}{k} \left\{ \theta(\beta c) \theta[\beta(x+c)] + \frac{1}{2} \psi(\beta c) \theta[\beta(x+c)] - \frac{1}{2} \psi(\beta c) \zeta[\beta(x+c)] \right\}. \quad (d)$$

Это выражение может быть также использовано при $-c < x < 0$; в этом случае мы должны x подставлять в $\varphi(\beta x)$ в ее абсолютном значении.

3. Балки конечной длины на упругом основании

Изгиб балки конечной длины на упругом основании может быть также исследован при помощи решения (3) для бесконечно длинной балки с использованием и принципа наложения¹⁾. Чтобы иллюстрировать метод решения, рассмотрим случай балки конечной длины со свободными концами, которая нагружена двумя симметрично приложенными силами P (рис. 11, а). В подобных условиях находится виала под действием давлений от рельсов. К каждому из трех участков балки может быть приложено общее решение (b) п. 1, а постоянные интегрирования могут быть найдены из условия на концах и в точках приложения грузов.

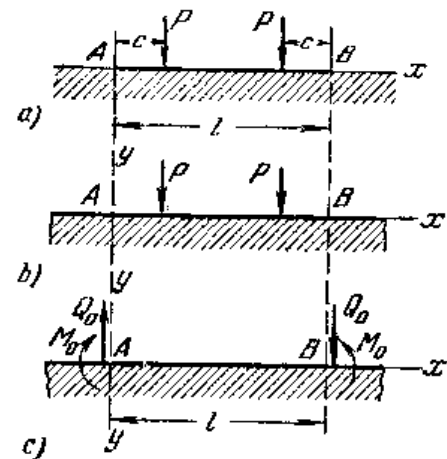


Рис. 11.

Однако требуемое решение может быть получено значительно легче путем наложения решений для двух родов нагружения бесконечно длинной балки, показанных на рис. 11, б и 11, с. На рис. 11, б две силы P действуют на бесконечно длинную балку. На рис. 11, с бесконечно длинная балка нагружена внешними силами Q_0 и моментами M_0 непосредственно в точках A и B , которые соответствуют свободным концам

¹⁾ Этот метод расчета был разработан М. Нетэнуй, Final Report 2. Congr. Internat. Assoc. Bridge and Struct. Eng. Berlin, 1938. См. также его «Beams on Elastic Found», стр. 38.

данной балки (рис. 11, а). Легко видеть, что при надлежащем выборе сил Q_0 и моментов M_0 , изгибающий момент и поперечная сила, вызываемые силами P в поперечных сечениях A и B бесконечной балки, показанной на рис. 11, б, могут стать равными нулю. Тогда средний участок бесконечной балки будет находиться в тех же условиях, что и конечная балка, представленная на рис. 11, а, и все необходимые величины, относящиеся к изгибу последней балки, будут получены путем наложения решений, найденных по рис. 11, б и 11, с.

Чтобы вывести уравнения для определения надлежащих значений M_0 и Q_0 , рассмотрим сечение A бесконечно длинной балки. Принимая начало координат в этой точке и пользуясь уравнением (7), найдем, что изгибающий момент M' и поперечная сила Q' , вызываемые в этой точке двумя силами P (рис. 11, б), будут

$$M' = \frac{P}{4\beta} \{ \psi[\beta(t-c)] + \psi(\beta c) \}, \quad Q' = \frac{P}{2} \{ \theta[\beta(t-c)] + \theta(\beta c) \}. \quad (a)$$

Момент M'' и поперечная сила Q'' , вызванные в той же точке силами, показанными на рис. 11, с, получаются при помощи уравнений (7) совместно с уравнениями (10'), что даст

$$\left. \begin{aligned} M'' &= \frac{Q_0}{4\beta} [1 + \psi(\beta l)] + \frac{M_0}{2} [1 + \theta(\beta l)], \\ Q'' &= -\frac{Q_0}{2} [1 - \theta(\beta l)] - \frac{M_0 \beta}{2} [1 - \varphi(\beta l)]. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Надлежащие значения M_0 и Q_0 теперь получатся из уравнений

$$M' + M'' = 0, \quad Q' + Q'' = 0, \quad (c)$$

которые могут быть решены в каждом частном случае при помощи таблицы 1. После того как M_0 и Q_0 будут найдены, прогиб и изгибающий момент в любом поперечном сечении действительной балки (рис. 11, а) могут быть получены при помощи уравнений (7), (10) и (10') методом наложения.

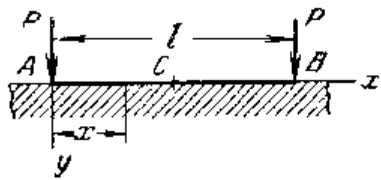


Рис. 12.

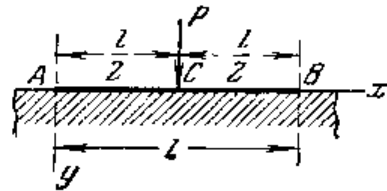


Рис. 13.

Частный случай, показанный на рис. 12, решается на основе этих же соображений, если принять $c=0$. Поступая, как объяснено выше, получаем для прогибов на концах и посередине следующие выражения:

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (d)$$

$$y_c = \frac{4P\beta}{k} \frac{\text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (e)$$

Изгибающий момент посередине равен

$$M_c = -\frac{2P}{\beta} \frac{\text{sh } \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (f)$$

Случай одного груза посередине (рис. 13) может быть также получен из предыдущего, показанного на рис. 11, а. Необходимо лишь принять $c=l/2$ и подставить P вместо $2P$. Таким путем мы получим для прогибов посередине и на концах следующие выражения:

$$y_a = y_b = \frac{2P\beta}{k} \frac{\text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}, \quad (g)$$

$$y_c = \frac{P\beta}{2k} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (h)$$

Для изгибающего момента под грузом находим

$$M_c = \frac{P}{4\beta} \frac{\text{ch } \beta l - \cos \beta l}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}. \quad (i)$$

Метод, примененный для симметричной задачи, приведенной на рис. 11, а, может быть также использован в антисимметричной, показанной на рис. 14, а. В этом случае Q_0 и M_0 будут представлять также антисимметричную систему, как показано на рис. 14, с. Для определения надлежащих значений Q_0 и M_0 можно написать систему уравнений, подобных уравнениям (a), (b) и (c). Как только Q_0 и M_0 будут вычислены, все необходимые параметры, касающиеся изгиба балки, показанной на рис. 14, а, могут быть легко получены наложением случаев, представленных на рис. 14, б и 14, с.

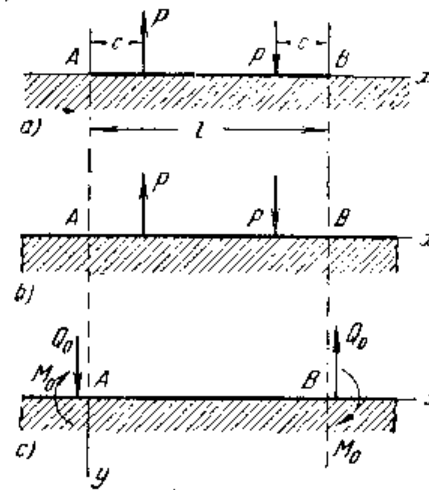


Рис. 14.

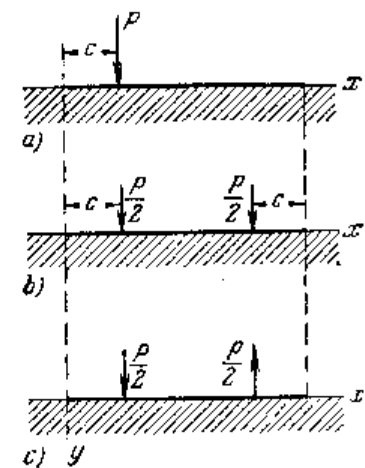


Рис. 15.

Имея решение для симметричного и антисимметричного нагружений балки, мы можем легко получить решение для любого рода нагружения, используя принцип наложения. Например, решение для несимметричного случая, показанного на рис. 15, а, получается наложением решений симметричного и антисимметричного случаев, показанных на рис. 15, б и 15, с. Задача, показанная на рис. 16, может быть решена таким же способом. В каждом случае задача сводится к определению надлежащих значений сил Q_0 и моментов M_0 из двух уравнений (c).

При исследовании изгиба балок конечной длины мы замечаем, что действие сил, приложенных к одному концу балки, на прогиб другого конца

зависит от значения величины βl . Эта величина возрастает с увеличением длины балки. В то же время, как можно видеть из таблицы I, функции φ , ψ и θ быстро убывают, и при βl , превышающем некоторое значение, мы можем предположить, что сила, действующая на одном конце балки, имеет лишь незначительное влияние на другом конце. Это дает нам право рассматривать балку как бесконечно длинную. В таком случае в уравнениях (b) можно пренебречь величинами $\varphi(\beta l)$, $\psi(\beta l)$ и $\theta(\beta l)$ по сравнению с единицей; тогда уравнения (c) значительно упрощаются.

Вообще рассмотрение изгиба балок конечной длины приводит нас, естественно, к разделению их на три группы:

- I. Короткие балки, $\beta l < 0,60$.
- II. Балки средней длины, $0,60 < \beta l < 5$.
- III. Длинные балки, $\beta l > 5$.

При рассмотрении балок группы I мы можем совершенно пренебречь изгибом и принимать эти балки абсолютно жесткими, так как прогиб от изгиба обычно ничтожно мал по сравнению с осадкой основания. Взяв, например, случай груза посредине (рис. 13) и положив $\beta l = 0,60$, мы найдем по

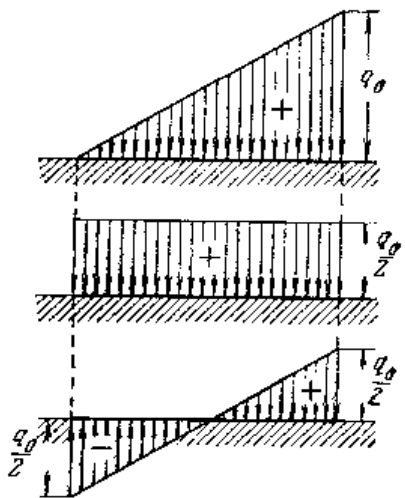


Рис. 16.

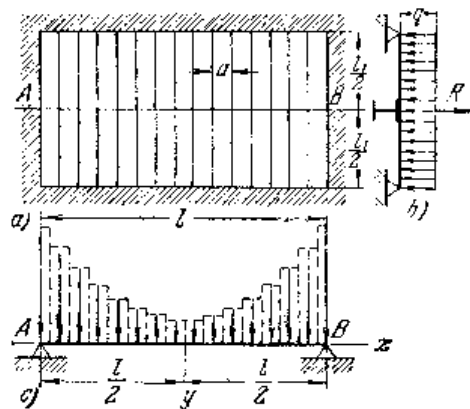


Рис. 17.

приведенным ранее формулам для y_a и y_c , что разница между прогибом посредине и прогибом на конце составляет лишь около половины процента от полной осадки. Это указывает на то, что осадка основания получается с очень хорошей точностью, если рассматривать балку бесконечно жесткой и пользоваться для определения осадки формулой

$$y = \frac{P}{kl}.$$

Характеристикой балок группы II является то обстоятельство, что сила, действующая на одном конце балки, оказывает значительное влияние на другом конце. Следовательно, такие балки нужно рассматривать как балки конечной длины.

В балках группы III мы можем допустить при исследовании одного конца балки, что другой ее конец бесконечно удален. Поэтому балку можно принимать за бесконечно длинную.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что балка опирается на сплошное упругое основание, но полученные результаты можно также при-

менить и в том случае, когда балка опирается на большое число равноотстоящих упругих опор. В качестве примера такого рода рассмотрим горизонтальную балку AB (рис. 17), поддерживающую систему равноотстоящих вертикальных балок, которые несут равномерно распределенную нагрузку q . Все балки являются свободно опертыми на концах. Обозначая через EJ_1 и l_1 соответственно жесткость при изгибе и длину вертикальных балок, мы находим, что прогиб их посредине

$$y = \frac{5}{384} \frac{q l_1^4}{EJ_1} - \frac{R l_1^3}{48 E J_1}, \quad (j)$$

где R есть давление произвольной вертикальной балки на горизонтальную балку. Решая уравнение (j) относительно R , мы находим, что горизонтальная балка AB находится под действием сосредоточенной силы (рис. 17, e), величина которой равняется

$$R = \frac{5}{8} q l_1 - \frac{48 E J_1}{l_1^3} y. \quad (k)$$

Полагая, что расстояние a между вертикальными балками мало по сравнению с длиной l горизонтальной балки и заменив сосредоточенные силы равноценной равномерной нагрузкой, как показано на рис. 17, e, замечаем также ступенчатое распределение нагрузки (указанное на рисунке прерывистой линией) непрерывно распределенной нагрузкой интенсивностью

$$q_1 = ky,$$

где

$$q_1 = \frac{5}{8} \frac{q l_1}{a}; \quad k = \frac{48 E J_1}{a l_1^3}. \quad (l)$$

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси для балки AB будет

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q_1 - ky. \quad (m)$$

Отсюда видно, что горизонтальная балка находится в условиях равномерно нагруженной балки на упругом основании. Интенсивность нагрузки и коэффициент основания даны выражениями (l).

Для определения прогиба балки мы можем применить ранее поясненный метод наложения или непосредственно проинтегрировать уравнение (m). Пользуясь последним способом, мы можем написать общий интеграл уравнения (m) в следующем виде:

$$y = \frac{q_1}{k} + C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x. \quad (n)$$

Взяв начало координат посредине (рис. 17, e), мы заключаем по условию симметрии, что

$$C_2 = C_3 = 0.$$

Подставляя это в уравнение (n) и пользуясь условиями для свободно опертых концов

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = 0,$$

*) Различные задачи такого рода встречаются в корабельных конструкциях. Довольно полное изложение таких задач дано И. Г. Бубновым в его книге «Строительная механика корабля», Петербург, т. 2, 1914. См. также Н. Ф. Полюкович, Строительная механика корабля, Москва, т. 2, ч. 1, стр. 318—314, 1946.

получаем

$$C_1 = -\frac{q_1}{k} \frac{2 \sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l},$$

$$C_2 = -\frac{q_1}{k} \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l}.$$

Тогда уравнение изогнутой оси будет

$$y = \frac{q_1}{k} \left(1 - \frac{2 \sin \frac{\beta l}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \right). \quad (o)$$

Прогиб посередине получим, положив $x=0$, что дает

$$(y)_{x=0} = \frac{q_1}{k} \left(1 - \frac{2 \cos \frac{\beta l}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2}}{\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l} \right). \quad (p)$$

Подставляя это значение в уравнение (k), находим реакцию средней опоры вертикальной балки, которая пересекает балку AB в ее середине. Интересно отметить, что эта реакция может получиться отрицательной; это указывает на то, что горизонтальная балка действительно поддерживает вертикальные балки, если она достаточно жестка. В противном случае прогиб некоторых вертикальных балок может увеличиться.

ЗАДАЧИ

1. Найти общее выражение для изогнутой оси балки, представленной на рис. 12.

Ответ.

$$y = \frac{2P\beta}{k} \frac{\operatorname{ch} \beta x \cos \beta (l-x) + \operatorname{ch} \beta (l-x) \cos \beta x}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

2. Найти прогибы на концах и изгибающий момент посередине балки, изгибаемой двумя равными и противоположными парами сил M_0 (рис. 18).

Ответ.

$$y_a = y_b = -\frac{2M_0\beta^2}{k} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}, \quad M_c = 2M_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2} + \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

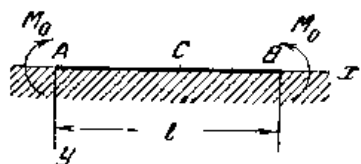


Рис. 18.

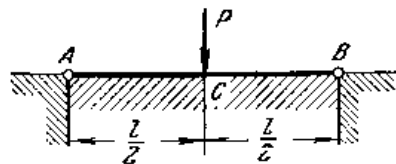


Рис. 19.

3. Найти прогиб и изгибающий момент посередине балки с шарнирными концами (рис. 19). Нагрузка приложена посередине балки.

Ответ.

$$y_c = \frac{P\beta}{2k} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}, \quad M_c = \frac{P}{4\beta} \frac{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}.$$

4. Найти прогиб и изгибающий момент посередине равномерно нагруженной балки с шарнирными концами (рис. 20).

Ответ.

$$y_c = \frac{q}{k} \left(1 - \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\beta l}{2} \cos \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l} \right), \quad M_c = \frac{q}{\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}.$$

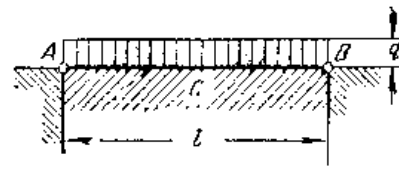


Рис. 20.

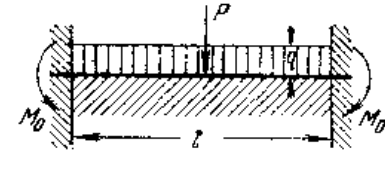


Рис. 21.

5. Найти изгибающие моменты на концах балки с заделанными концами; балка несет равномерно распределенную нагрузку и груз посередине (рис. 21).

Ответ.

$$M_0 = -\frac{P}{\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta l}{2} \sin \frac{\beta l}{2}}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l} - \frac{q}{2\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}.$$

6. Найти уравнение изогнутой оси балки на упругом основании с грузом на одном конце (рис. 22).

Ответ.

$$y = \frac{2P\beta}{k (\operatorname{sh}^2 \beta l - \sin^2 \beta l)} [\operatorname{sh} \beta l \cos \beta x \operatorname{ch} \beta (l-x) - \sin \beta l \operatorname{ch} \beta x \cos \beta (l-x)].$$

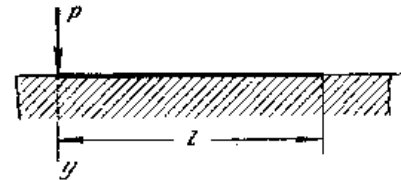


Рис. 22.



Рис. 23.

7. Балка на упругом основании с шарнирными концами изгибается парой сил M_0 , приложенной на конце (рис. 23). Найти уравнение изогнутой оси балки.

Ответ.

$$y = \frac{2M_0\beta^2}{k (\operatorname{ch}^2 \beta l - \cos^2 \beta l)} [\operatorname{ch} \beta l \sin \beta x \operatorname{sh} \beta (l-x) - \cos \beta l \operatorname{sh} \beta x \sin \beta (l-x)].$$

ГЛАВА II

БАЛКИ, ПОДВЕРЖЕННЫЕ ОДНОВРЕМЕННОМУ ДЕЙСТВИЮ
ОСЕВЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК4. Одновременное действие осевых сжимающих
и поперечных нагрузок

Начнем с простой задачи о стержне с шарнирными концами, нагруженном одной поперечной силой и центрально сжатом двумя равными и противоположными силами S (рис. 24). Предполагая, что стержень имеет плоскость симметрии, в которой действует сила P , мы принимаем, что изгиб происходит в этой же плоскости. Дифференциальные уравнения изогнутой оси для двух участков стержня будут

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Sy - \frac{Pc}{l} x, \quad (a)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Sy - \frac{P(l-c)}{l} (l-x). \quad (b)$$

Пользуясь обозначением

$$\frac{S}{EJ} = p^2, \quad (17)$$

представим решения уравнений (a) и (b) в следующем виде:

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px - \frac{Pc}{Sl} x, \quad (c)$$

$$y = C_3 \cos px + C_4 \sin px - \frac{P(l-c)}{Sl} (l-x). \quad (d)$$

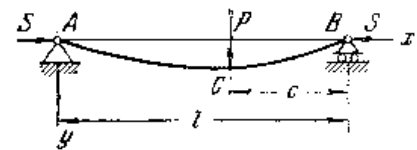


Рис. 24.

Так как прогибы на концах стержня обращаются в нуль, заключаем, что $C_1 = 0$, $C_3 = -C_4 \operatorname{tg} pl$.

Остальные две постоянные интегрирования найдутся из условий неразрывности деформаций в точке приложения груза P , которые требуют, чтобы уравнения (c) и (d) давали один и тот же прогиб и один и тот же угол наклона касательной при $x = l - c$. Таким путем

получаем

$$C_2 \sin p(l-c) = C_4 [\sin p(l-c) - \operatorname{tg} pl \cos p(l-c)],$$

$$C_2 p \cos(l-c) = C_4 p [\cos p(l-c) - \operatorname{tg} pl \sin p(l-c)] + \frac{P}{S},$$

откуда

$$C_2 = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl}, \quad C_4 = -\frac{P \sin p(l-c)}{Sp \operatorname{tg} pl}.$$

Подставляя C_2 в уравнение (c), получаем для левого участка стержня

$$y = \frac{P \sin pc}{Sp \sin pl} \sin px - \frac{Pc}{Sl} x, \quad (18)$$

и дифференцированием находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P \sin pc}{S \sin pl} \cos px - \frac{Pc}{Sl}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{Pp \sin pc}{S \sin pl} \sin px. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Соответствующие выражения для правого участка стержня получаются подстановкой $(l-x)$ вместо x и $(l-c)$ вместо c и изменением знака dy/dx в уравнениях (18) и (19). Эти подстановки дают

$$y = \frac{P \sin p(l-c)}{Sp \sin pl} \sin p(l-x) - \frac{P(l-c)}{Sl} (l-x), \quad (20)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \sin p(l-c)}{S \sin pl} \cos p(l-x) + \frac{P(l-c)}{Sl}, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pp \sin p(l-c)}{S \sin pl} \sin p(l-x). \quad (22)$$

В частном случае, когда груз P приложен посередине, имеем $c = l/2$, и вводя обозначение

$$\frac{Sl^2}{4EJ} = \frac{p^2 l^2}{4} = u^2, \quad (23)$$

получаем из уравнения (18)

$$(y)_{\max} = (y)_{x=l/2} = \frac{P}{2Sp} \left(\operatorname{tg} \frac{pl}{2} - \frac{pl}{2} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3} u^2}. \quad (24)$$

Первый множитель в уравнении (24) представляет прогиб, вызванный действием одной лишь поперечной нагрузки. Второй множитель указывает, в какой пропорции прогиб, вызванный силой P , увеличивается от действия осевых сжимающих сил S . Когда S мало по сравнению с эйлеровой нагрузкой ($S_e = EJ\pi^2/l^2$), величина u мала и второй множитель в уравнении (24) приближается к единице; это указывает на то, что при этом условии влияние на прогиб осевых сжимающих сил незначительно. Когда S приближается к эйлерову значению, величина u

приближается к значению $\pi/2$ (см. формулу (23)) и второй множитель в уравнении (24) неограниченно увеличивается, как и нужно было ожидать из нашего прежнего изучения вопроса о критической силе (см. т. I, стр. 223).

Наибольшее значение изгибающего момента имеет место под силой P ; это значение получается из второго уравнения (19), которое дает

$$M_{\max} = - EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x = \frac{l}{2}} = EJ \frac{Pp}{2S} \operatorname{tg} \frac{pl}{2} = \frac{Pl \operatorname{tg} u}{4} \quad (25)$$

Опять видим, что первый множитель в уравнении (25) представляет изгибающий момент, вызываемый действием только лишь силы P , в то время как второй множитель является коэффициентом увеличения, оценивающим влияние осевой силы S на наибольший изгибающий момент.

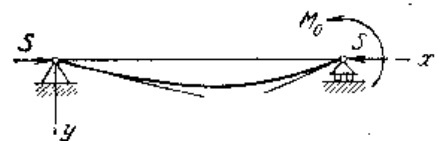


Рис. 25.

Имея решение задачи для одной поперечной силы P (рис. 24), можем легко получить решение для случая сжатого стержня, изгибаемого парой сил, приложенной на конце (рис. 25).

Необходимо только предположить, что в нашем предыдущем изложении расстояние c бесконечно уменьшается и приближается к нулю, в то время как Pc остается постоянным и равным M_0 . Подставляя $Pc = M_0$ и $\sin pc = pc$ в уравнение (18), мы получаем уравнение изогнутой оси

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{\sin px}{\sin pl} - \frac{x}{l} \right), \quad (26)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p \cos px}{\sin pl} - \frac{1}{l} \right).$$

Углы наклона касательных к оси балки на концах будут

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p}{\sin pl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{M_0 l}{6EJ} 6 \left(\frac{1}{2u \sin 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right), \quad (27)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{M_0}{S} \left(\frac{p}{\operatorname{tg} pl} - \frac{1}{l} \right) = \frac{M_0 l}{3EJ} 3 \left(\frac{1}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{1}{(2u)^2} \right). \quad (28)$$

Снова первые множители в уравнениях (27) и (28), взятые с надлежащими знаками, представляют углы наклона касательных, вызываемые действием только одной пары сил M_0 (см. т. I, стр. 141), а вторые множители представляют влияние осевой силы S .

Рассматривая уравнения (18) и (26), видим, что поперечная сила P и пара сил M_0 входят в эти выражения линейно, в то время как осевая сила входит в те же выражения в более сложном виде, так как p также содержит S (см. уравнение (17)). Из этого заключаем, что если в точке C (рис. 24) приложены две силы P и Q , прогиб

в какой-либо точке можно получить наложением прогибов, вызываемых грузом Q и осевыми силами S , на прогиб, вызываемый грузом P и теми же осевыми силами. Подобное заключение можно применить и в случае пар сил, приложенных на одном конце балки.

Это заключение относительно применения принципа наложения можно легко обобщить и распространить на случай нескольких грузов (рис. 26). Для каждого участка сжатого стержня можно написать уравнение, подобное уравнениям (а) и (б), и можно получить решение, подобное решениям (с) и (д). Постоянные интегрирования можно найти из условий непрерывности в точках приложения грузов и из условий на концах сжатого стержня. Таким путем можно показать, что прогиб в какой-либо точке сжатого стержня является линейной функцией грузов P_1, P_2, \dots и что прогиб в какой-либо точке можно получить наложением прогибов, вызываемых в этой точке каждым из поперечных грузов, действующим совместно с осевой силой S .

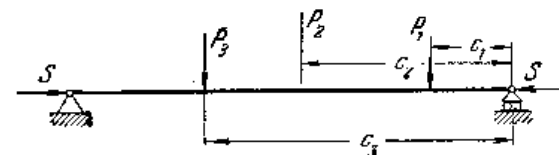


Рис. 26.

Рассмотрим общий случай, когда действуют n сил и m из этих сил приложены справа от поперечного сечения, для которого вычисляется прогиб. Выражение для этого прогиба получается при помощи уравнения (18) для сил P_1, P_2, \dots, P_m и уравнения (20) для сил $P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_n$. Таким путем находим требуемый прогиб:

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i \sin pc_i - \frac{x}{Sl} \sum_{i=1}^{i=m} P_i c_i + + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i \sin p(l-c_i) - \frac{l-x}{Sl} \sum_{i=m+1}^{i=n} P_i (l-c_i). \quad (29)$$

Если вместо сосредоточенных сил имеется равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , действующая на сжатый стержень, то каждый элемент $q dc$ этой нагрузки, взятый на расстоянии c от правого конца, можно рассматривать как сосредоточенную силу. Подставляя его вместо P_i в уравнение (29) и заменяя суммирование интегрированием, получаем следующее уравнение для изогнутой оси:

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \int_0^{l-x} q \sin pc \, dc - \frac{x}{Sl} \int_0^{l-x} qc \, dc + + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \int_x^l q \sin p(l-c) \, dc - \frac{l-x}{Sl} \int_x^l q(l-c) \, dc.$$

Выполняя интегрирование, находим

$$y = \frac{q}{8\rho^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\rho l}{2} - \rho x\right)}{\cos\frac{\rho l}{2}} - 1 \right] - \frac{q}{2S} x(l-x), \quad (30)$$

$$y_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{q}{8\rho^2} \left(\frac{1}{\cos u} - 1 - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{u^4}. \quad (31)$$

Дифференцированием уравнения (30) легко получаем выражения для угла наклона касательной и для изгибающего момента. Угол наклона касательной на левом конце стержня равен

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{ql}{2S} \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\rho l}{2}}{\frac{\rho l}{2}} - 1 \right) = \frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3}u^3}. \quad (32)$$

Наибольший изгибающий момент будет посредине и равен

$$M_{\max} = -EJ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = EJ \frac{q \left(1 - \cos\frac{\rho l}{2}\right)}{S \cos\frac{\rho l}{2}} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (33)$$

Пользуясь решением для случая пары сил совместно с решениями для поперечных нагрузок и применяя метод наложения, мы можем легко решить различные статически неопределимые случаи изгиба сжатых стержней. Взяв в качестве примера случай равномерно нагруженного сжатого стержня с одним заделанным концом (рис. 27), найдем изгибающий момент M_0 в заделанном конце из того условия, что этот конец не поворачивается при изгибе. Пользуясь уравнениями (28) и (32), это условие представляем в следующем виде:

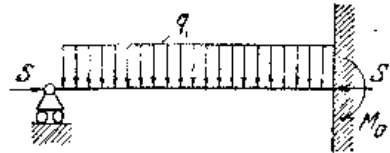


Рис. 27.

$$-\frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3}u^3} + \frac{M_0 l}{3EJ} \left(\frac{3}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{3}{(2u)^2} \right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{8} \frac{4 \operatorname{tg} 2u (\operatorname{tg} u - u)}{u (\operatorname{tg} 2u - 2u)}. \quad (34)$$

В случае равномерно нагруженного сжатого стержня с обоими заделанными концами моменты M_0 на концах получатся из уравнения

$$-\frac{ql^2}{24EJ} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3}u^3} + \frac{M_0 l}{3EJ} \left[\frac{3}{2u \operatorname{tg} 2u} - \frac{3}{(2u)^2} \right] - \frac{M_0 l}{6EJ} \left(\frac{6}{2u \sin 2u} - \frac{6}{(2u)^2} \right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12} \frac{\operatorname{tg} u - u}{\frac{1}{3}u^2 \operatorname{tg} u}. \quad (35)$$

Из уравнений (34) и (35) видно, что значения статически неопределимых моментов получаются умножением соответствующих моментов, возникающих от действия только одной поперечной нагрузки, на некоторые коэффициенты увеличения.

Необходимые вычисления можно значительно упростить при помощи готовых численных таблиц, содержащих коэффициенты увеличения¹⁾. В табл. 3 даны коэффициенты увеличения для равномерно нагруженного сжатого стержня при следующих обозначениях:

$$\varphi_0(u) = \frac{1}{5} \frac{1 - \frac{u^2}{2}}{u^4}; \quad \psi_0(u) = \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}.$$

Когда наибольший изгибающий момент для сжатого стержня найден, численно наибольшее напряжение получится сложением сжи-

Таблица 3

Коэффициенты увеличения моментов для равномерно нагруженных сжатых стержней

$u =$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$\varphi_0(u) = \dots$	1,000	1,004	1,016	1,037	1,070	1,114	1,173	1,250	1,354
$\psi_0(u) = \dots$	1,000	1,004	1,016	1,038	1,073	1,117	1,176	1,255	1,361
$u =$	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,45	1,50	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi_0(u) = \dots$	1,494	1,690	1,962	2,400	3,181	4,822	6,790	11,490	∞
$\psi_0(u) = \dots$	1,504	1,704	1,989	2,441	3,240	4,938	6,940	11,670	∞

мающего напряжения от силы S с наибольшим напряжением от изгиба, что дает

$$|\sigma|_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{M_{\max}}{W}, \quad (e)$$

где F и W — соответственно площадь поперечного сечения стержня и момент сопротивления площади. Взяв в качестве примера равномерно

¹⁾ Различные частные случаи поперечно нагруженных сжатых стержней были рассмотрены А. П. Ван-дер-Флитом, Известия Собрания инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1900—1903 гг. Численные таблицы коэффициентов увеличения даны в этой работе.

нагруженный стержень с шарнирными концами, получим из формулы (33)

$$|\sigma|_{\max} = \frac{S}{F} + \frac{ql^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (f)$$

При подборе надлежащих размеров поперечного сечения сжатого стержня необходимо сначала установить зависимость между продольной и поперечной нагрузками. Если условия таковы, что осевая сила S остается постоянной, а может изменяться только поперечная нагрузка q , то наибольшее напряжение по уравнению (f) пропорционально нагрузке q . Тогда требуемые размеры поперечного сечения получатся подстановкой в это уравнение σ_T/k вместо σ_{\max} , где k — коэффициент безопасности по отношению к пределу текучести материала¹⁾.

Если условия такие, какие показаны для стержня AB на рис. 28, т. е. осевая сила S изменяется в том же отношении, что и поперечная нагрузка q , вопрос о выборе безопасных размеров становится более сложным. Правая часть уравнения (f) уже не является линейной относительно q , так как величина u , определяемая по уравнению (23), также зависит от величины q . Благодаря этому обстоятельству наибольшее напряжение по уравнению (f) увеличивается

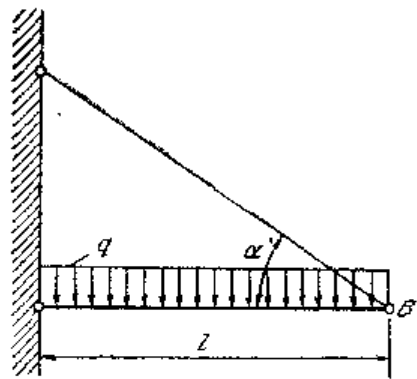


Рис. 28.

в большей степени, чем нагрузка q , и если мы поступим, как в предыдущем случае, и подставим в это уравнение σ_T/k вместо σ_{\max} , то действительный коэффициент безопасности конструкции будет меньше чем k и нагрузка, при которой начнется текучесть, будет меньше чем kq . Чтобы удовлетворить условиям безопасности, воспользуемся уравнением (f) для определения условий начала текучести и запишем

$$\sigma_T = \frac{S_T}{F} + \frac{q_T l^2}{8W} \frac{2(1 - \cos u_T)}{u_T^2 \cos u_T}. \quad (g)$$

Так как S_T в каждом частном случае (например, как на рис. 28) является некоторой функцией q_T , а u определяется по уравнению (23), то правая часть уравнения (g) для любых принятых значений F и W является функцией предельного значения нагрузки q_T , а это значение можно найти из уравнения путем последовательных попыток. Зная q_T , мы определим безопасную нагрузку q_T/k для принятых размеров

¹⁾ Предполагается, что материал стержня имеет ясно выраженный предел текучести σ_T .

поперечного сечения сжатого стержня. Повторяя эти вычисления несколько раз, мы можем окончательно найти размеры поперечного сечения¹⁾, которые будут соответствовать требуемому коэффициенту безопасности k . Подобный метод был применен ранее в п. 59 т. I. (Расчет колонн на основании предполагаемых неточностей, стр. 232.)

ЗАДАЧИ

1. Размеры сжатого стержня AB на рис. 28 таковы, что его эйлерова нагрузка равна 1000 кг. Пользуясь таблицей 3, найти коэффициенты увеличения $\varphi_0(u)$ и $\psi_0(u)$, если $\alpha = 45^\circ$ и $ql = 1000$ кг.

Ответ. $\varphi_0(u) = 2,01$; $\psi_0(u) = 2,03$.

2. Найти угол наклона касательной на левом конце сжатого стержня с шарнирными концами, который нагружен в середине грузом P и осевыми силами S .

Ответ. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{P}{2S} \frac{1 - \cos u}{\cos u} = \frac{Pl^2}{16EJ} \frac{1 - \cos u}{\frac{1}{2} u^2 \cos u}$.

3. Найти углы наклона касательных на концах сжатого стержня, несущего треугольную нагрузку (рис. 29).

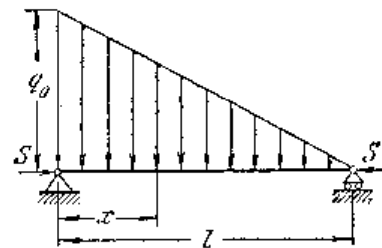


Рис. 29.

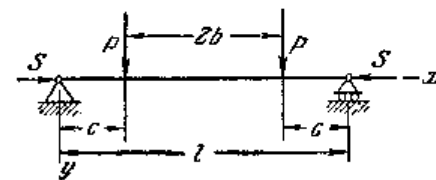


Рис. 30.

Решение. Подставляя в уравнение (29) $q_0 c$ вместо P_l и заменяя суммирование интегрированием, находим

$$y = \frac{\sin px}{Sp \sin pl} \int_0^{l-x} \frac{q_0 c}{l} \sin pc \, dc - \frac{x}{Sl} \int_0^{l-x} \frac{q_0 c^2}{l} \, dc + \\ + \frac{\sin p(l-x)}{Sp \sin pl} \int_{l-x}^l \frac{q_0 c}{l} \sin p(l-c) \, dc - \frac{l-x}{Sl} \int_{l-x}^l \frac{q_0 c}{l} (l-c) \, dc.$$

Дифференцируя это по x , находим, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2q_0 l}{6p^2 EJ} (\beta - 1), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{q_0 l}{6p^2 EJ} (\alpha - 1),$$

где α и β являются функциями, определяемыми по уравнениям (36) (см. ниже п. 5).

¹⁾ Этот метод расчета сжатых стержней был разработан К. С. Завриным; см. Известия Института инженеров путей сообщения (С.-Петербург), 1913 г.

4. Найти углы наклона касательных на концах сжатого стержня, симметрично нагруженного двумя грузами P , как показано на рис. 30.

$$\text{Ответ. } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = \frac{P}{S} \left(\frac{\cos pb}{\cos \frac{pl}{2}} - 1\right).$$

5. Сжатый стержень с заделанными концами нагружен, как показано на рис. 30. Найти изгибающие моменты M_0 на концах.

Решение. Моменты M_0 найдутся из условий, что концы стержня не поворачиваются. Пользуясь ответом предыдущей задачи, а также уравнениями (27) и (28), получаем для вычисления M_0 следующее уравнение:

$$\frac{M_0 l}{6EJ} a + \frac{M_0 l}{3EJ} + \frac{P}{S} \left(\frac{\cos pb}{\cos \frac{pl}{2}} - 1\right) = 0,$$

откуда

$$M_0 = -\frac{2PEJ}{Sl} \frac{u}{\operatorname{tg} u} \left(\frac{\cos pb}{\cos u} - 1\right).$$

Если $b=0$, получим случай стержня, нагруженного грузом $2P$, сосредоточенным посредине.

5. Неразрезные сжатые стержни

В случае неразрезного сжатого стержня мы поступим так же, как и в случае неразрезных балок (см. т. I, стр. 175), и рассмотрим два смежных пролета (рис. 31)¹⁾. Пользуясь уравнениями (23), (27) и (28) и вводя следующие обозначения для n -го пролета при $u_n^2 = \frac{S_n l_n^2}{4EJ_n}$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= 6 \left[\frac{1}{2u_n \sin 2u_n} - \frac{1}{(2u_n)^2} \right], \\ \beta_n &= 3 \left[\frac{1}{(2u_n)^2} - \frac{1}{2u_n \operatorname{tg} 2u_n} \right], \\ \gamma_n &= \frac{\operatorname{tg} u_n - u_n}{\frac{1}{3} u_n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\gamma_n = \frac{\operatorname{tg} u_n - u_n}{\frac{1}{3} u_n^2}. \quad (37)$$

мы заключаем, что угол наклона касательной на правом конце n -го пролета (рис. 31, а), вызываемый концевыми моментами M_{n-1} и M_n , равняется

$$-\beta_n \frac{M_n l_n}{3EJ_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_n}. \quad (а)$$

Угол наклона касательной, вызываемый на левом конце $(n+1)$ -го пролета моментами M_n и M_{n+1} , равняется

$$\alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}. \quad (б)$$

Если нет поперечной нагрузки, действующей на двух рассматриваемых пролетах, то выражения (а) и (б) должны быть равны между собой, поэтому получаем

$$\frac{\alpha_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2 \left(\beta_n \frac{l_n}{J_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = 0. \quad (38)$$

Таково уравнение трех моментов для неразрезного сжатого стержня, если не имеется поперечной нагрузки на двух рассматриваемых пролетах.

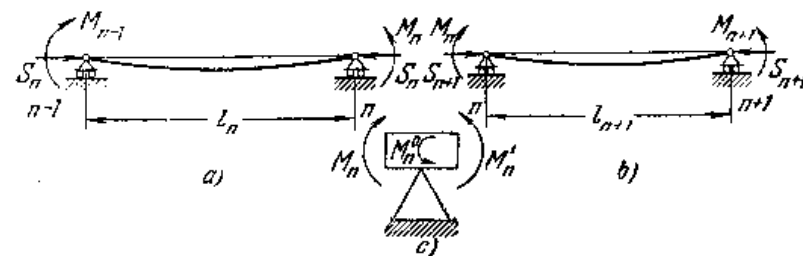


Рис. 31.

Если же действует поперечная нагрузка, то соответствующие углы наклона касательных, вызываемые этой нагрузкой, должны быть добавлены к выражениям (а) и (б). Возьм, например, случай равномерной нагрузки q_n и q_{n+1} , действующей на пролетах n и $n+1$ в направлении сверху вниз, мы найдем соответствующие углы наклона касательных из уравнения (32) и вместо выражений (а) и (б) получим

$$-\beta_n \frac{M_n l_n}{3EJ_n} - \alpha_n \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ_n} - \gamma_n \frac{q_n l_n^2}{24EJ_n}, \quad (с)$$

$$\alpha_{n+1} \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} + \beta_{n+1} \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} + \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{24EJ_{n+1}}. \quad (д)$$

Приравняв эти два выражения, мы находим

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2 \left(\beta_n \frac{l_n}{J_n} + \beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = \\ = -\gamma_n \frac{q_n l_n^2}{4J_n} - \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{4J_{n+1}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Это уравнение трех моментов для сжатого стержня с равномерной нагрузкой в каждом пролете. Оно подобно уравнению трех моментов для неразрезной балки и совпадает с ним, когда $S=0$ и функции α , β , γ становятся равными единице.

Для любого иного вида поперечной нагрузки мы должны изменить только правую часть уравнения (39), которая зависит от поворота смежных концов двух пролетов, вызываемого поперечной нагрузкой. Возьм, например, случай трапециoidalной нагрузки, показанной на рис. 32, и разделив нагрузку на две части: равномерно распределенную нагрузку и нагрузку по треугольнику, мы воспользуемся для равномерных нагрузок членами, уже написанными в правой

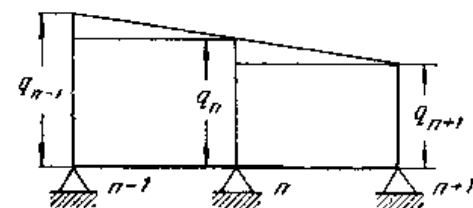


Рис. 32.

¹⁾ Теория принадлежит Н. Z i m m e r m a n n'у, Sitzungsber. Akad. Wissensch., Berlin, 1907 и 1909.

части уравнения (39). К этим членам мы должны добавить члены, соответствующие треугольным нагрузкам. Пользуясь выражениями для углов наклона касательных в задаче 3 предыдущего параграфа, мы находим, что два члена, которые мы должны добавить к правой части уравнения (39) в случае нагрузки, показанной на рис. 32, будут

$$-\frac{(q_{n-1} - q_n) l_n}{p^2 J_n} (\alpha_n - 1) - \frac{2(q_n - q_{n+1}) l_{n+1}}{p^2 J_{n+1}} (\beta_{n+1} - 1), \quad (e)$$

где α_n и β_{n+1} определяются выражениями (36). Если на рассматриваемых пролетах действуют сосредоточенные силы, то требуемые выражения для поворотов легко получаются из общего уравнения изогнутой оси (29).

Вычисление моментов из уравнения трех моментов (39) можно значительно упростить при помощи числовых таблиц функций α , β и γ ¹⁾.

При выводе уравнения (39) предполагалось, что момент M_n на n -й опоре имеет одно и то же значение для обоих смежных пролетов. Однако встречаются случаи, когда на опоре приложен внешний момент M_n^0 , как показано на рис. 31, с; тогда следует иметь в виду различие между значениями изгибающих моментов слева и справа от опоры. Соотношение между этими двумя моментами дается уравнением статики²⁾: $M_n - M_n^0 - M_n^c = 0$, откуда

$$M_n^c = M_n - M_n^0. \quad (f)$$

Уравнение (39) в таком случае заменяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n l_n}{J_n} M_{n-1} + 2\beta_n \frac{l_n}{J_n} M_n + 2\beta_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_n + \alpha_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} M_{n+1} = \\ = -\gamma_n \frac{q_n l_n^3}{4J_n} - \gamma_{n+1} \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{4J_{n+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если опоры неразрезного сжатого прямого стержня не находятся на одной прямой, то в правую часть уравнения (39) или (40) должны быть внесены дополнительные члены, зависящие от разностей в уровнях трех последовательных опор. Наличие осевых сил не влияет на эти члены, и они будут такими же, как и в случае балки без осевой нагрузки (см. т. I, стр. 177).

ЗАДАЧИ

1. Написать правую часть уравнения трех моментов, если имеется сосредоточенная сила P в $(n+1)$ -м пролете на расстоянии c_{n+1} от опоры $n+1$.

$$\text{Ответ. } -\frac{6P}{p_{n+1}^2 J_{n+1}} \left(\frac{\sin p_{n+1} c_{n+1}}{\sin p_{n+1} l_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

2. Написать правую часть уравнения трех моментов, если n -й пролет нагружен так, как показано на рис. 30, стр. 37, и если на $n+1$ -м пролете не имеется нагрузки.

¹⁾ Такие таблицы можно найти в книге A. S. Niles and J. S. Newell, Airplane Structures, New York, т. 2, 1943; см. также книгу автора «Theory of Elastic Stability», New York, 1936; русский перевод: Устойчивость упругих систем, 1955, Гостехиздат, Москва.

²⁾ Направление M_n^0 , указанное на рис. 31, с, принято за положительное направление внешнего момента.

Ответ. Пользуясь решением задачи 4 стр. 38, мы получим следующее выражение:

$$-\frac{6P}{p_n^2 J_n} \left(\frac{\cos p_n b_n}{\cos \frac{p_n l_n}{2}} - 1 \right).$$

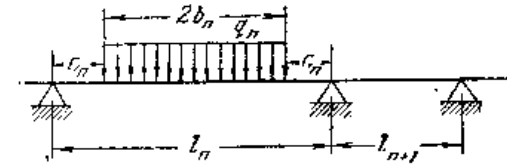


Рис. 33.

3. Найти правую часть уравнения трех моментов, если нагрузка такая, как показано на рис. 33.

$$\text{Ответ. } -\frac{6q_n}{p_n^2 J_n} \left(\frac{\cos p_n b_n}{p_n \cos \frac{p_n l_n}{2}} - b_n \right).$$

6. Растянутый стержень с поперечной нагрузкой

Если растянутый стержень подвергается действию растягивающих сил S и поперечной нагрузки P (рис. 34), то мы можем написать дифференциальное уравнение изогнутой оси для каждого участка стержня точно таким же образом, как это сделано для сжатого стержня в п. 4. Необходимо лишь изменить знак при S . В таком случае вместо величин p^2 и u^2 , определяемых соответственно уравнениями (17) и (23), мы будем иметь $-p^2$ и $-u^2$, а вместо p и u мы будем

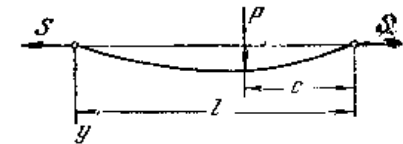


Рис. 34.

иметь $p \sqrt{-1} = pi$ и $u \sqrt{-1} = ui$. Подставляя $-S$, pi и ui вместо S , p и u в формулы, полученные для сжатого стержня (рис. 24), мы получим необходимые формулы для растянутого стержня, показанного на рис. 34. При выполнении этой подстановки мы воспользуемся известными зависимостями:

$$\sin ui = i \operatorname{sh} u, \quad \cos ui = \operatorname{ch} u, \quad \operatorname{tg} ui = i \operatorname{th} u.$$

Таким путем мы получим для левого участка растянутого стержня (рис. 34) из уравнений (18) и (19):

$$y = -\frac{P \operatorname{sh} pc}{Sp \operatorname{sh} pl} \operatorname{sh} px + \frac{Pc}{Sl} x, \quad (41)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P \operatorname{sh} pc}{S \operatorname{sh} pl} \operatorname{ch} px + \frac{Pc}{Sl}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pp \operatorname{sh} pc}{S \operatorname{sh} pl} \operatorname{sh} px. \quad (42)$$

Подобные формулы можно также получить для правого участка при помощи уравнений (20) — (22). Имея уравнение изогнутой оси

для случая одного груза P , действующего на растянутый стержень, мы можем легко получить уравнение изогнутой оси для любого рода нагрузки, используя метод наложения.

Рассматривая, например, равномерно нагруженный растянутый стержень и пользуясь уравнениями (30) и (31), мы получаем

$$y = \frac{q}{8p^3} \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{pl}{2} - px \right)}{\operatorname{ch} \frac{pl}{2}} - 1 \right] + \frac{q}{2S} x(l-x);$$

наибольший же прогиб будет

$$y_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{\operatorname{ch} u - 1 + \frac{u^2}{2}}{24 u^4} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \varphi_1(u), \quad (43)$$

где

$$\varphi_1(u) = \frac{\operatorname{ch} u - 1 + \frac{u^2}{2}}{24 u^4}.$$

Угол наклона касательной к изогнутой оси на левом конце по уравнению (32) станет

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \frac{ql^3}{24EJ} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^3}. \quad (44)$$

Наибольший изгибающий момент, который в этом случае будет посредине пролета, получится из уравнения (33):

$$M_{\max} = \frac{ql^3}{8} \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u} = \frac{ql^3}{8} \psi_1(u), \quad (45)$$

где

$$\psi_1(u) = \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u}.$$

Отсюда видно, что наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент получаются умножением соответствующих выражений для свободно опертой балки без осевой нагрузки на множители $\varphi_1(u)$ и $\psi_1(u)$, которые зависят от величины осевой растягивающей силы S . Числовые значения этих множителей даны в табл. 4¹⁾.

В случае изгиба растянутого стержня парой сил, приложенной на правом конце, уравнение изогнутой оси получается из уравнения (26),

¹⁾ Различные случаи изгиба растянутых стержней исследованы в статьях А. П. Ван-дер-Флигта, цит. на стр. 35, а также И. Г. Бубнова, цит. на стр. 27. Табл. 4 взята из последней книги.

Таблица 4

Множители для определения прогибов и наибольших изгибающих моментов поперечно нагруженных растянутых стержней

u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3	u	φ_1	φ_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	6,5	0,054	0,197	0,047	0,391	0,139
0,5	0,908	0,976	0,905	0,984	0,972	7,0	0,047	0,175	0,041	0,367	0,121
1,0	0,711	0,909	0,704	0,939	0,894	7,5	0,041	0,156	0,036	0,347	0,106
1,5	0,523	0,817	0,511	0,876	0,788	8,0	0,036	0,141	0,031	0,328	0,093
2,0	0,380	0,715	0,367	0,806	0,673	8,5	0,032	0,127	0,028	0,311	0,083
2,5	0,281	0,617	0,268	0,736	0,563	9,0	0,029	0,115	0,025	0,296	0,074
3,0	0,213	0,529	0,200	0,672	0,467	9,5	0,026	0,105	0,022	0,283	0,066
3,5	0,166	0,453	0,153	0,614	0,386	10,0	0,024	0,096	0,020	0,270	0,060
4,0	0,132	0,388	0,120	0,563	0,320	10,5	0,021	0,088	0,018	0,259	0,054
4,5	0,107	0,335	0,097	0,519	0,267	11,0	0,020	0,081	0,017	0,248	0,050
5,0	0,088	0,291	0,079	0,480	0,224	11,5	0,018	0,075	0,015	0,238	0,045
5,5	0,074	0,254	0,066	0,446	0,189	12,0	0,016	0,069	0,014	0,229	0,042
6,0	0,063	0,223	0,055	0,417	0,162						

которое напишется так:

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{x}{l} - \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl} \right). \quad (46)$$

Если имеются две равные и противоположные пары сил, приложенные к концам растянутого стержня, уравнение изогнутой оси получится с помощью метода наложения:

$$y = \frac{M_0}{S} \left(\frac{x}{l} - \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} pl} \right) - \frac{M_0}{S} \left[\frac{l-x}{l} - \frac{\operatorname{sh} p(l-x)}{\operatorname{sh} pl} \right] = \frac{M_0}{S} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} p \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \frac{pl}{2}} \right]. \quad (47)$$

Из этого уравнения мы находим прогиб посредине и угол наклона касательной на левом конце растянутого стержня:

$$\left. \begin{aligned} (y)_{x=\frac{l}{2}} &= \frac{M_0}{S} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\operatorname{ch} u} = \frac{M_0 l^3}{8EJ} \frac{\operatorname{ch} u - 1}{\frac{1}{2} u^2 \operatorname{ch} u}, \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} &= \frac{M_0}{S} p \operatorname{th} u = \frac{M_0 l}{2EJ} \frac{\operatorname{th} u}{u}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Изгибающий момент посредине равен

$$(M)_{x=\frac{l}{2}} = -EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=\frac{l}{2}} = M_0 \frac{1}{\operatorname{ch} u}. \quad (49)$$

Имея уравнение изогнутой оси для растянутого стержня с шарнирными концами, изгибаемого поперечной нагрузкой и парами сил на концах, мы можем легко получить различные статически неопределимые случаи изгиба растянутых стержней по методу наложения. Взяв, например, случай равномерно нагруженного растянутого стержня с заделанными концами и воспользовавшись уравнениями (44) и (48), мы получим изгибающие моменты M_0 на концах из уравнения

$$\frac{ql^2}{24EJ} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^3} + \frac{M_0 l}{2EJ} \frac{\operatorname{th} u}{u} = 0,$$

откуда

$$M_0 = - \frac{ql^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u} = - \frac{ql^2}{12} \psi_2(u), \quad (50)$$

где

$$\psi_2(u) = \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{th} u}.$$

Числовые значения функции $\psi_2(u)$ даны в таблице 4. При помощи уравнений (45) и (49) изгибающий момент посредине получится равным

$$M_1 = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\operatorname{ch} u - 1)}{u^2 \operatorname{ch} u} - \frac{ql^2}{12} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^2 \operatorname{sh} u} = \frac{ql^2}{24} \frac{6(\operatorname{sh} u - u)}{u^2 \operatorname{sh} u} = \frac{ql^2}{24} \psi_3(u). \quad (51)$$

Прогиб посредине определяется уравнениями (43) и (48), которые дают

$$y_{\max} = (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} u} - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5}{24} u^4} - \frac{ql^4}{16EJ} \frac{(u - \operatorname{th} u)(\operatorname{ch} u - 1)}{u^4 \operatorname{sh} u} = \frac{ql^4}{384EJ} \varphi_2(u), \quad (52)$$

где

$$\varphi_2(u) = \frac{24}{u^4} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u \operatorname{ch} u - u}{\operatorname{sh} u} \right).$$

Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_3$ равны единице при $u=0$, т. е. когда действует только поперечная нагрузка. Когда продольная растягивающая сила увеличивается, каждая из этих функций уменьшается, т. е. продольные растягивающие силы уменьшают прогибы и изгибающие моменты в поперечно нагруженных растянутых стержнях. Применения вышеприведенной таблицы будут даны ниже при рассмотрении изгиба тонких пластинок (см. стр. 72).

ЗАДАЧИ

1. Найти наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент для растянутого стержня, нагруженного посредине.

Ответ.

$$(y)_{\max} = \frac{Pl^3}{48EJ} \frac{u - \operatorname{th} u}{\frac{1}{3} u^3}, \quad M_{\max} = \frac{Pl}{4} \frac{\operatorname{th} u}{u}.$$

2. Найти изгибающие моменты M_0 на концах растянутого стержня с заделанными концами, симметрично нагруженного двумя силами P , как показано на рис. 30.

Решение. Изгибающие моменты на концах получатся из уравнения

$$\frac{P}{8} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} pb}{\operatorname{ch} \frac{pl}{2}} \right) + \frac{M_0 l}{2EJ} \frac{\operatorname{th} u}{u} = 0.$$

3. Найти изгибающие моменты на концах растянутого стержня с заделанными концами, нагруженного треугольной нагрузкой, показанной на рис. 29.

Указание. Воспользоваться решением задачи 3 на стр. 37, а также уравнением (46).

4. Найти наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент для стержня, показанного на рис. 35.

Указание. Считать стержень, как половину растянутого стержня, нагруженного посредине.

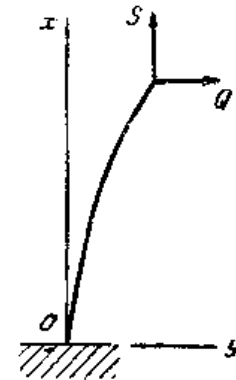


Рис. 35.

7. Представление кривой изгиба тригонометрическим рядом

При рассмотрении изгиба балок иногда очень удобно представить кривую изгиба в виде тригонометрического ряда¹⁾. Это имеет то преимущество, что по всей длине пролета справедливо единое математическое выражение изогнутой оси. Взяв случай балки с опертыми концами²⁾, показанного на рис. 36, можно охарактеризовать прогиб в любой ее точке следующим рядом:

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (a)$$

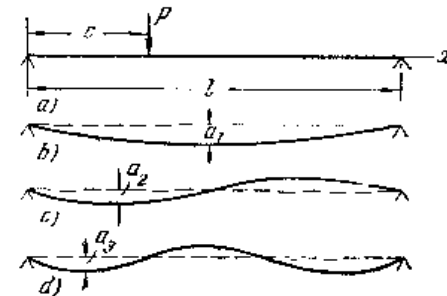


Рис. 36.

Геометрически это означает, что изогнутая ось может быть получена наложением простых синусоид, таких, какие показаны на рис. 36, b, c и d

¹⁾ См. статью автора «Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок», Известия Киевского политехнического института, 1909; см. также Н. М. Westergaard, Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., т. 47, стр. 465—533.

²⁾ В других случаях расчет становится слишком сложным для большинства практических целей.

и т. д. Первый член ряда (а) представляет первую кривую, второй член представляет вторую кривую и т. д. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 ряда дают наибольшие ординаты этих синусов, а числа 1, 2, 3, ... дают число полуволн. Надлежащим выбором коэффициентов a_1, a_2, \dots ряда (уравнением (а)) можно представить любую изогнутую ось¹⁾ со степенью точности, которая зависит от числа взятых членов. Эти коэффициенты можно вычислить путем рассмотрения потенциальной энергии деформации балки (т. I, уравнение (191), стр. 268), которая определяется выражением

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (b)$$

Вторая производная от y на основании уравнения (а) будет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - a_2 \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - a_3 \frac{3^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \dots$$

В уравнение (b) входит квадрат этой производной, который содержит члены двух родов:

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad 2a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{l^4} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Непосредственным интегрированием можно показать, что

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

и

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Следовательно, в интеграле уравнения (b) все члены, содержащие произведения коэффициентов такие, как a_n, a_m обращаются в нуль и остаются только члены с квадратами этих коэффициентов. Тогда

$$U = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} (1^4 a_1^2 + 2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots) = \frac{EJ\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2. \quad (53)$$

В предыдущем изложении (см. т. I, уравнение (а), стр. 303²⁾) было показано, что если упругая система претерпевает малое перемещение из своего положения равновесия, то соответствующее увеличение потенциальной энергии деформации системы равно работе, совершаемой внешними силами на таком перемещении. Когда упругая кривая представлена рядом (а), бесконечно малые перемещения можно получить бесконечно малыми вариациями коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots . Если любому коэффициенту a_n дать приращение da_n , то вместо члена $a_n \sin(n\pi x/l)$ мы будем иметь в ряде (а) член

$(a_n + da_n) \sin(n\pi x/l)$, другие же члены останутся без изменений. Это приращение da_n коэффициента a_n представляет дополнительный бесконечно малый прогиб, изображаемый синусоидой $da_n \sin(n\pi x/l)$, наложенной на первоначальную кривую. На этом дополнительном прогибе внешние силы совершают работу. В случае только одного груза P , приложенного на расстоянии c от левой опоры, точка приложения груза претерпевает вертикальное перемещение $da_n \sin(n\pi x/l)$ и груз совершает работу, равную

$$da_n \left(\sin \frac{n\pi c}{l} \right) P. \quad (c)$$

Приращение потенциальной энергии деформации, определяемой по уравнению (53), вследствие приращения da_n коэффициента a_n равняется

$$dU = \frac{\partial U}{\partial a_n} da_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n. \quad (d)$$

Приравняв это работе, определяемой уравнением (c), получаем

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n = P \sin \frac{n\pi c}{l},$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Из этого уравнения мы можем определить каждый из коэффициентов ряда (а), и уравнение кривой изгиба получится в таком виде:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (54)$$

При помощи этого уравнения можно вычислить прогиб для любого значения x . Например, прогиб посередине, когда груз находится посередине ($c = x = l/2$) будет

$$f = (y)_{x=l/2} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right).$$

Взяв только один первый член этого ряда, получим

$$f = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} = \frac{Pl^3}{48,7EJ}.$$

Сравнение с уравнением (90) т. I (стр. 130) показывает, что мы получили 48,7, в то время как точное значение было 48, так что ошибка, сделанная при использовании только одного первого члена вместо всего ряда, составляет около 1,5%. Такая точность достаточна во многих практических случаях; мы будем иметь другие примеры, где достаточная точность получится при использовании только одного члена ряда (а).

На основании решения, полученного для одного груза, можно исследовать с помощью метода наложения более сложные задачи. Например, рассмотрим балку, несущую равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Каждый элементарный груз $q dc$, находящийся на расстоянии c от левой опоры, вызывает прогиб, получаемый по уравнению (54) при

¹⁾ См. Buerly, Fourier Series and Spherical Harmonics, §§ 19—24. См. также Osgood, Advanced Calculus, стр. 391, 1928.

²⁾ См. также S. Timoshenko and D. H. Young, Theory of Structures, New York, стр. 229, 1945.

подстановке в него $P = q \, dc$, равный

$$dy = \frac{2q \, dc \, l^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4}.$$

Интегрируя это по c в пределах от $c = 0$ до $c = l$, получаем прогиб, вызываемый всей нагрузкой:

$$y = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (55)$$

Если мы воспользуемся только одним первым членом, прогиб посредине равномерно нагруженной балки будет

$$f = \frac{4ql^4}{EJ\pi^5} = \frac{ql^4}{76,5EJ}.$$

Сравнивая это решение с точным решением

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ},$$

находим, что ошибка при использовании только первого члена в этом случае составляет меньше $1/200$.

Тригонометрический ряд (а) особенно удобен в том случае, когда в дополнение к поперечной нагрузке балка подвергается действию продольной сжимающей или растягивающей силы. В случае балки, показанной на рис. 37, шарнир B приближается к неподвижному шарниру A при изгибе балки на величину, равную разности между длиной изогнутой оси и длиной хорды AB ¹⁾. Для пологой кривой эта разность равняется (см. т. I, стр. 157)

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (56)$$

Если величина y задана уравнением (а), то квадрат ее производной содержит члены двух видов:

$$a_n^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \quad \text{и} \quad 2a_n a_m \frac{n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

Интегрированием можно показать, что

$$\int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}; \quad \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Тогда уравнение для определения λ получится в таком виде:

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2. \quad (57)$$

¹⁾ При малых прогибах продольное относительное укорочение балки под действием осевой силы можно считать постоянным.

Для вычисления коэффициентов a_1, a_2, a_3, \dots в ряду (а) мы опять рассмотрим работу, совершенную внешними силами на бесконечно малом перемещении $da_n \sin(n\pi x/l)$ из положения равновесия. В случае, представленном на рис. 37, при таком перемещении и груз P и продольная сила S совершают работу. Перемещение λ вследствие приращения da_n коэффициента a_n увеличивается на величину

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial a_n} da_n = \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

Тогда работа, совершенная силой S , будет равна

$$S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n.$$

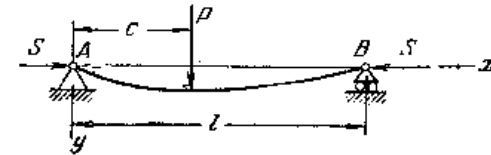


Рис. 37.

Эта работа прибавляется к работе (выражение (с)), совершенной поперечной силой, и сумма этих работ приравнивается приращению потенциальной энергии (уравнение (d)). Это дает нам следующее уравнение для определения любого коэффициента a_n в уравнении (а):

$$P \sin \frac{n\pi c}{l} da_n + S \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n = \frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{n^2 \left(n^2 - \frac{Sl^2}{EJ\pi^2} \right)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Обозначив отношение продольной силы к критическому значению осевой нагрузки (см. стр. 31) через $\alpha = Sl^2/EJ\pi^2$, получаем

$$a_n = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Подставляя это значение в уравнение (а), придаем уравнению кривой изгиба следующий вид:

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^2 (2^2 - \alpha)} \sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha)} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (58)$$

Сравнивая это с уравнением (54), выведенным для случая только поперечной нагрузки, видим, что прогиб бруса увеличивается благодаря действию продольной сжимающей силы S . Мы уже знаем, что первый член ряда (а) представляет хорошее приближенное значение для прогиба бруса; следовательно, увеличение прогиба, вызываемое продольной силой, может быть приближенно представлено отношением $1 : (1 - \alpha)$.

Это заключение также справедливо в том случае, когда действует несколько поперечных грузов в одном и том же направлении или когда на балку действует непрерывная нагрузка. Обозначая через f_0 наибольший прогиб, вызываемый действием только одной поперечной нагрузкой, мы можем с достаточной точностью предположить, что при одновременном действии

сжимающих сил S и поперечной нагрузки наибольший прогиб будет равен

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha}. \quad (59)$$

Это выражение для наибольшего прогиба можно применять также и для вычисления изгибающих моментов в сжатом стержне. Например, в случае равномерно нагруженного сжатого стержня с шарнирными концами наибольший изгибающий момент можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Sf_0}{1 - \alpha}. \quad (60)$$

Если продольная сила является растягивающей, а не сжимающей, то разобранный выше метод сохраняет силу, необходимо лишь в выражение для изогнутой оси (58) подставить $-\alpha$ вместо α . Если мы воспользуемся только первым членом в этом выражении, то для прогиба посередине получим следующую приближенную формулу:

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha}, \quad (61)$$

где f_0 означает прогиб, вызываемый только поперечными грузами. Необходимо заметить, что в случае продольных растягивающих сил α может быть больше единицы и что точность приближенного выражения (61) уменьшается с увеличением α . Например, в случае равномерно распределенной нагрузки ошибка в уравнении (61) при $\alpha = 1$ составляет приблизительно 0,3%. При $\alpha = 2$ ошибка равна 0,7% и при $\alpha = 10$ она равна 1,7%.

В случае бруса с заделанными концами для вычисления прогиба посередине пролета можно вывести следующее приближенное выражение, аналогичное выражению (61):

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\alpha}{4}}, \quad (62)$$

где f_0 есть прогиб посередине, вызываемый действием только одних поперечных нагрузок, а α имеет то же значение, что и ранее.

Применение этих приближенных формул будет показано ниже при рассмотрении прогибов тонких прямоугольных пластинок. Метод тригонометрического ряда также может быть распространен на расчет балок переменного поперечного сечения ¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь бесконечным рядом, вывести уравнение кривой изгиба балки, показанной на рис. 36, а, если на нее действует пара сил, приложенная на левом конце.

Решение. Принимая s за весьма малую величину и подставляя $Pc = M$, $\sin(\pi cs/l) \approx (\pi cs/l)$ в ряд (54), мы получим

$$y = \frac{2Ml^2}{EJ\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

2. Составить уравнение изогнутой оси свободно опертого сжатого стержня, нагруженного, как показано на рис. 38.

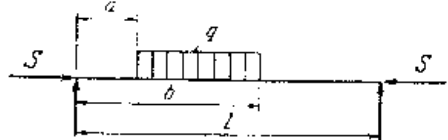


Рис. 38.

¹⁾ См. статью М. Нетенуй, J. Appl. Mech., т. 4, стр. А-49, 1937.

Ответ.
$$y = \frac{2ql^4}{EJ\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2 - \alpha)} \left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

3. Найти прогиб f конца B вертикальной колонны AB . Колонна заделана в A и нагружена в B , как показано на рис. 39.

Ответ.

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ} \frac{1}{1 - \alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{P(2l)^2}{EJ\pi^2}.$$

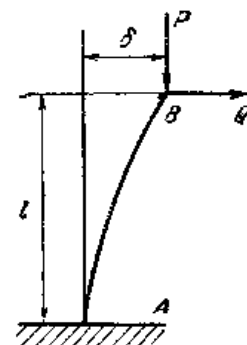


Рис. 39.

8. Прогиб брусев с малой начальной кривизной

Если брус с малой начальной кривизной изгибается только одними поперечными силами, то прогибы можно вычислять по методу, применяемому для прямого бруса. Однако условия будут совершенно иными, если имеются кроме поперечных сил еще и продольные силы. Малая начальная кривизна вносит значительное изменение в действие этих продольных сил на прогиб. Решение этой сложной задачи можно значительно упростить, используя тригонометрический ряд для представления как начальной формы кривой, так и прогибов, вызываемых изгибом ¹⁾. Предполагаем, как и ранее, что кривой брус имеет плоскость симметрии, в которой действуют внешние силы, и считаем, что этот брус свободно опирается на концах. Пусть y_0 означает начальные ординаты осевой линии бруса, измеренные от хорды, соединяющей центры тяжести концов, и y_1 — прогибы, вызываемые внешними силами, так что полные ординаты после изгиба будут равны

$$y = y_0 + y_1. \quad (a)$$

Пусть для начальной изогнутой оси мы имеем ряд

$$y_0 = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots, \quad (b)$$

и пусть прогиб, вызываемый грузом, будет

$$y_1 = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (c)$$

В этом случае можно воспользоваться тем же самым выражением (уравнение (33)) для потенциальной энергии деформации, что и для прямых брусев. Для нагрузки, показанной на рис. 37, необходимо при вычислении работы, совершенной продольными силами S , заменить величину λ (см. выражение (36)) величиной

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_0 &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{d(y_1 + y_0)}{dx} \right]^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\pi^2}{4l} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \right). \end{aligned} \quad (63)$$

¹⁾ См. статью автора, «Festschrift zum 70. Geburtstag August Föppl», Berlin, стр. 74, 1924.

Это является продольным перемещением одного конца изогнутого стержня относительно другого конца при изгибе.

Поступим так же, как и в случае прямых брусков (стр. 49) и дадим стержню бесконечно малый дополнительный прогиб $da_n \sin(n\pi x/l)$. Работа, произведенная продольными силами S при этом прогибе, равна

$$S \frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_0)}{\partial a_n} da_n = S \frac{n^2 \pi^2}{2l} (a_n + b_n) da_n.$$

Работа же, совершенная грузом P , равна

$$P \sin \frac{n\pi c}{l} da_n.$$

а приращение потенциальной энергии деформации по уравнению (53) будет

$$\frac{EJ\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n.$$

Уравнением для вычисления a_n является

$$\frac{EJ\pi^4}{2l} n^4 a_n da_n = P \sin \frac{n\pi c}{l} da_n + S \frac{n^2 \pi^2}{2l} (a_n + b_n) da_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{2Pl^3 \sin \frac{n\pi c}{l} + Sn^2 \pi^2 l^2 b_n}{EJ\pi^4 n^4 - Sn^2 \pi^2 l^2}.$$

Подставляя уравнение (с) и пользуясь обозначением $\alpha = \frac{Sl^2}{EJ\pi^2}$, получаем

$$y_1 = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left(\frac{\sin \frac{\pi c}{l} \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + \frac{\sin \frac{2\pi c}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^4 - 2^2 \alpha} + \dots \right) + \alpha \left(\frac{b_1 \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + \frac{b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}}{2^2 - \alpha} + \dots \right). \quad (64)$$

Первый член правой части уравнения (64) представляет прогиб прямого бруса (см. уравнение (58)), в то время как второй дает дополнительный прогиб благодаря начальной кривизне.

Возьмем, например, брус, который имеет начальный прогиб $y_0 = b \sin(\pi x/l)$. Наибольший прогиб будет посредине пролета и равняется b . Если на брус действуют только одни продольные силы S ($P=0$), то прогиб посредине, вызываемый этими силами, получается из уравнения (64) путем подстановки $P=0$, $b_1 = b$, $b_2 = b_3 = \dots = 0$. Тогда

$$y_1 = \frac{ab \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha}. \quad (d)$$

Полные ординаты осевой линии после изгиба будут равны

$$y = y_1 + y_0 = \frac{ab \sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha} + b \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{b}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (65)$$

Благодаря продольным сжимающим силам S ординаты осевой линии увеличиваются в отношении $1:(1-\alpha)$, т. е. увеличение ординат зависит от вели-

чины α , которая представляет собой отношение продольной силы к критической силе.

Если вместо сжимающих сил на брус действуют продольные растягивающие силы, то в предыдущие уравнения вместо α необходимо подставить $-\alpha$. В частном случае, в котором $y_0 = b \sin(\pi x/l)$, ординаты осевой линии после деформации получатся равными

$$y = \frac{b}{1 + \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (66)$$

Отсюда видно, что продольная растягивающая сила уменьшает начальные ординаты. Взяв, например, продольную силу, равную ее критическому значению ($\alpha = -1$), мы найдем $y = \frac{1}{2} b \sin \frac{\pi x}{l}$, т. е. эта продольная сила уменьшает начальные ординаты изогнутой оси бруса наполовину.

показанной на рисунке пунктиром, находятся в равновесии с силой P . Следовательно,

$$-2b \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = P.$$

Подставляя вместо σ_r его выражение (а), мы получаем $k = \frac{2}{\pi}$, и уравнение (а) становится

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi br}. \quad (67)$$

Если мы рассмотрим горизонтальную плоскость mn в расстоянии h от ребра пластинки (рис. 40), то нормальное напряжение, действующее по этой плоскости, будет

$$\sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi br} = -\frac{2P \cos^4 \theta}{\pi bh}. \quad (68)$$

Отсюда видно, что давление быстро уменьшается с увеличением угла θ . Также видно, что напряжения увеличиваются с уменьшением расстояния h . Зная напряжения, вызываемые действием одного сосредоточенного груза и пользуясь методом наложения, мы можем легко разобрать случаи, в которых действует несколько грузов.

Если сосредоточенная сила действует в середине прямоугольной балки узкого поперечного сечения высотой h , то большие напряжения вследствие концентрации, определяемые по формуле (67), накладываются на напряжения от изгиба балки, и в результате получается сложное распределение напряжений вблизи точки приложения груза. Эти неправильности в распределении напряжений, вызываемые сосредоточенным грузом, носят местный характер и имеют важное значение лишь в области, непосредственно примыкающей к точке приложения груза. Если мы рассмотрим поперечное сечение балки на расстоянии от груза большим, скажем, чем половина высоты балки, то распределение напряжений в этом поперечном сечении достаточно точно будет определяться по простой формуле для балок.

Определяя равнодействующую горизонтальных составляющих радиальных давлений $b\sigma_r d\theta$ для каждой половины очерченного пунктиром полукруга на рис. 40, а, можно показать, что сосредоточенная сила P вызывает расклинивающее действие, представленное на рис. 40, б двумя равными и противоположными силами величиной P/π . В случае балки высотой h и толщиной b эти силы, действующие на расстоянии $h/2$ от оси балки, вызывают в срединном поперечном сечении не только растягивающие напряжения, определяемые формулой

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi hb}, \quad (b)$$

ГЛАВА III

ОСОБЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК

9. Местные напряжения при изгибе балок

Элементарная формула для напряжения при изгибе в призматических стержнях дает удовлетворительные результаты только на некотором расстоянии от точки приложения груза. Вблизи этой точки будут неправильности в распределении напряжений. В случае узкого прямоугольного поперечного сечения эти неправильности можно изучить при помощи строгого решения для распределения напряжений в бесконечно большой пластинке, подверженной действию сосредоточенной силы P (рис. 40). Сила P действует в срединной плоскости пластинки и перпендикулярно ребру пластинки. В этом случае распределение напряжений является простым радиальным распределением напряжений¹⁾. Такой элемент, как показанный у точки A , подвергается простому сжатию в радиальном направлении, и напряжение будет

$$\sigma_r = -k \frac{P \cos \theta}{br}, \quad (a)$$

Рис. 40.

где r есть радиальное расстояние от точки приложения груза и b — толщина пластинки. Коэффициент k определяется из того обстоятельства, что напряжения σ_r , распределенные по длине полукруглости,

¹⁾ См. S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, New York, стр. 85, 1951. Местные напряжения в заделанных балках, подверженных действию сосредоточенной нагрузки, были изучены E. W. Parkes, Proc. Roy. Soc., A., т. 231, № 186, стр. 379—387, 1955.

но также и напряжения от изгиба, даваемые выражением

$$\sigma_x'' = -\frac{Ph y}{2\pi J_z}, \quad (c)$$

в котором $Ph/2\pi$ есть изгибающий момент, вызываемый горизонтальными силами P/π , y — расстояние от оси балки, принятое положительным вниз, и $J_z = bh^3/12$ — момент инерции поперечного сечения. Накладывая напряжения уравнений (b) и (c) на напряжения от изгиба, определяемые по обычной формуле для балок, находим, что растягивающее напряжение в наиболее удаленном волокне балки нагруженного поперечного сечения равняется

$$(\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{bh^3} + \frac{P}{\pi bh} - \frac{3P}{\pi bh} = \frac{Pl}{4} \frac{6}{bh^3} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{h}{l}\right), \quad (d)$$

Второй член в скобках представляет собой напряжение, вызываемое расклинивающим действием груза P . Видно, что в случае коротких балок это напряжение достигает значительной величины.

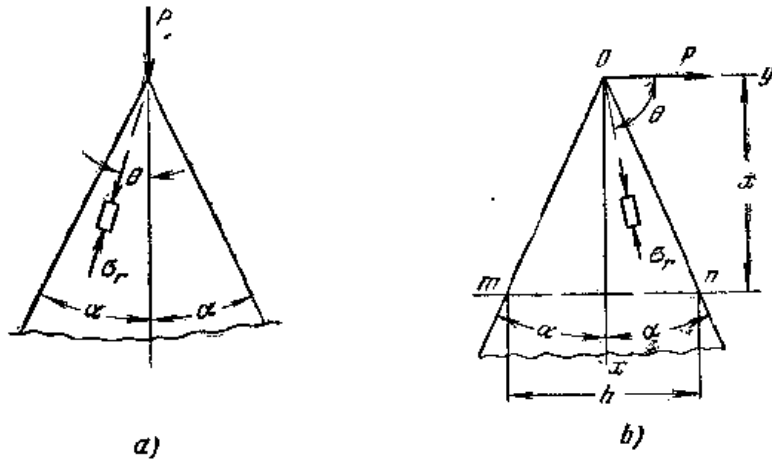


Рис. 41.

Уравнение (d) было выведено для балки узкого прямоугольного поперечного сечения, но оно может быть использовано для двутавровых балок. Предполагая, что местное действие груза P будет восприниматься полностью стенкой балки, опять получим расклинивающие силы P/π , и соответствующие напряжения будут

$$\sigma_x' = \frac{P}{\pi F}, \quad \sigma_x'' = -\frac{Ph y}{2\pi J_z},$$

где F и J_z будут соответственно представлять площадь и момент инерции поперечного сечения балки. Накладывая эти напряжения на

напряжения, определяемые по простой формуле для балок, мы получаем формулу для определения наибольшего растягивающего напряжения

$$(\sigma_x)_{y=\frac{h}{2}} = \left(\frac{Pl}{4} - \frac{Ph}{2\pi}\right) \frac{h}{2J_z} + \frac{P}{\pi F}. \quad (e)$$

Напряжение, вычисленное по этой формуле, удовлетворительно согласуется с результатами опытов¹⁾.

Чтобы исследовать местные напряжения на опорах балки узкого прямоугольного поперечного сечения, мы можем использовать известные решения²⁾ для двух случаев клина, нагруженного, как показано на рис. 41. В этих случаях опять имеем простое радиальное распределение напряжений и можем воспользоваться формулой (a) для радиального сжимающего напряжения. Постоянная k для случая сжатия клина (рис. 41, a) находится из уравнения

$$2b \int_0^{\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = 2 \int_0^{\alpha} kP \cos^2 \theta d\theta \equiv kP \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = P,$$

откуда

$$k = \frac{1}{\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}.$$

Тогда из уравнения (a) получаем напряжение

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{br \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)}. \quad (69)$$

В случае изгиба клина (рис. 41, b) угол θ опять измеряется от направления силы P , и уравнение статики становится

$$b \int_{(\pi/2)-\alpha}^{(\pi/2)+\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta = -P,$$

откуда

$$k = -\frac{1}{\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}}.$$

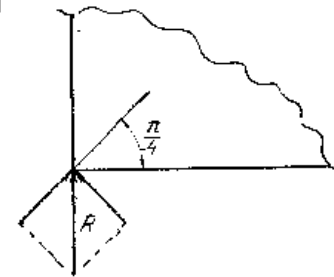


Рис. 42.

Тогда мы получаем для радиального сжимающего напряжения

¹⁾ См. статью Arnold W. Hendry, Proc. Soc. Exp. Stress. Anal., т. 7, стр. 91, 1949.

²⁾ См. Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 96, 1951.

формулу

$$\sigma_r = - \frac{P \cos \theta}{br \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)}. \quad (70)$$

Отсюда видно, что если θ больше $\pi/2$, радиальное напряжение получается положительным, т. е. растягивающим.

Объединяя два решения, по уравнениям (69) и (70) можем получить распределение радиальных напряжений у опоры прямоугольной балки (рис. 42).

10. Касательные напряжения в балках переменного поперечного сечения

Пользуясь уравнением (70) предыдущего параграфа, рассмотрим теперь напряжения от изгиба в консоли, имеющей форму клина (рис. 41, б). Взяв поперечное сечение mn , перпендикулярное оси x , получим (см. т. I, уравнения (17) и (18), стр. 41)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \sin^2 \theta = \frac{My}{J_z} \frac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^4 \theta}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_r}{2} \sin 2\theta = \frac{P}{bh} \frac{16y^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \sin^2 \theta}{h^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где

$$h = 2x \operatorname{tg} \alpha, \quad J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad M = -Px.$$

По нейтральной плоскости клина $\theta = \pi/2$ и нормальные и касательные напряжения становятся равными нулю. Наибольшие нормальные и касательные напряжения имеют место при $\theta = (\pi/2) \pm \alpha$. Они могут быть вычислены из уравнений (а), что дает

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\max} &= -\beta \frac{Mh}{2J_z}, \\ (\tau_{xy})_{\max} &= 3\beta \frac{P}{bh}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где

$$\beta = \frac{4 \operatorname{tg}^3 \alpha \cos^4 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}.$$

При $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ и 20° коэффициент β имеет соответственно значения 1,00, 0,970, 0,947 и 0,906.

Из первой формулы (b) видно, что наибольшее нормальное напряжение σ_x приблизительно такое же, какое получится на основании обычной формулы для балок, при условии, что угол α достаточно мал. При $\alpha = 20^\circ$ ошибка, получающаяся при использовании простой

формулы для балок, как это видно из значения коэффициента β , составляет приблизительно 10%. Наибольшее касательное напряжение, определяемое по второй формуле (b), приблизительно в три раза больше среднего касательного напряжения P/bh и имеет место в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Этот результат прямо противоположен полученным для призматических стержней (т. I, стр. 106). Во многих случаях практики касательные напряжения не имеют большого значения и рассматриваются лишь нормальные напряжения при изгибе. Тогда формула для определения наибольшего напряжения от изгиба, выведенная для призматических балок, может быть также использована с достаточной точностью для стержней переменного поперечного сечения при условии, что изменение поперечного сечения не является слишком резким.

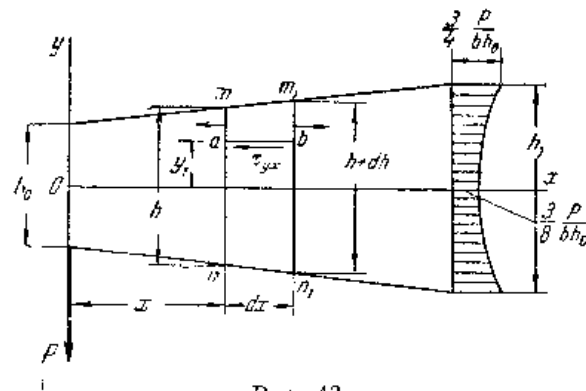


Рис. 43.

В предположении, что простая формула для балок может быть использована с достаточной точностью при вычислении нормальных напряжений от изгиба в балках переменного поперечного сечения, величина касательных напряжений в этих балках может быть вычислена при помощи метода, уже примененного для призматических балок (см. т. I, стр. 105). Предположим, что прямоугольная балка переменной высоты h и постоянной ширины b изгибается грузом P , приложенным на конце (рис. 43). Взяв два смежных поперечных сечения m_1n_1 и m_2n_2 и вырезав элемент m_1m_2ba горизонтальной плоскостью ab , найдем величину касательных напряжений τ_{yx} из уравнения равновесия этого элемента

$$b \int_{y_1}^{(h+dh)/2} (\sigma_x + d\sigma_x) dy - b \int_{y_1}^{h/2} \sigma_x dy = b\tau_{yx} dx, \quad (c)$$

где

$$\sigma_x = \frac{12Pxy}{bh^3}, \quad \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx = \frac{12Py}{b} \left[\frac{x}{h^3} + \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h^3} \right) dx \right].$$

Подставляя в уравнение (с), получаем

$$\frac{3Px}{h^3} dh + 6P \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h^3} \right) dx \left(\frac{h}{4} - y_1^2 \right) = b \tau_{yx} dx,$$

откуда

$$\tau_{yx} = \frac{3Px}{bh^3} \frac{dh}{dx} + \frac{6P}{b} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{h^3} \right). \quad (d)$$

Если h дано как некоторая функция x , то из этого уравнения можно легко вычислить τ_{yx} . Предположим, например, что h является линейной функцией x и что $h_1 = 2h_0$ (рис. 43). Тогда имеем $h = h_0(1 + x/l)$ и получаем из уравнения (d) $\tau_{yx} = \frac{6Ph_0}{bh^3} \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{y_1}{h} \right)^2 \frac{(2x-l)}{l} \right]$. Отсюда видно, что распределение касательных напряжений зависит не только от y_1 , но также и от расстояния x от нагруженного конца. При $x=0$ мы получаем распределение напряжений по параболе, как для призматической прямоугольной балки. Для заделанного конца при $x=l$ получаем

$$\tau_{yx} = \frac{3P}{8bh_0} \left(1 + \frac{y_1^2}{h_0^2} \right).$$

Это распределение напряжений показано на рис. 43 заштрихованной площадью.

Формула (d) была выведена в предположении частного случая нагружения, показанного на рис. 43. Замечая, что изгибающий момент в этом случае равен Px , и подставляя M в (d) вместо Px , получаем

$$\tau_{yx} = \frac{3M}{bh^3} \frac{dh}{dx} + \frac{6}{b} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{h^3} \right), \quad (e)$$

которое можно применить для любого нагружения балки.

11. Полезная ширина тонких полок

Формула для простого изгиба (см. т. I, уравнение (55), стр. 87) показывает, что нормальные напряжения в балке пропорциональны расстоянию от нейтральной оси. Это заключение справедливо до тех пор, пока мы имеем дело с балками, для которых размеры поперечного сечения малы по сравнению с их длиной, и до тех пор, пока мы рассматриваем точки, находящиеся на значительном расстоянии от концов балки. В практических приложениях мы иногда применяем балки с широкими полками, для которых элементарная формула балки не может быть применена с достаточной точностью. Возьмем в качестве примера случай балки, состоящей из ребра и широкой полки, как показано на рис. 44. Предполагая, что балка свободно опирается на концах и нагружена в срединной плоскости xu , мы замечаем, что имеются касательные напряжения, действующие между полками и реб-

ром по поверхностям mn (рис. 44, а) и направленные, как показано на рис. 44, б. Видно, что эти напряжения стремятся уменьшить прогиб ребра, т. е. сделать его более жестким. В то же самое время они вызывают сжатие полок. Рассматривая полку по одну сторону ребра как прямоугольную пластинку, подверженную действию касательных усилий вдоль одного края (рис. 44, в), мы видим, что сжимающие напряжения распределяются неравномерно по ширине b полки; точный анализ показывает¹⁾, что эти напряжения распределены так,

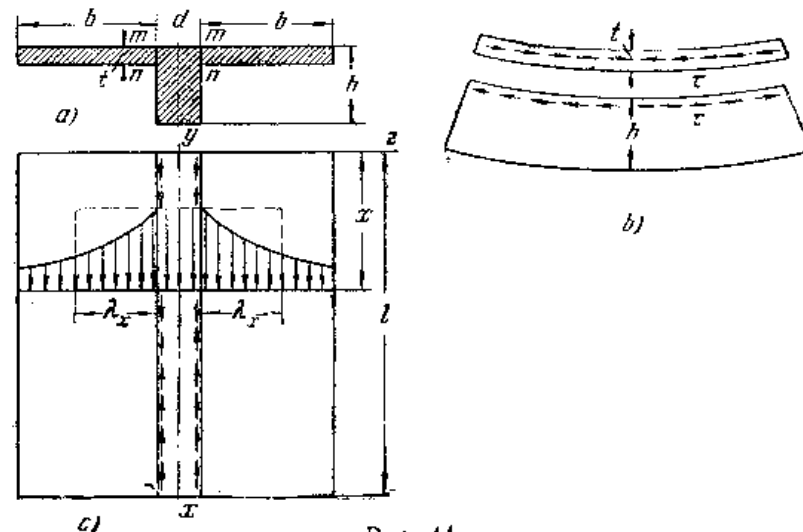


Рис. 44.

как показано на рис. 44, в, наибольшее же напряжение в полке будет таким, как в верхних волокнах ребра. Из этой неравномерности распределения напряжений можно заключить, что, применяя к балке на рис. 44, а простую формулу для наибольшего напряжения от изгиба, мы должны воспользоваться *уменьшенной шириной* $2\lambda_x$ вместо действительной ширины $2b$ двух полок, для того чтобы получить точное значение наибольшего напряжения. Эта уменьшенная ширина, обычно называемая *полезной шириной*, может быть вычислена, если известно распределение сжимающих напряжений, показанное заштрихованной площадью на рис. 44, в. Необходимо лишь сделать площадь прямоугольника, указанного на рисунке пунктиром, равной заштрихованной

¹⁾ Рассмотрение точного решения, полученного Th. v. Kármán'ом, дано в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 171, 1951. См. также W. Metzger, Luftfahrtforsch., т. 4, стр. 1, 1929; K. Girkmann, Stahlbau, т. 6, стр. 98, 1933; H. Reissner, Z. angew. Math. u. Mech., т. 14, стр. 312, 1934; E. Reissner, Stahlbau, т. 7, стр. 206, 1934; E. Chwalla, Stahlbau, т. 9, стр. 73, 1936; L. Beschkinе, Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., т. 5, стр. 65, 1937—1938.

площади. Величина $2\lambda_x$ обычно изменяется по пролету балки, так как она зависит от размеров балки, а также от формы эпюры изгибающих моментов.

В частном случае, когда ширина полки весьма велика, скажем $2b \gg l$, и эпюра изгибающих моментов представлена синусоидой

$$M = M_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (a)$$

уменьшенная ширина становится постоянной и равной

$$2\lambda_x = \frac{4l}{\pi(1+\mu)(3-\mu)},$$

где μ — коэффициент Пуассона. При $\mu = 0,3$ мы получаем

$$2\lambda_x = 0,363l. \quad (71)$$

Следовательно, в этом частном случае действительная балка может быть заменена эквивалентной тавровой балкой постоянного поперечного сечения и с шириной двух полок, равной $0,363l$. Применяя к этой балке простую формулу, мы получаем такое же наибольшее напряжение, как и для действительной балки.

В общем случае поперечной нагрузки эпюра изгибающих моментов может быть представлена синусоидальным рядом

$$M_x = \sum M_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (b)$$

где коэффициенты M_n могут быть вычислены в каждом частном случае по известной формуле¹⁾

$$M_n = \frac{2}{l} \int_0^l M_x \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (c)$$

В случае равномерной нагрузки, например, мы имеем $M_x = \frac{qx(l-x)}{2}$, и формула (c) дает

$$M_n = \frac{4ql^2}{n^3\pi^3}, \quad (d)$$

где $n = 1, 3, 5, \dots$

Имея коэффициенты M_n для ряда (b), мы получаем полезную ширину из точного решения, которое в случае большой ширины полок дает

$$\frac{l}{2\lambda_x} = \beta \left[\sum_{n=1,3,5} \frac{M_n}{4 + (k/\beta)n\pi} - 4 \right], \quad (72)$$

¹⁾ См. п. 7.

где $\beta = tl/dh$ есть отношение площади tl к площади поперечного сечения ребра и

$$k = \frac{(1+\mu)(3-\mu)}{4} = 0,878 \quad \text{при} \quad \mu = 0,3.$$

Взяв, например, случай балки с равномерно распределенной нагрузкой и подставив уравнение (d) вместо M_n в формулу (72), мы найдем, что для различных значений отношения β изменение полезной ширины по длине балки такое, как показано на рис. 45. Видно, что в средней части пролета полезная ширина изменяется очень мало и является приблизительно такой же, как в синусоидальной эпюре изгибающих моментов (см. формулу (71)). Если полезная ширина найдена из формулы (72), то наибольшее напряжение и наибольший прогиб найдутся при помощи простой формулы для эквивалентной балки.

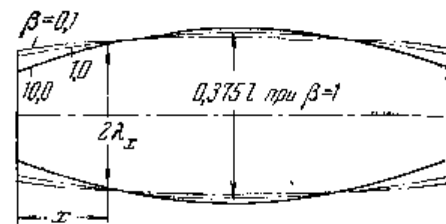


Рис. 45.

Мы рассмотрели случай, в котором полки балки имеют очень большую ширину. Имеются также точные решения для случая, в котором полки не очень широки, а также для случая длинной прямоугольной плиты, усиленной системой одинаковых и равноотстоящих друг от друга ребер. Во всех этих случаях задача сводится к вычислению напряжений и прогибов в эквивалентной балке¹⁾.

Задача такого же общего характера, как и разобранный выше, имеет место при проектировании самолетов. Рассмотрим коробчатую балку (рис. 46), образованную двумя швеллерами, к полкам которых прикреплены заклепками или сваркой два тонких листа. Если такая балка заделана на левом конце и нагружена, как консоль, двумя силами, приложенными к швеллерам на другом конце, то элементарная теория изгиба даст растягивающие напряжения от изгиба в листе ABCD, равномерно распределенные по любому поперечному сечению, параллельному BC. Однако в действительности лист воспринимает, как указано на рис. 46, растягивающие напряжения, вызываемые касательными напряжениями, которые передаются швеллерами его краям. При этом распределение растягивающих напряжений по ширине листа не будет равномерным; они будут большими на краях, чем в середине. Это отклонение от равномерного распределения

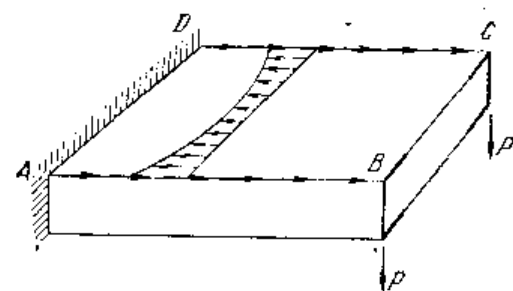


Рис. 46.

¹⁾ Эти точные решения нашли применение в технических условиях для бетонных плит, усиленных ребрами. При проектировании самолетов наличие неравномерного распределения напряжений в широких полках учитывается путем применения приближенной теории, которая изложена в статьях P. Kuhn'a, Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Repts, № 608, 1937 и № 636, 1938. См. также П. Ebnег, Luftfahrtforsch., т. 14, стр. 93, 1937 и т. 15, стр. 527, 1938.

напряжений, предполагаемого по элементарной теории, известно как запаздывающий сдвиг, так как оно включает деформацию сдвига в листах. Задача была решена на основании рассмотрения энергии деформации при некоторых упрощающих допущениях¹⁾.

12. Ограничения метода наложения

При рассмотрении изгиба балок было показано, что вычисление прогибов можно значительно упростить с помощью метода наложения (см. т. I, стр. 143). Этот метод может быть использован при условии, что изгиб балки не вносит каких-либо изменений в действие внешних сил. Например, малые прогибы балки от поперечных нагрузок не изменяют эпюры изгибающих моментов от этих нагрузок, и метод наложения может быть успешно использован. Но если мы имеем изгиб совместный с осевым растяжением или сжатием, то прогиб, производимый поперечными нагрузками, изменяет действие осевых сил, и последние вызывают не только осевое растяжение или сжатие, но также и некоторый дополнительный изгиб. В таких случаях, как мы уже видели (п. 4), накладываются некоторые ограничения на метод наложения; мы можем использовать этот метод только в отношении поперечных нагрузок, предполагая, что осевая сила всегда остается постоянной. Имеются другие случаи, в которые малые прогибы балки могут вносить значительные изменения в действие сил. В таких случаях метод наложения неприменим. Некоторые примеры такого рода будут теперь обсуждены.

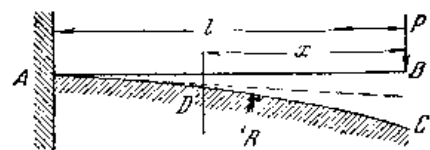


Рис. 47.

В качестве первого примера рассмотрим такой изгиб консоли AB (рис. 47), в процессе которого происходит постепенное прикосание консоли с жесткой цилиндрической опорой поверхности AC , имеющей постоянную кривизну $1/R$ и горизонтальную касательную в точке A . Очевидно, если кривизна балки на конце A , даваемая формулой

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_z} = \frac{Pl}{EJ_z}, \quad (a)$$

меньше, чем кривизна опоры $1/R$, консоль будет касаться поверхности AC только в точке A , и прогиб f на конце B будет дан известной формулой

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ_z}. \quad (b)$$

¹⁾ См. статьи E. Reissner's, Quart. Appl. Math. т. 4, стр. 268, 1946; J. Hadji-Arghyris, Aeronaut. Research Council (Brit.) Repts. and Mem., № 2038, 1944; J. Hadji-Arghyris and H. L. Cox, там же, № 1969, 1944. В этих статьях даны ссылки на ранее опубликованные статьи.

Из уравнения

$$\frac{1}{r} = \frac{Pl}{EJ_z} = \frac{1}{R} \quad (c)$$

мы можем получить предельное значение груза P , при котором балка начинает приходить в соприкосание с цилиндрической опорой поверхностью за точкой A . Пусть $P_1 = EJ_z/R$ будет таким предельным значением груза; тогда при $P > P_1$ часть AD балки будет опираться, как указано на рис. 47 пунктиром. Длина x непогнутой части консоли получается из условия, что в точке D кривизна $1/r$ балки равна кривизне опорной поверхности; следовательно,

$$\frac{Px}{EJ_z} = \frac{1}{R},$$

и мы получаем

$$x = \frac{EJ_z}{PR}. \quad (d)$$

Полный прогиб на конце B консоли состоит из трех частей: 1) из прогиба части DB балки как простой консоли, который равняется

$$f_1 = \frac{Px^3}{3EJ_z} = \frac{(EJ_z)^2}{3P^2R^2}; \quad (e)$$

2) из прогиба вследствие наклона касательной в точке D , который равняется

$$f_2 = \frac{x(l-x)}{R} = \frac{EJ_z}{PR^2} \left(l - \frac{EJ_z}{PR} \right), \quad (f)$$

и 3) из прогиба, представляющего расстояние точки D от горизонтальной касательной в точке A , который равняется

$$f_3 \approx \frac{(l-x)^2}{2R} = \frac{\left(l - \frac{EJ_z}{PR} \right)^2}{2R}. \quad (g)$$

Складывая эти три части, получаем полный прогиб:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{l^3}{2R} - \frac{1}{6} \frac{(EJ_z)^2}{P^2R^3}. \quad (h)$$

Это выражение для прогиба должно быть использовано вместо уравнения (b), если P больше предельного значения $P_1 = EJ_z/R$. Заметим, что прогиб теперь уже не пропорционален P . Если в дополнение к P имеется груз Q , приложенный на конце B консоли, то полный прогиб не будет равен сумме прогибов, вызываемых грузами P и Q , если оба груза рассматривать действующими отдельно. Следовательно, метод наложения в этом случае неприменим.

В качестве второго примера рассмотрим случай равномерно нагруженной балки с заделанными концами, как показано на рис. 48. Предполагается, что при изгибе средний участок балки опирается на

жесткое горизонтальное основание так, что на этом участке прогиб постоянен и равен f . Видно, что если прогиб в середине меньше чем f , то мы имеем обычный случай изгиба балки с заделанными концами.

Предельное значение q_1 интенсивности нагрузки получается из известного уравнения

$$\frac{1}{384} \frac{q_1 l^4}{EJ_z} = f. \quad (i)$$

Для нагрузки интенсивности q_1 балка точно касается горизонтального основания в средней точке. С дальнейшим увеличением нагрузки q появляется реакция $2X$ в точке контакта. Величина реакции может быть определена из уравнения

$$\frac{q l^3}{384 EJ_z} - \frac{2X l^3}{192 EJ_z} = f. \quad (j)$$

Это условие сохраняется до значения q_2 нагрузки, когда изгибающий момент и кривизна посредине балки обращаются в нуль. Значение q_2 можно найти из уравнения

$$\frac{q_2 l^3}{24} - \frac{2X l}{8} = 0, \quad (k)$$

которое дает

$$2X = \frac{q_2 l}{3}.$$

Подставляя это значение в уравнение (j), мы получаем

$$\frac{1}{3} \frac{q_2 l^3}{384 EJ_z} = f. \quad (l)$$

Сравнивая это с уравнением (i), мы находим, что $q_2 = 3q_1$. При интенсивности нагрузки, равной q_2 , элемент балки в середине становится прямым и касается горизонтального основания.

При интенсивности нагрузки большей чем q_2 участок CD балки будет опираться на основание, как показано на рис. 48. Эта часть остается прямой, она не имеет изгибающих моментов, а ее нагрузка уравновешивается равномерно распределенной реакцией. Вместе с тем на концах C и D сосредоточенные реакции X будут действовать на неподпертое основание участка и балки. Длина a этих участков балки и величина X сосредоточенных реакций могут быть получены путем рассмотрения участка AC балки как консоли с равномерной нагрузкой q и с сосредоточенным грузом X на конце. Замечая, что поперечное сечение в C не поворачивается при изгибе, и пользуясь

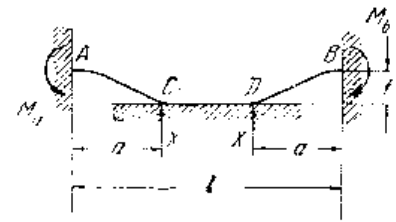


Рис. 48.

уравнениям (94) и (100) из т. I (стр. 134 и 135), получаем

$$\frac{q a^3}{6 EJ_z} = \frac{X a^2}{2 EJ_z},$$

откуда

$$X = \frac{q a}{3}. \quad (m)$$

Другое уравнение получится из того условия, что прогиб в C равняется f . Пользуясь известными формулами для прогиба консолей, получаем

$$\frac{q a^4}{8 EJ_z} - \frac{X a^3}{3 EJ_z} = f. \quad (n)$$

Решая уравнения (m) и (n), мы находим

$$a = \sqrt[4]{\frac{72 f EJ_z}{q}}, \quad X = \sqrt[4]{\frac{8 f EJ_z q^3}{9}}. \quad (o)$$

Отсюда непосредственно видно, что реакция X непропорциональна нагрузке. Численно наибольший изгибающий момент, который имеет место в заделанных концах, получается из уравнения

$$|M_a| = |M_b| = \frac{q a^2}{2} - X a,$$

которое дает

$$M_a = \frac{q a^2}{6} = \sqrt{2 f EJ_z q}. \quad (p)$$

Мы снова видим, что изгибающий момент не увеличивается в таком же отношении, как нагрузка. Следовательно, метод наложения не может быть применен.

ЗАДАЧИ

1. Найти прогиб консоли, показанный на рис. 47, если имеется равномерно распределенная нагрузка q вместо силы P .

2. Найти выражение для прогиба в центре балки, нагруженной посредине силой P (рис. 49) и опертой на две одинаковые цилиндрические поверхности радиуса R .

Решение. Когда груз P увеличивается, точки соприкосновения балки с опорными поверхностями перемещаются внутрь и пролет уменьшается; следовательно, прогиб увеличивается в меньшей степени, чем груз P . Угол α , определяющий положения точек соприкосновения, найдется из того условия, что в этих точках изогнутая ось касательна к опорным поверхностям; следовательно, для малых значений α имеем

$$a = \frac{P(l - 2R\alpha)^2}{16 EJ_z}.$$

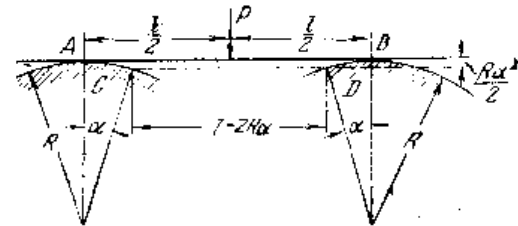


Рис. 49.

Имея α , мы получаем прогиб посредине пролета из уравнения

$$f = \frac{P(l - 2R\alpha)^3}{48EJ_z} - \frac{R\alpha^3}{2}.$$

3. Решить предыдущую задачу, предполагая, что балка заделана в точках A и B .

4. Решить задачу 2, если груз приложен не посредине пролета AB .

5. Длинная, равномерно нагруженная балка опирается на горизонтальное жесткое основание (рис. 50). Найти угол α поворота конца A и длину x , которая будет изгибаться моментом M_0 , приложенным на конце.

Решение. Длина x найдется из уравнения

$$\frac{qx^3}{24EJ} = \frac{M_0x}{6EJ}.$$

Рис. 50.

Угол поворота на конце A равняется

$$\alpha = \frac{M_0x}{3EJ} - \frac{qx^3}{24EJ}.$$

6. Вертикальная сила P приложена к концу A призматического стержня AB , опертго по всей длине на горизонтальную жесткую плоскость (рис. 51). Исследовать изгиб бруса, предполагая, что P меньше, чем половина веса ql бруса.

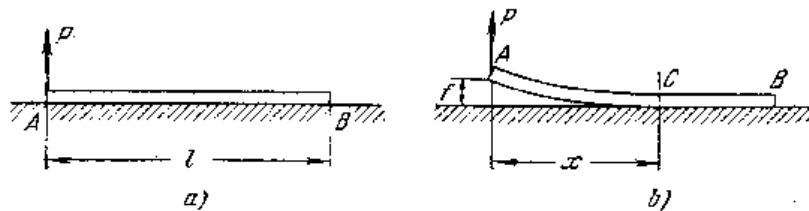


Рис. 51.

Решение. Участок BC бруса (рис. 51, б) остается прямым и изгибающий момент в сечении C равняется нулю. Следовательно, длина x участка AC бруса, подверженного изгибу, найдется из уравнения

$$\frac{qx^2}{2} = Px,$$

$$x = \frac{2P}{q}.$$

В точке C будет действовать сосредоточенная вертикальная реакция, равная P , и участок AC бруса находится в тех же условиях, что и равномерно нагруженная балка с пролетом x . Прогиб конца A бруса равняется

$$f = \frac{qx^4}{24EJ_z}.$$

ГЛАВА IV

ТОНКИЕ ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

13. Изгиб пластинки по цилиндрической поверхности

Предположим, что прямоугольная пластинка постоянной толщины h изгибается по цилиндрической поверхности (рис. 52)¹⁾. В таком случае достаточно рассмотреть лишь одну полоску шириной единица, подобную AB , как балку прямоугольного поперечного сечения длиной l . Из условия непрерывности деформаций можно заключить, что при

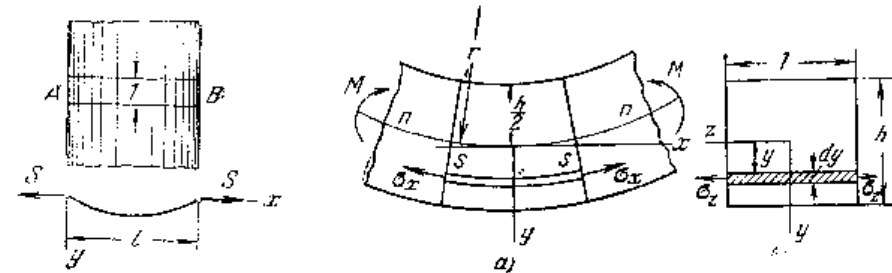


Рис. 52.

Рис. 53.

изгибе в поперечном сечении полоски не будет такого искажения, как показано на рис. 82, б т. I, стр. 86. Следовательно, волокно, равное по длине полоске, как, например, ss (рис. 53), испытывает не только продольное растягивающее напряжение σ_x , но также растягивающее напряжение σ_z в поперечном направлении, которое должно быть таким, чтобы воспринять поперечному сокращению волокна. Мы предполагаем, как и прежде (см. т. I, стр. 85), что поперечные сечения полоски остаются плоскими при изгибе. Следовательно, относительные удлинения в направлении осей x и z соответственно будут равны $\epsilon_x = \frac{y}{r}$; $\epsilon_z = 0$. Тогда соответствующие напряжения в направлении

¹⁾ Такой изгиб имеет место в случае длинных прямоугольных пластинок, если действующие силы не изменяются по длине пластинки и если рассматривается участок пластинки, удаленный на достаточное расстояние от концов.

осей x и z получатся, как в случае растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. При помощи уравнений (38) т. I, стр. 55, мы находим

$$\sigma_x = \frac{\epsilon_x E}{1 - \mu^2} = \frac{E y}{(1 - \mu^2) r}, \quad \sigma_z = \frac{\mu \epsilon_x E}{1 - \mu^2} = \frac{\mu E y}{(1 - \mu^2) r}.$$

Теперь мы поступим так же, как в случае изгиба бруса, и вычислим изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении полоски. Тогда

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y dy = \frac{E}{(1 - \mu^2) r} \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2) r},$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D}, \quad (73)$$

где

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (74)$$

Эта величина называется *жесткостью при изгибе пластинки* и соответствует величине EJ_z , которая применялась при рассмотрении изгиба балок. Сравнение выражения (73) для полоски с выражением (56) т. I, стр. 88, для бруса показывает, что жесткость полоски в пластинке больше, чем жесткость отдельного бруса такого же поперечного сечения в отношении $1:(1 - \mu^2)$.

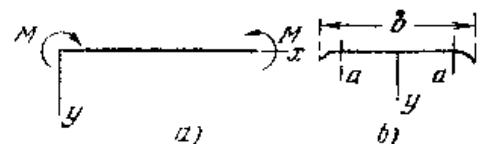


Рис. 54.

Эксперименты показывают, что в случае изгиба отдельной тонкой

полоски большой ширины b имеет место искажение поперечного сечения лишь вблизи краев (рис. 54, *b*), а средний участок aa полоски изгибается по поверхности цилиндра¹⁾; следовательно, уравнение (73) применимо при вычислении прогибов, и полоска будет обладать большей жесткостью, чем следовало бы ожидать из простой формулы для балок.

При малых прогибах полоски AB (рис. 52) кривизна $1/r$ может быть заменена ее приближенным значением d^2y/dx^2 и дифференциальное уравнение изогнутой оси полоски будет

$$D \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (75)$$

Исследование пластинки, изгибающейся по цилиндрической поверхности, заключается в интегрировании этого уравнения. Частный случай, в котором изгиб по цилиндрической поверхности вызывается равномерно распределенной нагрузкой, рассматривается в следующем параграфе.

14. Изгиб длинной, равномерно нагруженной прямоугольной пластинки

Если прямоугольная пластинка, длина которой велика по сравнению с ее шириной, равномерно нагружена, то можно предположить, что вблизи центра, где имеют место наибольший прогиб и напряжения, изогнутая поверхность является приблизительно цилиндрической и для вычисления прогибов¹⁾ можно воспользоваться уравнением (75). Рассмотрим эту важную задачу²⁾ для двух крайних условий: 1) края пластинки свободно оперты и могут свободно поворачиваться при изгибе и 2) края заделаны. В обоих случаях предполагается, что нет перемещений краев в плоскости пластинки. Тогда элементарная полоска, подобная AB на рис. 52, находится в тех же условиях, что и растянутый стержень с равномерной поперечной нагрузкой (см. п. 6) и растягивающими усилиями S . Величина усилий S найдется из того условия, что удлинение полоски равно разности между длиной изогнутой оси и длиной l хорды AB (рис. 52).

Свободно опертые края. В случае свободно опертых краев хорошее приближенное значение для S получается при допущении, что изогнутая ось представляет собой синусоиду

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (a)$$

где f означает прогиб посередине. Тогда по выражению (56) стр. 48 удлинение осевой линии полоски будет

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (b)$$

Взяв для прогиба посередине приближенное уравнение (61), мы имеем

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha}, \quad (c)$$

где

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{D} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{S}{S_{кр}} = \frac{S l^2}{\pi^2 D}. \quad (76)$$

Подставляя в уравнение (b), получаем

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \frac{f_0^2}{(1 + \alpha)^2}. \quad (d)$$

¹⁾ Если длина в три раза больше ширины для свободно опертой пластинки и в два раза больше ширины для пластинки с заделанными краями, решение, выведенное при этом предположении, достаточно точно.

²⁾ Решение задачи было дано И. Г. Бубновым. См. его книгу «Строительная механика корабля». С.-Петербург, т. 2, стр. 545, 1914. Рассмотрение этой задачи вместе с определением напряжений в обшивке корабля дано в книге S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, New York, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963.

¹⁾ Объяснение этого явления дано G. F. C. Searle, Experimental Elasticity, Cambridge, 1908. См. также H. Lamb, London Proc. Math. Soc., т. 21, стр. 70, 1891 и статью автора Mech. Engng., стр. 259, 1923.

Поперечное сужение полоски в плоскости пластинки при изгибе предполагается равным нулю, следовательно, при помощи выражений (74) и (76) удлинение осевой линии полоски, вызываемое усилиями S , определяется так:

$$\lambda = \frac{Sl(1 - \mu^2)}{Eh} = \frac{\pi^2 \alpha h^2}{12l}. \quad (1e)$$

Приравняв (d) и (e), получаем уравнение для определения α и, следовательно, продольного усилия S в следующем виде:

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2}. \quad (77)$$

Если даны нагрузка q и размеры пластинки, то правая часть уравнения (77) может быть легко вычислена. Решение уравнения (77) можно упростить, положив

$$1 + \alpha = x. \quad (f)$$

Тогда это уравнение обращается в

$$x^3 - x^2 = \frac{3f_0^2}{h^2},$$

т. е. величина x такова, что разность между ее кубом и ее квадратом имеет известное значение. Таким образом, x можно определить при помощи логарифмической линейки или соответствующей таблицы, а величина α найдется из уравнения (f). Прогиб же и напряжения в полоске AB можно затем вычислить при помощи табл. 4, составленной для растянутых стержней с поперечной нагрузкой (см. стр. 43). При пользовании этой таблицей необходимо помнить, что на основании формул (23) и (76) имеем

$$u = \frac{\rho l}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}. \quad (78)$$

Возьмем, например, стальную пластинку, имеющую размеры $l = 120$ см и $h = 1$ см и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 0,7$ кг/см². Тогда уравнение (77) получится в таком виде:

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 320, \quad (g)$$

откуда

$$\alpha = 6,19 \quad \text{и} \quad u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,91.$$

Растягивающие напряжения, возникающие от продольной силы S , равняются

$$\sigma'_x = \frac{S}{h} = \frac{\alpha S_{кр}}{h} = \frac{\alpha \pi^2 D}{hl^2} = 777 \text{ кг/см}^2,$$

а наибольший изгибающий момент по середине полоски на основании уравнения (45) равняется

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} \psi_1(u). \quad (h)$$

Опять пользуясь табл. 4, мы находим путем интерполяции, что для $u = 3,91$ $\psi_1(u) = 0,126$. Это показывает, что благодаря действию продольной силы S изгибающий момент значительно уменьшается и составляет лишь около 13% момента, который возникает под действием одной только поперечной нагрузки. Пользуясь формулой (b), находим

$$M_{\max} = \frac{0,7 \cdot 120^2}{8} \cdot 0,126 = 159 \text{ кг см.}$$

Соответствующие наибольшие напряжения изгиба будут

$$\sigma''_x = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 159}{1^2} = 954 \text{ кг/см}^2.$$

Складывая напряжения от растяжения и от изгиба, получаем наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \sigma'_x + \sigma''_x = 777 + 954 = 1731 \text{ кг/см}^2$.

Можно видеть, что благодаря действию продольной силы наибольшие напряжения возрастают непропорционально интенсивности нагрузки. Например, если в вышеприведенном численном примере мы примем $q = 1,4$ кг/см², то из уравнения (g) получим

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 320 \cdot 4 = 1280,$$

откуда $\alpha = 10,2$ и $u = 5,02$.

Растягивающие напряжения, возникающие от продольной силы S , равняются $\sigma'_x = \frac{S}{h} = 1280$ кг/см², и из таблицы при $u = 5,02$ находим $\psi_1(u) = 0,078$.

Тогда наибольшее напряжение от изгиба будет

$$\sigma''_x = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{6 \cdot 1,4 \cdot 120^2}{3 \cdot 1^2} \cdot 0,078 = 1180 \text{ кг/см}^2,$$

и полное наибольшее напряжение будет равняться

$$\sigma_{\max} = \sigma'_x + \sigma''_x = 1280 + 1180 = 2460 \text{ кг/см}^2.$$

Иными словами, благодаря действию продольных сил S напряжения возрастают гораздо медленнее нагрузки. В том случае, когда нагрузка удваивается, наибольшее напряжение увеличивается лишь на 42%.

Защемленные края. В случае защемленных краев уравнение (a) заменяется уравнением ¹⁾

$$y = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad (i)$$

которое удовлетворяет условиям на защемленных краях, так как прогиб y и угол наклона касательной dy/dx равняются нулю при $x=0$ и $x=l$. Подставляя (i) в выражение (b), получаем удлинение оси полоски

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 f^2}{4l}. \quad (j)$$

Для определения прогиба по середине воспользуемся приближенным уравнением (52)

$$f = \frac{f_0}{1 + \alpha/4}$$

и по формулам (i) и (e) находим следующее уравнение для определения α

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = \frac{3f_0^2}{h^2}. \quad (79)$$

¹⁾ См. статью автора, цит. на стр. 45.

или, полагая $1 - \nu(\alpha/4) = x$, получаем

$$x^3 - x^2 = \frac{3}{4} \frac{f_0^2}{h^2}. \quad (k)$$

В предыдущем численном примере при $q = 0,7 \text{ кг/см}^2$ уравнение (k) дает $x^3 - x^2 = 3,20$, откуда $x = 1,89$ и $\alpha = 3,56$. Следовательно, растягивающая сила меньше, чем в рассмотренном выше случае пластинки с опертными краями, в отношении 3,56/6,19, и мы получаем

$$\sigma_x^* = \frac{3,56}{6,19} \times 777 = 447 \text{ кг/см}^2.$$

При вычислении напряжений от изгиба пользуемся табл. 4 на стр. 43. Замечая, что в нашем случае $u = (\pi/2) \sqrt{\alpha} = 2,97$, находим из таблицы путем

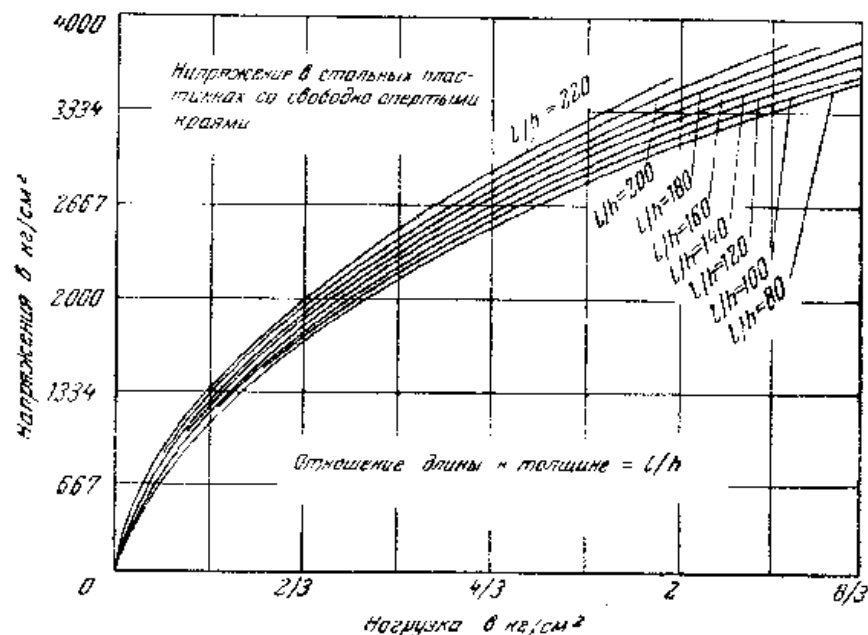


Рис. 55.

интерполяции $\psi_2 = 0,678$, $\psi_3 = 0,473$. Изгибающий момент в защемленных концах будет

$$M = -0,678 \frac{q l^3}{12} = -568 \text{ кг см},$$

а соответствующее наибольшее напряжение $\sigma_x^* = 3408 \text{ кг/см}^2$. Полное наибольшее напряжение будет ¹⁾

$$\sigma_{\max} = \sigma_x^* + \sigma_x^* = 447 + 3408 = 3855 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Предполагается, что сталь имеет предел пропорциональности выше вычисленного напряжения.

Сравнивая это напряжение с полученным выше напряжением для той же пластинки со свободно опертными краями, мы видим, что заделка краев увеличивает наибольшее напряжение. Это обстоятельство можно объяснить следующим образом: благодаря заделке краев прогиб пластинки уменьшается, вследствие чего уменьшается продольная сила S , а также и ее влияние на изгибающий момент. В случае свободно опертых краев наибольший изгибающий момент составляет лишь 0,131 от момента, вызываемого только одной поперечной нагрузкой. В случае же защемленных краев изгибающий момент на этих краях составляет 0,636 от момента, вызываемого поперечной нагрузкой, т. е. влияние продольной силы в случае опертых краев сказывается гораздо сильнее.

Этим приближенным методом можно пользоваться при вычислении напряжений в обшивке судов, подверженной гидростатическому давлению.

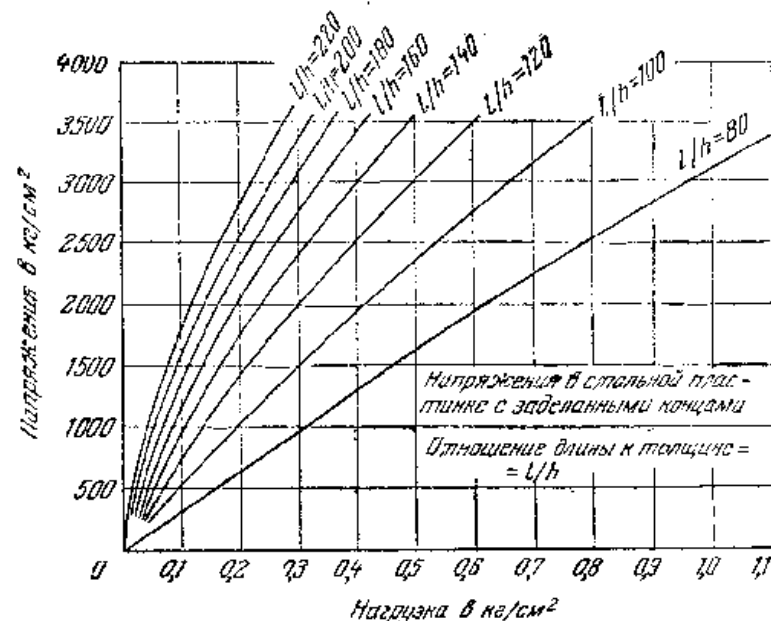


Рис. 56.

Наибольшее напряжение, очевидно, зависит от интенсивности нагрузки q и от отношения l/h . Величина этого напряжения для случая пластинки со свободно опертными краями и для различных значений отношения l/h представлена кривыми ¹⁾ на рис. 55. Видно, что благодаря наличию растягивающих сил S , которые увеличиваются с увеличением нагрузки, наибольшее напряжение непропорционально нагрузке q .

На рис. 56 даны кривые для наибольшего напряжения в случае пластинки с защемленными краями. Видно, что для малых значений интенсивности нагрузки q , когда влияние осевой силы на прогибы полоски мало, наибольшее напряжение увеличивается приблизительно в том же отношении, в каком увеличивается q . Но для больших значений q соотношение между нагрузкой и наибольшим напряжением становится нелинейным.

¹⁾ Эти кривые взяты из статьи S. Waу, представленной на собрании отдела прикладной механики A. S. M. E., New Haven, июнь 1932.

15. Изгиб длинных прямоугольных пластинок, имеющих первоначальную малую цилиндрическую кривизну ¹⁾

В этой задаче мы можем воспользоваться результатами, уже полученными для изгиба стержней с малой начальной кривизной (стр. 51). Край пластинки предполагается свободно опертым, а координатные оси и элементарная полоска взяты, как показано на рис. 52. Пусть

$$y_0 = b \sin \frac{\pi x}{l} \quad (a)$$

представляет малый начальный прогиб пластинки с наибольшим прогибом по середине, равным b . Если приложена равномерная нагрузка q , то вызывается дополнительный прогиб, сопровождаемый растяжением *средней поверхности* ²⁾ пластинки. Пусть S , как и прежде, означает растягивающие усилия в полоске AB шириной единица, а α — отношение этой силы к критической силе $S_{кр} = \pi^2 D / l^2$. Тогда дополнительный прогиб, возникающий от нагрузки q , будет равняться

$$y_1 = \frac{f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (b)$$

Первый член правой части представляет собой приближенное выражение для прогиба прямолинейной полоски, которой ранее пользовались для плоских пластинок; второй член выражает влияние начальной кривизны (см. уравнение (d), стр. 52). Складывая уравнения (a) и (b), получаем полный прогиб оси

$$y = y_0 + y_1 = b \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{b+f_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (c)$$

Величина α определяется из рассмотрения растяжения полоски AB . Пользуясь теми же рассуждениями, что и в п. 14, получаем следующее выражение для ее удлинения:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 dx.$$

Подставляя (a) и (c) вместо y_0 и y и интегрируя, находим

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{b+f_0}{1+\alpha} \right)^2 - b^2 \right].$$

Полагая эту величину равной удлинению, вызываемому продольной силой S (выражение (e) п. 14, стр. 72), получаем:

$$\frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{b+f_0}{1+\alpha} \right)^2 - b^2 \right] = \frac{\pi^2 a h^2}{12l}$$

или

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 3 \left(\frac{b+f_0}{h} \right)^2 - 3 \frac{b^2}{h^2} (1+\alpha)^2 \quad (80)$$

При $b=0$ это уравнение приводится к уравнению (77) для плоской пластинки.

В качестве примера возьмем стальную пластинку таких же размеров, как в п. 14:

$$l = 120 \text{ см}, \quad h = 1 \text{ см}; \quad q = 0,7 \text{ кг/см}^2 \quad \text{и} \quad b = 1 \text{ см}.$$

¹⁾ См. статью автора, цит. на стр. 51.

²⁾ Средняя поверхность есть поверхность, делящая пополам расстояние между верхней и нижней поверхностями пластинки.

Тогда

$$f_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{D} = 10,22 \text{ см},$$

и из уравнения (80) получается

$$\alpha(1+\alpha)^2 = 377,4 - 3(1+\alpha)^2 \quad (d)$$

Пусть по-прежнему

$$1+\alpha = x;$$

тогда $x^3 + 2x^2 = 377,4$, откуда $x = 6,61$, $\alpha = 5,61$. Растягивающее напряжение, возникающее от продольной силы S , будет

$$\sigma_x = \frac{S}{h} = \frac{\pi^2 D}{hl^2} = 704 \text{ кг/см}^2.$$

Это напряжение несколько меньше соответствующего напряжения для плоской пластинки (см. стр. 72).

При вычислении напряжения от изгиба необходимо обратить внимание на то, что прогиб, определяемый уравнением (b), состоит из двух частей. Первая часть представляет прогиб для плоской пластинки, а вторая часть $-\frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}$ выражает влияние начальной кривизны. Наибольшее напряжение от изгиба, соответствующее первой части прогиба, при $\alpha = 5,61$; $\mu = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,72$; $\psi_1 = 0,138$ (из табл. 4, стр. 44) будет равно 1043 кг/см^2 .

Изгибающий момент, соответствующий второй части прогиба, равен

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \left(-\frac{ab}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} \right) = -\frac{\pi^2 b D}{(1+\alpha) l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (e)$$

Этот момент имеет отрицательный знак, и соответствующее ему наибольшее сжимающее напряжение, которое необходимо вычесть из напряжения, найденного для плоской пластинки, будет равняться

$$-\frac{6}{h^2} \frac{\pi^2 b D}{(1+\alpha) l^2} = -639 \text{ кг/см}^2.$$

Складывая это напряжение с напряжением σ_x и напряжением от изгиба, равным 1043 кг/см^2 , вычисленным как для плоской пластинки, находим полное напряжение

$$\sigma_x = 704 + 1043 - 639 = 1108 \text{ кг/см}^2.$$

Сравнивая эти результаты с результатами, полученными для плоской пластинки, мы видим, что растягивающие силы S здесь несколько уменьшаются, а напряжения от изгиба по середине будут гораздо меньше вследствие отрицательного знака изгибающего момента (уравнение (e)). Влияние начальной кривизны сводится к уменьшению результирующего напряжения с 1747 кг/см^2 до 1108 кг/см^2 . Этот результат получается для пластинки, имеющей первоначальный прогиб по середине, равный ее толщине. При увеличении начального искривления наибольшее напряжение можно уменьшить значительно.

16. Чистый изгиб в двух перпендикулярных направлениях

Рассмотрим сначала прямоугольную пластинку, которая изгибается моментами, равномерно распределенными по ее краям (рис. 57). Обозначим через M_1 изгибающий момент, приходящийся на единицу длины края, параллельного оси y , и через M_2 изгибающий момент,

приходящийся на единицу длины края, параллельного оси x . Направления моментов, показанные на рисунке, будем считать положительными. Плоскость, проходящую посередине между гранями пластинки и называемую *срединной плоскостью* пластинки, примем за плоскость xy ,

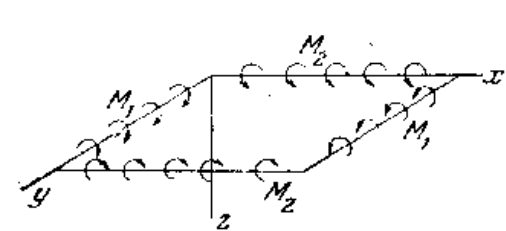


Рис. 57.

и за ось z — линию, перпендикулярную к этой плоскости и направленную вниз. Из этой пластинки двумя парами плоскостей, параллельных плоскостям xz и yz , выделим элемент (рис. 58). Теория чистого изгиба пластинки основана на допущении, что при изгибе боковые грани этого элемента остаются плоскими и поворачиваются около нейтральных осей $n-n$.

При указанных на рис. 57 направлениях моментов верхняя часть элемента испытывает сжатие, нижняя часть — растяжение. Срединная плоскость m при этом изгибе пластинки не претерпевает деформаций и поэтому является *нейтральным слоем*. Пусть $1/r_1$ и $1/r_2$ означают соответственно кривизны этой нейтральной поверхности в сечениях, параллельных плоскостям xz и yz ; тогда относительные удлинения по направлениям x и y элементарного слоя $abcd$ в расстоянии z от нейтральной поверхности определяется так же, как и в случае балки (т. I, стр. 86), и будут равны

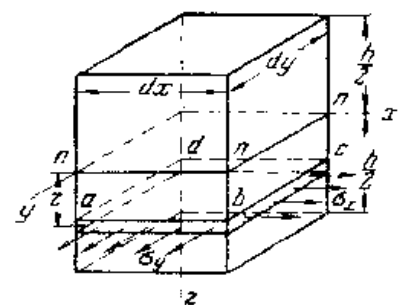


Рис. 58.

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_1}; \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_2}. \quad (a)$$

Соответствующие им напряжения на основании уравнений (38) т. I, стр. 55, будут

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} \right), \quad (b)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_2} + \mu \frac{1}{r_1} \right). \quad (c)$$

Эти напряжения пропорциональны расстоянию z от нейтрального слоя. Составляя моменты внутренних усилий, действующих по граням элемента, и приравнявая их к моментам внешних пар, получаем следующие уравнения:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dy dz = M_1 dy, \quad (d)$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dx dz = M_2 dx. \quad (e)$$

Подставляя значения (b) и (c) вместо σ_x и σ_y и замечая, что

$$\frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D,$$

где D означает *цилиндрическую жесткость пластинки* (формула (74)), мы находим

$$D \left(\frac{1}{r_1} + \mu \frac{1}{r_2} \right) = M_1, \quad (81)$$

$$D \left(\frac{1}{r_2} + \mu \frac{1}{r_1} \right) = M_2, \quad (82)$$

которые соответствуют уравнению (56) т. I, стр. 88, для случая чистого изгиба призматического бруса. Предполагая, что прогибы в направлении оси z , обозначаемые через w , малы, получаем для кривизны приближенные формулы

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Тогда уравнения (81) и (82), выраженные через w , станут

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_1, \quad (83)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = M_2. \quad (84)$$

Эти уравнения соответствуют уравнению (79) т. I, стр. 124, для изогнутой оси прямого бруса. В частном случае, когда $M_1 = M_2 = M$, кривизна изогнутой поверхности в двух перпендикулярных направлениях одинакова и поверхность является сферической. Кривизна сферы из уравнения (81) будет

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{D(1+\mu)}. \quad (85)$$

По такой поверхности изогнется пластинка любой формы, если только изгибающие моменты M равномерно распределены по ее контуру.

Выше предполагалось, что никакого изменения длины волокон срединной поверхности не происходит, т. е. что эта поверхность является нейтральным слоем при изгибе пластинки. Это предположение будет вполне точным лишь в том случае, если поверхность изогнутой пластинки является *развертываемой* поверхностью, как, например, цилиндрическая поверхность, рассмотренная в п. 15. Для неразвертываемых поверхностей указанное предположение будет достаточно точным лишь в том случае, когда прогиб w пластинки мал по сравнению с ее толщиной h . Чтобы показать это, рассмотрим изгиб круглой пластинки под действием моментов M , равномерно распределенных

по ее контуру. Из предыдущего изложения вытекает, что пластинка будет изгибаться по сферической поверхности, радиус которой

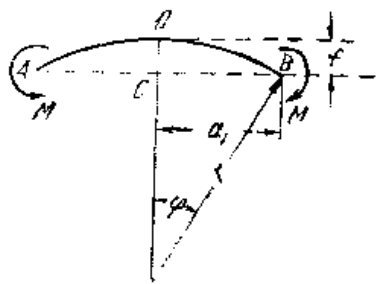


Рис. 59.

определяется по формуле (85). Пусть AOB (рис. 59) представляет диаметрально сечение изогнутой круглой пластинки, a — ее внешний радиус и f — прогиб посредине. Допустим сначала, что размеры срединной плоскости пластинки в меридиональном направлении, например по AOB , не меняются. Тогда дуга $OB = a$, $\varphi = a/r$ и $CB = a_1 = r \sin \varphi$. В таком случае, очевидно, изгиб пластинки будет сопровождаться сжатием и окружным направлением. Величина этой относительной деформации контура пластинки будет равняться

$$\varepsilon = \frac{a - a_1}{a} = \frac{r\varphi - r \sin \varphi}{r\varphi}.$$

При малом прогибе f угол φ мал, и поэтому $\sin \varphi \approx \varphi - (\varphi^3/6)$, так что

$$\varepsilon \approx \frac{\varphi^2}{6}, \quad (f)$$

или, замечая, что

$$f = r(1 - \cos \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2},$$

получаем

$$\varepsilon = \frac{f}{3r}. \quad (g)$$

Это — величина наибольшего относительного сжатия по окружности у края. Она получилась при том допущении, что деформация в меридиональном направлении равна нулю. В действительности же в меридиональном направлении возникает некоторая деформация, вследствие чего истинное сжатие по окружности будет меньше сжатия, определяемого уравнением (g)¹⁾.

Приближенная теория изгиба пластинок совершенно пренебрегает деформацией срединной поверхности и рассматривает лишь деформации, определяемые выражениями (a), наибольшее значение которых

¹⁾ Если прогибы не малы и деформация срединной поверхности принята во внимание, то можно показать, что в случае чистого изгиба круглой пластинки радиуса $a = 23h$ сжимающие напряжения срединной поверхности на контуре в окружном направлении составляют около 18% от наибольшего напряжения от изгиба, когда прогиб посредине равен 0,6 толщины пластинки. См. статью автора в Сборнике Института инженеров путей сообщения, С.-Петербург, 1915. См. также книгу автора «Theory of Plates and Shells», стр. 332, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1961.

в предыдущем примере равно $h/2r$. Следовательно, деформацией, определяемой выражением (g), можно пренебречь, и срединную поверхность можно считать не деформированной, когда $f/3r$ мало по сравнению с $h/2r$, т. е. когда прогиб f мал по сравнению с толщиной пластинки h . Только при этом допущении можно с достаточной точностью пользоваться результатами, полученными ниже для некоторых частных случаев изгиба пластинок.

17. Температурные напряжения в пластинках

Соотношением (85) (п. 16), полученным для изгиба по сферической поверхности, можно воспользоваться для вычисления температурных напряжений, возникающих в пластинке вследствие неравномерного нагрева. Пусть t означает разность температур верхней и нижней поверхностей пластинки, а α — коэффициент линейного расширения материала. Предполагая, что изменение температуры по толщине пластинки происходит по линейному закону, мы найдем, что по тому же закону будут изменяться и соответствующие удлинения; если края пластинки свободны, то изгиб, обусловленный этими удлинениями, будет происходить по сфере¹⁾. Разность между наибольшим удлинением на поверхности и удлинением в срединной поверхности равняется $\alpha t/2$, а кривизна, обусловленная этим неравномерным расширением, определится из уравнения $\frac{\alpha t}{2} = \frac{h}{2r}$, откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha t}{h}. \quad (86)$$

Такой изгиб пластинки не вызовет никаких напряжений при условии, что ее края свободны и прогиб мал по сравнению с толщиной.

Однако если края пластинки защемлены, нагревание вызовет изгибающие моменты по ее контуру. Величина этих моментов должна быть такова, чтобы они могли уничтожить кривизну, обусловленную неравномерным нагреванием и определяемую уравнением (86), так как только таким путем будет выполнено условие защемления края. Из уравнений (85) и (86) мы получаем следующее уравнение для изгибающего момента, приходящегося на единицу длины защемленного края:

$$M = \frac{\alpha t(1 + \mu)D}{h}.$$

Так как M действует на площадь прямоугольника с шириной, равной единице, и высотой h , находим соответствующее наибольшее напряжение изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t(1 + \mu)D}{h^3} = \frac{\alpha t}{2} \frac{E}{1 + \mu}. \quad (87)$$

¹⁾ Предполагается, что прогибы малы по сравнению с толщиной h пластинки.

Это напряжение пропорционально коэффициенту линейного расширения α , разности температур на обеих поверхностях¹⁾ пластинки и модулю упругости. Разность температур t может возрасти с увеличением толщины пластинки; поэтому большие температурные напряжения следует ожидать в толстых пластинках, а не в тонких. Интересно отметить, что уравнением (87), выведенным для плоских пластинок, можно также пользоваться с достаточной точностью в случае сферических или цилиндрических оболочек (см. стр. 192).

18. Изгиб круглых пластинок, нагруженных симметрично относительно центра²⁾

В этом случае изогнутая поверхность пластинки будет симметрична относительно оси, проходящей через центр пластинки перпендикулярно к ее плоскости; поэтому для вычисления прогибов и напряжений достаточно рассмотреть диаметрально сечение, проходящее через эту ось. Рис. 60 изображает такое диаметрально сечение с осью симметрии Oz . Пусть w означает прогиб пластинки в направлении оси z в какой-либо точке A , находящейся на расстоянии x от оси. Для малых значений w мы можем положить, что $\varphi = - (dw/dx)$ есть угол наклона касательной к изогнутой поверхности в той же точке. Тогда кривизна пластинки в диаметрально сечении xz будет равняться

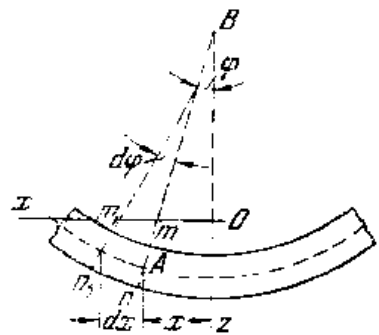


Рис. 60.

$$\frac{1}{r_1} = - \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (a)$$

При определении радиуса кривизны r_2 в направлении, перпендикулярном плоскости xz , необходимо заметить, что после деформации пластинки ее сечения, подобные nm , образуют коническую поверхность с вершиной B , находящейся в точке пересечения nm с осью Oz . Тогда AB будет представлять радиус r_2 , и из рис. 60 мы получаем

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\varphi}{x}. \quad (b)$$

¹⁾ Необходимо заметить, что t означает разность температур между двумя поверхностями пластинки, а не разность температур между жидкостями или газами в месте соприкосновения с пластинкой. Последняя вследствие резкого изменения температуры на поверхности пластинки может быть гораздо больше t .

²⁾ Этот случай изгиба был исследован Poisson'ом, Мém. de l'Acad. (Paris), т. 8, 1829.

Теперь мы пренебрегаем влиянием сдвига на изгиб и предполагаем, что имеют место те же соотношения между изгибающими моментами и кривизнами, что и в случае чистого изгиба пластинки (п. 16); поэтому можно воспользоваться уравнениями (81) и (82). Подставляя (a) и (b) в эти уравнения, мы находим

$$M_1 = D \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \mu \frac{\varphi}{x} \right), \quad (88)$$

$$M_2 = D \left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (89)$$

В этих уравнениях M_1 и M_2 означают изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины, M_1 — действующий по цилиндрическим сечениям таким, как mn , и M_2 — действующий по диаметрально сечениям xz .

Уравнения (88) и (89) содержат лишь одну переменную φ , которую можно определить из уравнения равновесия элемента $abcd$ (рис. 61), вырезанного из пластинки двумя цилиндрическими сечениями ab и cd и двумя диаметрально сечениями aO и bO . Момент, действующий по грани cd элемента, равняется

$$M_1 x d\theta. \quad (c)$$

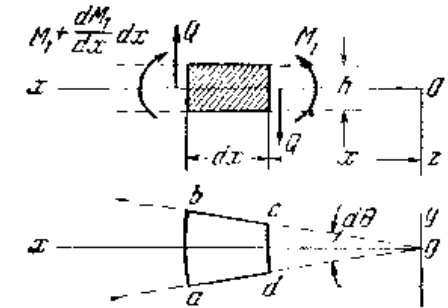


Рис. 61.

Соответствующий момент, действующий по грани ab , равняется

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx} dx \right) (x + dx) d\theta. \quad (d)$$

Моменты, действующие по граням ad и bc , равны каждый $M_2 dx$ и имеют результирующую в плоскости xz , равную

$$M_2 dx d\theta. \quad (e)$$

В дополнение к этим моментам имеются поперечные силы Q , действующие по граням ab и cd ¹⁾. Если Q представляет поперечную силу, приходящуюся на единицу длины, то полная поперечная сила, действующая по грани cd элемента, равняется $Qx d\theta$. Пренебрегая малыми величинами высшего порядка, найдем, что по грани ab действует поперечная сила такой же величины. Эти две силы дают момент в плоскости xz , равный

$$Qx d\theta dx. \quad (f)$$

¹⁾ Из симметрии следует, что по граням bc и ad элемента поперечных сил нет.

Складывая моменты (с), (d), (e) и (f), взятые с надлежащими знаками, получаем следующее уравнение равновесия элемента $abcd$

$$\left(M_1 + \frac{dM_1}{dx} dx\right)(x - dx) d\theta - M_1 x d\theta - M_2 dx d\theta + Qx dx d\theta = 0,$$

из которого, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, находим

$$M_1 + \frac{dM_1}{dx} x - M_2 + Qx = 0. \quad (g)$$

После подстановки значений M_1 и M_2 из уравнений (88) и (89) в уравнение (g) получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{Q}{D}. \quad (90)$$

В любом частном случае симметрично нагруженной круглой пластинки поперечная сила Q может быть определена из уравнений статики; тогда уравнением (90) можно воспользоваться для определения угла поворота φ и прогиба w пластинки.

Рассмотрим, например, круглую пластинку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и сосредоточенным грузом P , приложенным в центре. Взяв сечение пластинки цилиндрической поверхностью с осью Oz и радиусом x , найдем поперечную силу Q , приходящуюся на единицу длины этого сечения, из условий равновесия внутренней части пластинки, вырезанной цилиндрической поверхностью. Нагрузка, действующая на эту часть пластинки, равняется $P + \pi x^2 q$. Эта нагрузка должна быть равна равнодействующей поперечных усилий, распределенных по цилиндрической поверхности; следовательно,

$$2\pi x Q = P + \pi x^2 q$$

$$Q = \frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x}. \quad (91)$$

Подставляя это в уравнение (90), получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right),$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\varphi) \right] = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx}{2} + \frac{P}{2\pi x} \right),$$

откуда путем интегрирования находим

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x\varphi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{qx^2}{4} + \frac{P}{2\pi} \ln x \right) + C_1, \quad (h)$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Интегрирование уравнения (h) даст

$$x\varphi = -\frac{qx^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

или

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} - \frac{Px}{8\pi D} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \quad (92)$$

где C_2 — вторая постоянная интегрирования. При малых прогибах (рис. 60) имеем

$$\varphi = -\frac{dw}{dx},$$

что дает следующее уравнение для прогиба:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{qx^4}{16D} + \frac{Px}{8\pi D} (2 \ln x - 1) - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x},$$

откуда после интегрирования находим

$$w = \frac{qx^5}{64D} + \frac{Px^2}{8\pi D} (\ln x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3. \quad (93)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 и C_3 должны быть определены в каждом частном случае из условий на контуре пластинки.

В предыдущем изложении уравнения (81) и (82) были использованы при допущении, что срединная поверхность пластинки является нейтральной поверхностью, т. е. что в этой плоскости нет никаких деформаций. Это допущение, как мы видели (стр. 79), справедливо лишь в том случае, когда края пластинки не испытывают никаких напряжений в срединной плоскости пластинки и прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки.

19. Изгиб равномерно нагруженной круглой пластинки

Пластика с защемленным краем. Угол наклона касательной и прогиб в этом случае определяются из уравнений (92) и (93) путем подстановки в эти уравнения $P=0$. Обозначая через a наружный радиус пластинки, мы имеем для защемленных краев $\varphi=0$ при $x=a$ и при $x=0$. Эти условия дают следующие уравнения для вычисления постоянных интегрирования C_1 и C_2 из уравнения (92):

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right)_{x=a} = 0,$$

$$\left(\frac{qx^3}{16D} - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x} \right)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{qa^2}{8D}. \quad (a)$$

Подставляя эти значения в уравнение (92), получаем

$$\varphi = \frac{qx}{16D}(a^2 - x^2). \quad (94)$$

Теперь прогибы можно вычислить по уравнению (93). Полагая прежде всего в этом уравнении $P=0$, а затем подставляя значения постоянных C_1 и C_2 из уравнений (а), находим

$$w = \frac{qx^4}{64D} - \frac{qa^2x^2}{32D} + C_3. \quad (b)$$

Постоянная C_3 определится из того условия, что на краю пластинки прогиб равен нулю. Следовательно,

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^2}{32D} + C_3 = 0,$$

$$\text{откуда } C_3 = \frac{qa^4}{64D}.$$

Подставляя это значение в уравнение (b), получаем

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - x^2)^2. \quad (95)$$

Наибольший прогиб будет в центре пластинки и равен

$$f = \frac{qa^4}{64D}. \quad (96)$$

Этот прогиб составляет $3/8$ прогиба полоски (рис. 52) с защемленными концами и длиной, равной диаметру пластинки.

Изгибающие моменты в пластинке найдем из уравнений (88) и (89) путем подстановки в эти уравнения значения φ из уравнения (94). Таким путем получаем

$$M_1 = \frac{q}{16}[a^2(1 + \mu) - x^2(3 + \mu)], \quad (c)$$

$$M_2 = \frac{q}{16}[a^2(1 + \mu) - x^2(1 + 3\mu)]. \quad (d)$$

На краю пластинки ($x=a$) моменты будут

$$M_1 = -\frac{qa^2}{8}; \quad M_2 = -\frac{\mu qa^2}{8}; \quad (e)$$

а в центре ($x=0$) моменты равны

$$M_1 = M_2 = \frac{1 + \mu}{16} qa^2. \quad (f)$$

Наибольшее напряжение будет на краю пластинки и равняется

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6}{h^2} \frac{qa^2}{8} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2}. \quad (97)$$

Пластинка со свободно опертым краем. При исследовании изгиба пластинки со свободно опертым краем воспользуемся методом наложения. Было показано выше, что в случае защемленных краев по контуру пластинки действуют отрицательные изгибающие моменты $M_1 = -(qa^2/8)$ (рис. 62, а). Если к этому случаю присоединить случай чистого изгиба, показанный на рис. 62, б, таким образом, чтобы уничтожить изгибающие моменты по контуру, то мы получим изгиб пластинки со свободно опертым краем.

Прогиб при чистом изгибе пластинки определится из уравнения (85). Подставляя в это уравнение $M = qa^2/8$, мы находим

$$\frac{1}{r} = -\frac{qa^2}{8D(1 + \mu)}.$$

Соответствующий прогиб по середине для сферической поверхности будет (см. стр. 89 г. 1)

$$f_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{qa^4}{16D(1 + \mu)}.$$

Чтобы получить прогиб пластинки со свободно опертым краем, нужно к полученному прогибу f_1 присоединить прогиб, определяемый уравнением (96). Таким образом, для прогиба в центре пластинки мы получим

$$f = \frac{qa^4}{64D} + \frac{qa^4}{16D(1 + \mu)} = \frac{5 + \mu}{64(1 + \mu)} qa^4. \quad (98)$$

При $\mu=0,3$ этот прогиб приблизительно в четыре раза больше прогиба пластинки с защемленным краем.

Для определения изгибающих моментов нужно к постоянному изгибающему моменту $qa^2/8$ присоединить моменты, определяемые уравнениями (c) и (d), найденные выше для случая пластинки с защемленным краем. Отсюда

$$M_1 = \frac{q}{16}(3 + \mu)(a^2 - x^2),$$

$$M_2 = \frac{q}{16}[a^2(3 + \mu) - x^2(1 + 3\mu)].$$

Наибольший изгибающий момент будет в центре пластинки, где он равняется

$$M_1 = M_2 = \frac{3 + \mu}{16} qa^2.$$

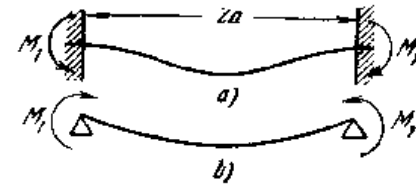


Рис. 62.

Соответствующие ему наибольшие напряжения будут

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{3(3+\mu)qa^2}{8h^2}. \quad (99)$$

Для сравнения напряжений σ_x и σ_y на нижних поверхностях пластинок с защемленным и со свободно опертым краем на рис. 63 представлены диаграммы, изображающие изменения этих напряжений по длине радиуса пластинок. Измеряя ординаты от горизонтальной оси, проходящей через точку O , мы получаем напряжения для пластинки с защемленным краем. Прибавляя к этим напряжениям постоянную величину

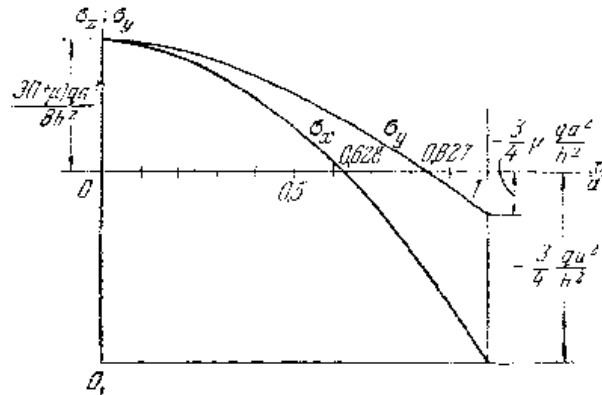


Рис. 63.

$3qa^2/4h^2$, т. е. измеряя ординаты от горизонтальной оси, проходящей через точку O_1 на рис. 63, мы получаем напряжения для свободно опертой пластинки. Отсюда можно видеть, что наиболее благоприятное напряженное состояние получается при защемленном крае.

В предыдущих выводах пренебрегалось влиянием деформации сдвига на прогиб. Когда толщина пластинки не является малой по сравнению с ее радиусом, это влияние может быть значительным и должно быть принято во внимание⁴⁾. Дополнительный прогиб, обусловленный сдвигом, найдется таким же способом, как и в случае балок (см. т. I, стр. 150). В случае равномерной нагрузки поперечная сила на основании уравнения (91) будет

$$Q = \frac{qx}{2}.$$

Если мы примем тот же закон распределения касательных напряже-

⁴⁾ Увеличение прогиба благодаря сдвигу было показано на опытах, произведенных G. M. Riss и Fom, Engineering, т. 123, стр. 343, 1927. См. также статью H. Cantoningtona там же, т. 125, стр. 31, 1928.

ний по толщине пластинки, как и в случае бруса прямоугольного поперечного сечения, то наибольшие касательные напряжения будут по срединной поверхности, и величина их в расстоянии x от центра пластинки определится по формуле

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{h} = \frac{3}{4} \frac{qx}{h}.$$

Соответствующий этому напряжению относительный сдвиг срединной поверхности пластинки будет

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{3}{4} \frac{qx}{Gh},$$

а дополнительный прогиб, обусловленный перекосом какого-нибудь элемента, например $abcd$ на рис. 61, равен

$$\gamma dx = \frac{3}{4} \frac{qx dx}{Gh}.$$

Суммируя эти прогибы по длине радиуса пластинки и замечая, что на контуре пластинки прогиб равен нулю, мы находим

$$w_1 = \frac{3}{4} \frac{q}{Gh} \int_0^a x dx = \frac{3}{8} \frac{q}{Gh} (a^2 - x^2).$$

Присоединяя это к прогибу (уравнение (95)), обусловленному изгибающим моментом, получаем полный прогиб для пластинки с защемленным краем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - x^2)^2 + \frac{3}{8} \frac{q}{Gh} (a^2 - x^2),$$

или, пользуясь выражением (74), можем написать

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - x^2)^2 + \frac{4}{1-\mu} h^2 (a^2 - x^2) \right]. \quad (100)$$

Прогиб в центре будет равен

$$f = \frac{qa^4}{64D} \left(1 + \frac{4}{1-\mu} \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (101)$$

В случае толстых пластинок второй член в скобках, представляющий собой влияние касательных напряжений, может иметь существенное значение.

Изложенная теория изгиба круглых пластинок основана на допущении, что прогибы малы по сравнению с толщиной. При больших прогибах необходимо принять во внимание деформацию срединной поверхности пластинки. При этом можно показать, что при больших прогибах пластинка получается более жесткой, чем это следует на осно-

вании изложенной теории¹⁾, и прогибы уже не будут пропорциональны силам. В случае равномерно нагруженной круглой пластинки с заземленным краем прогиб можно вычислить из уравнения²⁾:

$$f + 0,58 \frac{f^3}{h^2} = \frac{qa^2}{64D}, \quad (102)$$

которое хорошо согласуется с опытами.

На практике иногда применяют очень тонкие равномерно нагруженные пластинки. В таких случаях напряжения от изгиба могут быть малы по сравнению с напряжениями, обусловленными деформацией средней поверхности, и пластинка может рассматриваться как тонкая мембрана, не имеющая совершенно изгибной жесткости³⁾. Прогиб посредине равномерно нагруженной круглой мембраны определяется формулой

$$f = 0,662 a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}. \quad (103)$$

Мы получим аналогичную формулу, если в уравнении (102) пренебрежем величиной f по сравнению с членом, содержащим f^3 . Опыты, произведенные с тонкими мембранами, хорошо согласуются с формулой (103)⁴⁾.

20. Изгиб круглых пластинок переменной толщины

В случае равномерно нагруженной круглой пластинки переменной толщины изменение толщины h с изменением радиального расстояния x можно представить с достаточной точностью уравнением $\frac{h}{h_0} = e^{-\beta x^2/6a^2}$.

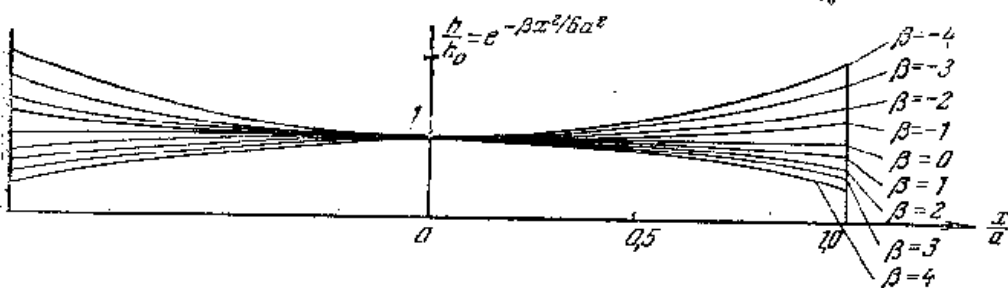


Рис. 64.

в котором h/h_0 есть отношение толщины на расстоянии x к толщине h_0 в центре и β — постоянная. Формы диаметральных сечений пластинок для различных значений постоянной β показаны на рис. 64.

¹⁾ См. статью автора, цит. на стр. 80. См. также его «Theory of Plates and Shells», 1940 (русский перевод: Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, 1946, 1963).

²⁾ Там же, стр. 336.

³⁾ Н. Ненский, Z. Math. u. Phys., т. 63, стр. 311, 1915.

⁴⁾ Врило Бек, Z. angew. Math. u. Mech., т. 7, стр. 498, 1927. Сведения о диафрагмах см. в Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 738, 1939.

Наибольшее напряжение σ_x от изгиба в радиальном направлении при радиальном расстоянии x от центра можно выразить формулой

$$\sigma_x = \gamma \frac{3qa^2}{h_0^2},$$

где γ есть коэффициент, зависящий от расстояния x . Значения этого коэффициента¹⁾ для пластинки с заземленным контуром даны

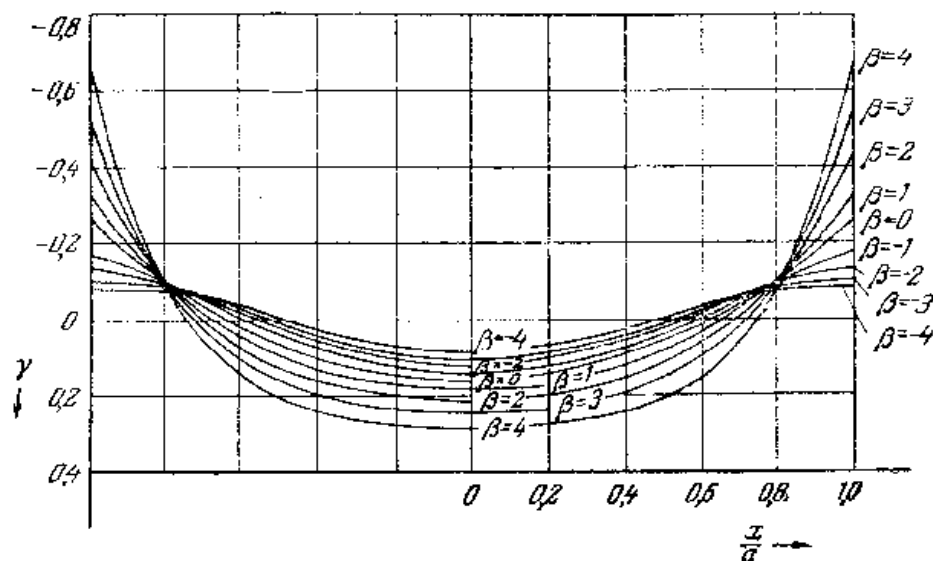


Рис. 65.

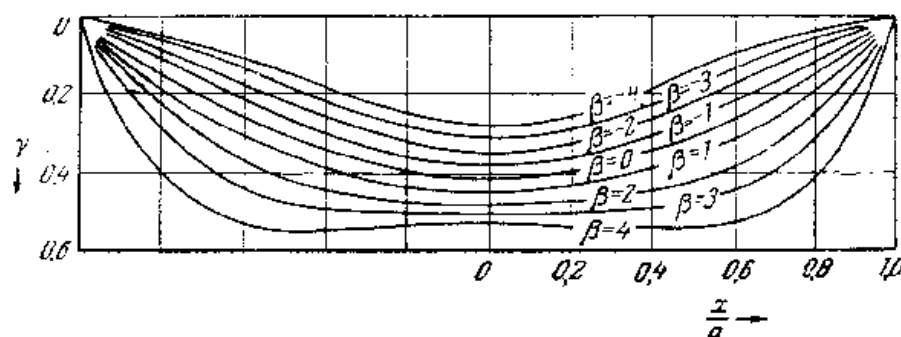


Рис. 66.

на рис. 65. Для свободно опертой пластинки эти значения даны на рис. 66.

¹⁾ Эти значения даны в диссертации О. Pichler'a, Die Biegung kreis-symmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Berlin, 1928. Позднейшие исследования изгиба круглых пластинок переменной толщины были сделаны Н. Favre und E. Chabloz, Z. angew. Math. u. Mech., т. 1, стр. 317, 1950 и Bull. tech. Suisse romande, № 1, 1952. См. также статью Н. Favre, представленную Международному конгрессу прикладной механики, Стамбул, 1952.

21. Изгиб круглой пластинки, нагруженной в центре

Пластинка с защемленным краем. Подставляя $q=0$ в уравнение (92), получаем в этом случае уравнение

$$\varphi = -\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}. \quad (a)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдутся из условий, что $\varphi=0$ на защемленном крае и в центре пластинки; отсюда

$$\left. \begin{aligned} \left[-\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=0} &= 0, \\ \left[-\frac{Px}{8\pi D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x} \right]_{x=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Так как $(x \ln x)_{x=0} = 0$, то из уравнений (b) получаются следующие значения произвольных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{4\pi D}(2 \ln a - 1); \\ C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

и уравнение (a) приводится к виду

$$\varphi = \frac{Px}{4\pi D} \ln \frac{a}{x}. \quad (d)$$

Уравнение изогнутой поверхности пластинки получится путем подстановки в уравнение (93) $q=0$ и значений (c) произвольных постоянных, что дает

$$w = \frac{Px^2}{8\pi D} \left(\ln \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) + C_3. \quad (e)$$

Постоянная C_3 получится из того условия, что на закрепленном крае прогиб равен нулю, следовательно, $C_3 = Pa^2/16\pi D$. Подставляя это в уравнение (e), получаем

$$w = \frac{Px^2}{8\pi D} \ln \frac{x}{a} + \frac{P}{16\pi D}(a^2 - x^2). \quad (f)$$

Прогиб посредине пластинки будет

$$f = \frac{Pa^2}{16\pi D}. \quad (104)$$

Этот прогиб в четыре раза больше того, который получается в случае равномерно распределенной нагрузки той же величины (уравнение (96)).

Изгибающие моменты вычисляются из уравнений (88) и (89) путем подстановки в них выражения (d), что дает

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{x} - 1 \right], \quad (g)$$

$$M_2 = \frac{P}{4\pi} \left[(1 - \nu) \ln \frac{a}{x} - \nu \right]. \quad (h)$$

На контуре ($x=a$) эти моменты получают значения

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{P}{4\pi}, \\ M_2 &= -\nu \frac{P}{4\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

а соответствующие значения наибольших напряжений будут

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2}; \quad (\sigma_r)_{\max} = \frac{3\nu}{2} \frac{P}{\pi h^2}. \quad (106)$$

Сравнивая это с выражением (97) для равномерной нагрузки, видим, что нагрузка, сосредоточенная в центре, вызывает на защемленных краях пластинки напряжения вдвое большие напряжений, возникающих от нагрузки той же величины, но равномерно распределенной по пластинке.

В центре пластинки уравнения (g) и (h) дают бесконечно большие значения для изгибающих моментов и напряжений. Этот результат получается вследствие допущения, что нагрузка сосредоточена в точке¹⁾. Если принять, что нагрузка распределена по малому кругу, то напряжения получают конечного значения (см. стр. 96).

При определении безопасных размеров круглой пластинки, нагруженной в центре, мы можем ограничить наши исследования вычислением наибольшего растягивающего напряжения от изгиба внизу пластинки. Уже было упомянуто, что уравнения (g) и (h) не являются подходящими для этой цели, и более подробное исследование²⁾ указывает, что применяемая формула для вычисления вышеупомянутого растягивающего напряжения будет иметь вид

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{P}{h^2} (1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right). \quad (107)$$

¹⁾ Местные напряжения в точке приложения сосредоточенного груза рассмотрены в статье H. Непсю, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, Darmstadt, стр. 54, 1913. См. также А. Надяи, Elastische Platten, стр. 97, 1925.

²⁾ Этот вопрос разобран в книге Timoshenko, Theory of Plates and Shells, стр. 75, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963.

Хотя сжимающие напряжения по верху пластинки могут быть во много раз больше, чем растягивающие напряжения внизу в случае резкой сосредоточенной нагрузки, они не представляют непосредственной опасности, потому что носят исключительно местный характер. Местная текучесть, которая происходит в случае пластических материалов, не влияет на общую деформацию пластинки, если растягивающие напряжения внизу пластинки остаются в безопасных пределах. Так как сопротивление сжатию хрупкого материала обычно во много раз больше, чем его сопротивление растяжению, то пластинка из хрупкого материала также будет находиться в безопасности, если растягивающее напряжение внизу пластинки будет в пределах безопасности.

Пластинка со свободно опертым краем. Прогиб пластинки со свободно опертым краем получим, пользуясь методом наложения. К прогибам по уравнению (f), найденным выше для пластинки с заделанным краем, мы присоединяем прогибы, вызванные в пластинке моментами $M_1 = P/4\pi$, равномерно распределенными по контуру, и получаем решение для пластинки со свободно опертым краем. Кривизна, обусловленная действием моментов $M_1 = P/4\pi$, на основании уравнения (85) будет

$$\frac{1}{r} = \frac{P}{4\pi(1+\mu)D},$$

а соответствующий прогиб посредине будет

$$f_1 = \frac{a^2}{2r} = \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D}.$$

Прибавляя этот прогиб к прогибу по формуле (104), найдем прогиб посредине пластинки со свободно опертым краем

$$f = \frac{Pa^2}{16\pi D} + \frac{Pa^2}{8\pi(1+\mu)D} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \frac{3+\mu}{1+\mu}. \quad (108)$$

Этот прогиб приблизительно в 2,5 раза больше прогиба пластинки с заделанным краем.

Прибавляя величину $P/4\pi$ к моментам, выраженным уравнениями (g) и (h), полученными выше для пластинки с заделанным краем, найдем выражения для изгибающих моментов пластинки со свободно опертым краем. Наибольшее растягивающее напряжение получается путем добавления $(6/lt^2)(P/4\pi)$ к напряжению, вычисленному по формуле (107).

22. Изгиб круглой пластинки, нагруженной концентрически

Мы начнем с того случая, когда нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса b (рис. 67). Рассмотрим отдельно участок пластинки внутри этого круга и участок вне его. Для каждого участка будем применять общее уравнение (93), полагая $q=0$ для обоих участков и $P=0$ для внутреннего

участка. Произвольные постоянные определяются так¹⁾, чтобы удовлетворить условиям непрерывности изогнутой поверхности на окружности радиуса $x=b$. Обозначая через P полную нагрузку, получим следующие результаты²⁾.

Защемленный край. Для внутреннего участка ($x < b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (x^2 - b^2) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - x^2) \right]. \quad (a)$$

Для внешнего участка ($x > b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{x} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - x^2) \right]. \quad (b)$$

Свободно опертый край. Для внутреннего участка ($x < b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} + (x^2 - b^2) + \frac{(3+\mu)a^2 - (1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2} (a^2 - x^2) \right]. \quad (c)$$

Для внешнего участка ($x > b$)

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[-(x^2 + b^2) \ln \frac{a}{x} + \frac{(3+\mu)a^2 - (1-\mu)b^2}{2(1+\mu)a^2} (a^2 - x^2) \right]. \quad (d)$$

При помощи этих уравнений и метода наложения можно решить задачу об изгибе круглой пластинки для любого случая нагрузки, расположенной симметрично относительно ее центра. Рассмотрим, например, случай, показанный на рис. 68, в котором нагрузка равномерно распределена по внутренней части пластинки, ограниченной кругом радиуса c . Подставляя в уравнение (a) $P = 2\pi b q db$, найдем, что прогиб, вызываемый в центре пластинки элементарной кольцевой нагрузкой, показанной на рис. 68, будет

$$dw = \frac{q}{4D} \left[-b^3 \ln \frac{a}{b} - b^2 + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \right] b db. \quad (e)$$

Тогда прогиб, вызываемый в центре пластинки всей нагрузкой, будет

$$f = \int_0^c dw = \frac{q}{4D} \int_0^c \left[-b^3 \ln \frac{a}{b} - b^2 + \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \right] b db = \frac{q}{4D} \left[-\frac{c^4}{4} \ln \frac{a}{c} - \frac{3}{16} c^2 + \frac{a^2 c^2}{4} \right]. \quad (109)$$

При $c=a$ это уравнение совпадает с уравнением (96) для равномерно на-

¹⁾ В этом случае пренебрегается влиянием касательных напряжений, которые нарушают непрерывность изогнутой поверхности на окружности радиуса $x=b$; см. статью: G. A. Gaillardet, J. Ecole polytechnique, 2 серия, С, № 26, 1927.

²⁾ См. примечание к § 45 перевода St-Venant'a книги Clebsch'a, Theorie der Elasticität fester Körper, Paris.

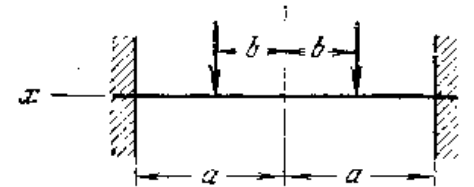


Рис. 67.

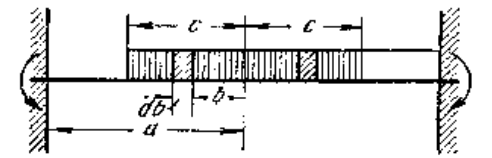


Рис. 68.

груженной пластинки. Подставляя в уравнение (109) $r \rightarrow 0$ и $\pi r^2 q = P$, получаем уравнение (104) для прогиба пластинки от сосредоточенной нагрузки.

Чтобы определить изгибающие моменты и напряжения в центре пластинки, мы возьмем вторую производную выражения (а) по x . Подставляя $x = 0$ и $P = 2\pi b q$ в эту производную, найдем кривизну в центре, обусловленную элементарной кольцевой нагрузкой (рис. 68)

$$\frac{q}{4D} \left(-2 \ln \frac{a}{b} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) b db.$$

Кривизна в центре, вызываемая полной нагрузкой, равна

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = \frac{q}{4D} \int_0^c \left(-2 \ln \frac{a}{b} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) b db = -\frac{qc^2}{4D} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (110)$$

Соответствующий изгибающий момент в центре на основании уравнений (83) и (84) будет

$$M_1 = M_2 = -D(1+\mu) \frac{a^2 w}{dx^2} = \frac{1+\mu}{4} qc^2 \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right), \quad (111)$$

а наибольшие напряжения от изгиба в центре будут равны

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_r)_{\max} = \frac{3}{2} (1+\mu) \frac{qc^2}{h^2} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (112)$$

Обозначая через P полную нагрузку $\pi c^2 q$, получаем

$$(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_r)_{\max} = \frac{3}{2} (1+\mu) \frac{P}{\pi h^2} \left(\ln \frac{a}{c} + \frac{c^2}{4a^2} \right). \quad (113)$$

Уменьшая радиус c круга, по которому распределена нагрузка, мы приближаемся к условию сосредоточенного груза. Напряжения в центре увеличиваются с уменьшением c , но остаются конечными до тех пор, пока c конечно.

23. Изгиб симметрично нагруженной круглой пластинки с круглым отверстием в центре

Изгиб моментами. Обозначим соответственно через M_{1a} и M_{1b} изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины по внешнему и внутреннему контурам пластинки (рис. 69, а). Для этого случая мы имеем $P = q = 0$ и из уравнений (92) и (93) находим

$$\varphi = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \quad (a)$$

$$w = -\frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln \frac{x}{a} + C_3. \quad (b)$$

Произвольные постоянные C_1 , C_2 и C_3 определяются теперь из условий на краях. Подставляя выражение (а) в уравнение (88), получаем

$$M_1 = D \left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2} + \mu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2} \right) \right]. \quad (c)$$

Подставляя $x = a$ и затем $x = b$, получаем следующие уравнения для опре-

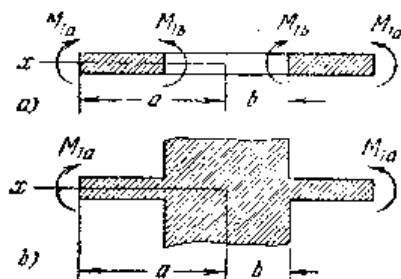


Рис. 69.

деления C_1 и C_2 :

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\mu) \right] = M_{1a},$$

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\mu) \right] = M_{1b},$$

откуда

$$C_1 = \frac{2(a^2 M_{1a} - b^2 M_{1b})}{(1+\mu)D(a^2 - b^2)}; \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_{1a} - M_{1b})}{(1-\mu)D(a^2 - b^2)}. \quad (d)$$

Постоянная C_3 определится из рассмотрения прогиба пластинки. Положим, например, что пластинка свободно опирается по внешнему контуру; тогда прогиб на этом контуре будет равен нулю и C_3 найдется из уравнения (b), которое при $x = a$ переписывается так:

$$-\frac{C_1 a^2}{4} + C_3 = 0,$$

так что

$$C_3 = \frac{a^2}{4} C_1.$$

Уравнение изогнутой поверхности пластинки теперь можно получить подстановкой в уравнение (b) значений C_1 , C_2 и C_3 .

В качестве второго примера рассмотрим случай изгиба пластинки под действием моментов M_{1a} , когда внутренний контур пластинки заделан (рис. 69, б). Произвольные постоянные C_1 и C_2 в уравнении (а) в этом случае определяются из условий $\varphi = 0$ при $x = b$ и $M_1 = M_{1a}$ при $x = a$. Тогда из уравнения (а) и (с) найдем

$$\frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} = 0, \quad \frac{C_1}{2} (1+\mu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\mu) = \frac{M_{1a}}{D},$$

и мы получаем

$$C_1 = \frac{2a^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]}, \quad C_2 = -\frac{a^2 b^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (а) и (с), находим

$$\varphi = \frac{a^2 M_{1a}}{D[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]} \left(x - \frac{b^2}{x} \right), \quad (e)$$

$$M_1 = \frac{a^2 M_{1a}}{a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)} \left[1 + \mu + (1-\mu) \frac{b^2}{x^2} \right]. \quad (f)$$

Изгиб пластинки нагрузкой, равномерно распределенной по внутреннему и внешнему контурам. Если изгиб пластинки происходит под действием нагрузки, равномерно распределенной вдоль ее контуров (рис. 70, а), то $q = 0$, а P равняется всей нагрузке, приложенной ко внутреннему контуру. Подставляя эти значения в уравнения (92) и (93) и получаем из уравнения (92)

$$\varphi = -\frac{Px}{8D} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}. \quad (g)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий на контурах. Например, если пластинка заделана на контурах (рис. 70, б), то произвольные постоянные определяются из условий, что при $x = a$ и $x = b$ угол $\varphi = 0$. Тогда из уравнения (g)

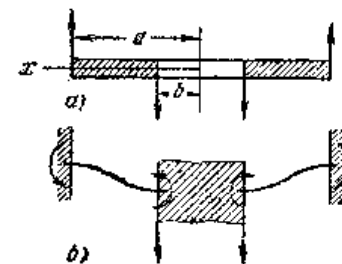


Рис. 70.

найдем

$$-\frac{Pa}{8\pi D}(2 \ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0,$$

$$-\frac{Pb}{8\pi D}(2 \ln b - 1) + \frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} = 0.$$

Определив значения C_1 и C_2 и вставив их в уравнение (g), получим выражение для φ . После этого можно вычислить изгибающие моменты из уравнений (88) и (89).

Если вместо нагрузки, распределенной вдоль контуров, будет действовать нагрузка, равномерно распределенная по пластинке, как показано на рис. 71, *a*, то поперечная сила Q в любой точке, находящейся в расстоянии x от центра, будет равняться

$$Q = \frac{1}{2\pi x} \pi q (x^2 - b^2) = \frac{qx}{2} - \frac{qb^2}{2x}.$$

Эта величина должна быть подставлена в уравнение (90), и тогда уравнения (92) и (93) получатся в следующем виде:

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} + \frac{qb^2x}{8D}(2 \ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x},$$

$$\omega = \frac{qx^4}{64D} - \frac{b^2qx^2}{8D}(\ln x - 1) - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3.$$

Для определения произвольных постоянных необходимо использовать условия на контурах. Например, если пластинка закреплена на краях, то для определения C_1 и C_2 получаются следующие уравнения:

$$-\frac{qa^3}{16D} + \frac{qab^2}{8D}(2 \ln a - 1) + \frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0,$$

$$-\frac{qb^3}{16D} + \frac{qba^2}{8D}(2 \ln b - 1) + \frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b} = 0.$$

Решения таких задач, как изгиб поршней паровых машин и изгиб фланцев цилиндрических труб, могут быть получены путем сочетания разобранных в этом параграфе решений. Например, сочетая случаи, показанные на рис. 70, *b* и 71, *a*, можем получить приближенное решение задачи на изгиб поршня (рис. 71, *b*) под давлением пара²⁾.

¹⁾ См. статью Everett O. Waters and J. Hall Taylor, Trans. A. S. M. E., 1927.

²⁾ Несколько задач такого рода разобрано в статье M. Ensslin, Dinglers Polytech. J., 1903 и 1904. См. также Pfeleiderer, Forschungsarb., № 97, 1911. Опыты с поршнями описаны в статье C. Codrón, Revue de Mécanique, т. 13, стр. 340, 1903. Круглые пластинки, усиленные ребрами, разобраны M. Schilhansl, Z. angew. Math. u. Mech., т. 6, стр. 484, 1926 и Z. Ver. deut. Ing., т. 71, стр. 1154, 1927. Более подробное изложение о круглых пластинках дано S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940 (русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963).

Несколько случаев, имеющих практическое значение, представлено на рис. 72¹⁾. Во всех этих случаях наибольшее напряжение может быть выражено формулой вида

$$\sigma_{\max} = k \frac{qa^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{kP}{h^2}, \quad (114)$$

в зависимости от того, равномерно ли распределена по поверхности приложенная нагрузка или сосредоточена на контуре. Числовые значения

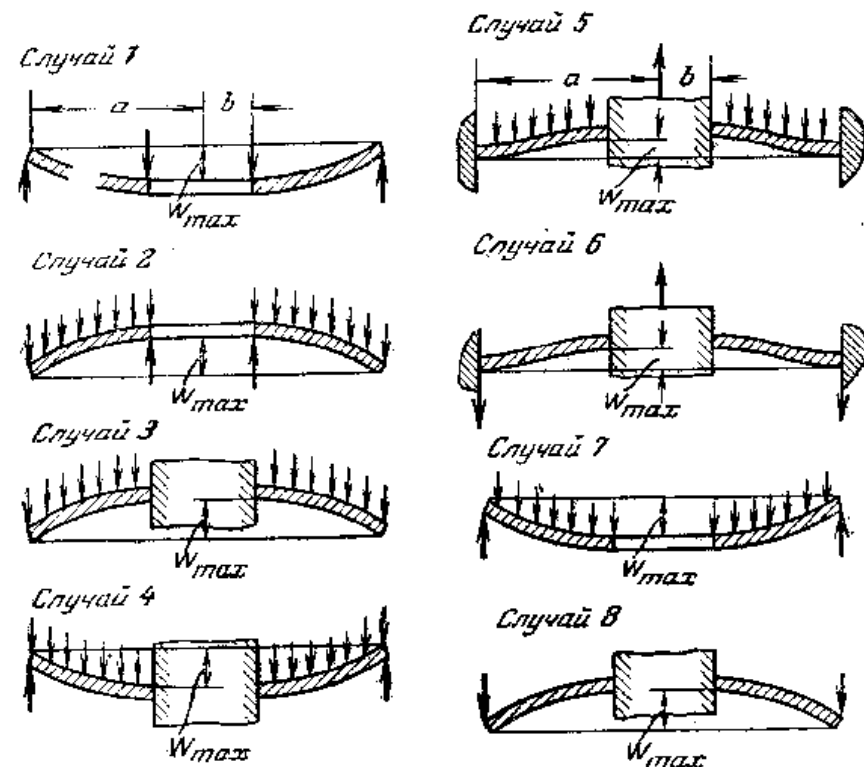


Рис. 72.

коэффициента k , вычисленные для некоторых значений отношения a/b и для коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$, даны в табл. 5. Наибольшие прогибы в тех же случаях определяются формулами типа

$$w_{\max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \text{или} \quad w_{\max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3}. \quad (115)$$

Числовые коэффициенты k_1 также даны в табл. 5²⁾.

¹⁾ См. статью: A. M. Wahl and G. Lobo, Trans. A. S. M. E., т. 52, 1929.

²⁾ Более полные сведения относительно симметрично нагруженных пластинок можно найти в статье: W. E. Timminger, J. Appl. Mech., т. 10, стр. 173, 1943.

Таблица 5

Коэффициенты k и k_1 в уравнениях (114) и (115) для восьми случаев, показанных на рис. 72

$a : b =$	1,25		1,5		2	
	Случай	k	k_1	k	k_1	k
1	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672
2	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902
3	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938
4	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,1250
5	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329
6	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237
7	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664
8	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877

$a : b =$	3		4		5	
	Случай	k	k_1	k	k_1	k
1	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
2	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,310
3	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
4	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
5	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
6	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
7	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
8	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350

24. Изгиб прямоугольных пластинок

Теория изгиба прямоугольных пластинок является более сложной, чем теория круглых пластинок. Поэтому ниже приведены лишь окончательные формулы для изгибающих моментов и прогибов. При выводе этих формул предполагалось, что прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки и что края пластинки при изгибе могут свободно перемещаться в плоскости пластинки, т. е. в срединной плоскости пластинки не действуют никакие усилия.

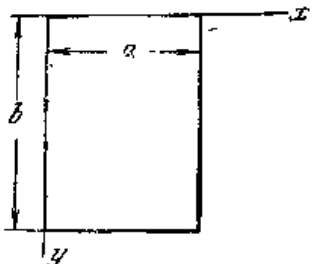


Рис. 73.

Пластинка со свободно опертыми краями. В случае равномерно распределенной нагрузки q наибольший прогиб имеет место в центре пластинки (рис. 73) и может быть представлен уравнением

$$f = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}, \quad (116)$$

где a есть короткая сторона пластинки, h — толщина пластинки и α — число-

вой коэффициент, зависящий от величины отношения b/a . По-прежнему мы обозначим через M_1 и M_2 изгибающие моменты, приходящиеся на единицу длины сечений, соответственно параллельных осям y и x . Наибольшие изгибающие моменты имеют место в центре пластинки и равны

$$(M_1)_{\max} = \beta_1 qa^2; \quad (M_2)_{\max} = \beta_2 qa^2, \quad (117)$$

где β_1 и β_2 означают числовые коэффициенты, зависящие от отношения b/a . Некоторые значения коэффициентов α , β_1 и β_2 приведены в табл. 6. Эти значения вычислены в предположении, что коэффициент Пуассона равен 0,3.

Таблица 6

Коэффициенты для расчета равномерно нагруженных прямоугольных пластинок со свободно опертыми краями

$b/a =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$\alpha =$	0,0443	0,0530	0,0616	0,0697	0,0770	0,0843	0,0906	0,0964
$\beta_1 =$	0,0479	0,0553	0,0626	0,0693	0,0753	0,0812	0,0862	0,0908
$\beta_2 =$	0,0479	0,0494	0,0501	0,0504	0,0506	0,0500	0,0493	0,0486

$b/a =$	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0	∞
$\alpha =$	0,1017	0,1064	0,1106	0,1336	0,1400	0,1416	0,1422
$\beta_1 =$	0,0948	0,0985	0,1017	0,1189	0,1235	0,1246	0,1250
$\beta_2 =$	0,0479	0,0471	0,0464	0,0404	0,0384	0,0375	0,0375

Из табл. 6 можно видеть, что при $b/a > 3$ наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент существенно не отличаются от тех же величин, вычисленных при $b/a = \infty$. Это значит, что для длинных прямоугольных пластинок ($b/a > 3$) поддерживающим влиянием коротких сторон можно пренебречь и с достаточной точностью можно пользоваться формулами, выведенными в пп. 13—15 для изгиба по цилиндрической поверхности.

Пластинка с защемленными краями. Наибольший прогиб имеет место в центре пластинки и может быть выражен тем же уравнением (116), что и для пластинки с опертыми краями. Численно наибольший изгибающий момент имеет место в середине длинных сторон и определяется уравнением

$$|M_1|_{\max} = \beta qa^2. \quad (118)$$

Некоторые значения коэффициентов α и β приведены в табл. 7.

Значения, приведенные в табл. 7, указывают, что защемление краев пластинки значительно уменьшает ее наибольший прогиб. Влияние же защемления на величину наибольших нормальных напряжений не так велико. Из таблицы также видно, что в случае защемленных краев наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент при $b/a = 2$ почти совпадают с теми же величинами, полученными при $b/a = \infty$. Это обстоятельство оправдывает применение формул, полученных в п. 14 для изгиба по цилиндрической поверхности, в случае расчета сравнительно длинных прямоугольных пластинок ($b/a \geq 2$) с защемленными краями.

Таблица 7

Коэффициенты для равномерно нагруженных прямоугольных пластинок с заземленными краями

$b/a =$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	∞
$\alpha =$	0,0138	0,0199	0,0240	0,0264	0,0277	0,0284
$\beta =$	0,0313	0,0665	0,0757	0,0806	0,0829	0,0833

Пластинка, у которой две противоположные стороны свободно оперты, третья сторона заделана и четвертая сторона свободна (рис. 74). В случае равномерно распределенной нагрузки наибольший прогиб будет посредине свободной стороны, т. е. в точке А. Этот прогиб можно представить уравнением

$$f = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3} \quad (119)$$

Значения числового коэффициента α в этом уравнении приведены в табл. 8. Наибольший изгибающий момент M_1 также имеет место в точке А, и его величина определяется уравнением

$$(M_1)_{\max} = \beta_1 qa^2 \quad (120)$$

После того наибольший изгибающий момент M_2 имеет место в точке В, т. е. посредине заделанной стороны, и его величина определяется уравнением

$$(M_2)_{\max} = \beta_2 qb^2 \quad (121)$$

Несколько значений коэффициентов β_1 и β_2 приведено в табл. 8.

Таблица 8

Коэффициенты для равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, показанной на рис. 74

$b/a =$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\alpha =$	1,37	1,03	0,635	0,366	0,123
$\beta_1 =$	0	0,0078	0,0293	0,0358	0,0972
$\beta_2 =$	0,500	0,428	0,319	0,227	0,119

Из этой таблицы видно, что если a велико по сравнению с b , то средняя полоска АВ приближается к условиям консоли, заделанной в точке В и равномерно нагруженной.

Равномерно нагруженная пластинка, свободно лежащая на многих равно удаленных друг от друга опорах (рис. 75). В этом случае мы можем

получить хорошее приближенное значение наибольшего напряжения и закон распределения напряжений вблизи опоры следующим образом. Рассматриваем часть пластинки вблизи опоры, ограниченную кругом радиуса $a = 0,22$ с

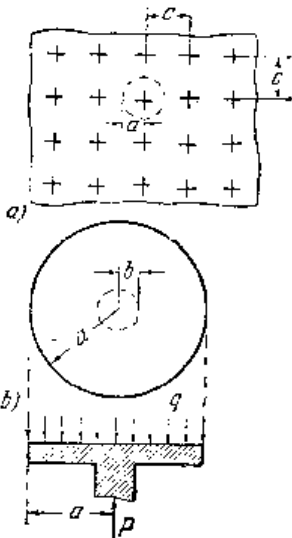


Рис. 75.

(где s есть расстояние между опорами), как круглую пластинку, свободно опертую по внешнему контуру и нагруженную в центре силой $P = qc^2$, действующей вверх, и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , действующей вниз. Эти нагрузки показаны на рис. 75, б). Задача может быть решена с помощью методов, изложенных в п. 23.

Изгиб прямоугольных пластинок на упругом основании в связи с определением напряжений в бетонных дорогах был исследован Н. М. Westergaard¹⁾.

25. Тонкостенные сосуды, подверженные внутреннему давлению

Здесь мы ограничимся рассмотрением сосудов, имеющих форму тел вращения и подверженных внутреннему давлению интенсивности p , не обязательно равномерному, но симметрично распределенному относительно оси вращения $O-O$ (рис. 76). Если толщина стенок мала по сравнению с радиусами кривизны и нет резких изменений

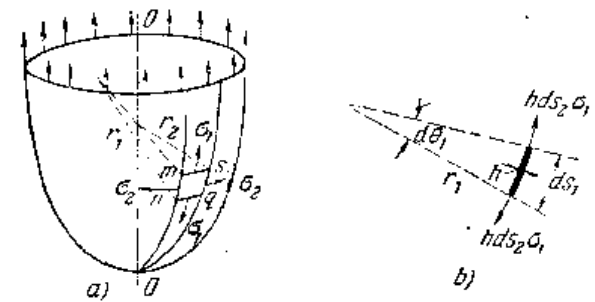


Рис. 76.

в форме меридиональных кривых, то напряжение можно вычислить с достаточной точностью, пренебрегая изгибом стенок сосудов, т. е. допуская, что растягивающие напряжения распределяются по толщине стенки равномерно²⁾. В таком случае величина напряжений может быть легко вычислена из уравнений статики.

Рассмотрим элемент $mnqs$, вырезанный из стенки сосуда двумя меридиональными сечениями mn и sq и двумя сечениями ms и nq ,

¹⁾ См. статью: Н. М. Westergaard and A. Slater, Proc. Am. Concrete Inst., т. 17, 1921. См. также V. Le we, Die strenge Lösung des Pflzdeckerproblems, Berlin, 1922.

²⁾ См. его статью в Ingenioren, Copenhagen, стр. 513, 1923 и также в Public Roads, т. 7, стр. 25, 1926. См. также S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940 (русский перевод, Пластины и оболочки, 1946, 1963).

³⁾ Оболочки, которые не сопротивляются изгибу, иногда называются мембранами, а напряжения, вычисленные без учета влияния изгиба, называются мембранными напряжениями. Предполагается, что внешние силы, равномерно распределенные по краю оболочки, направлены по касательным к меридианам.

нормальными к меридиану. Из условий симметрии можно заключить, что по граням этого элемента будут действовать только нормальные напряжения. Примем следующие обозначения:

σ_1 — растягивающее напряжение в меридиональном направлении, или меридиональное напряжение,

σ_2 — растягивающее напряжение вдоль параллельного круга, или окружное напряжение,

h — постоянная толщина стенки сосуда,

ds_1 — размер элемента в меридиональном направлении,

ds_2 — размер элемента по параллельному кругу,

r_1 — радиус кривизны меридионального сечения,

r_2 — радиус кривизны сечения, перпендикулярного к меридиану.

Полные растягивающие усилия, действующие по граням элемента, будут $h\sigma_1 ds_2$ и $h\sigma_2 ds_1$. Растягивающие усилия $h\sigma_1 ds_2$, действующие по граням ms и nq элемента, имеют составляющую в направлении нормали к элементу, равную (рис. 76, б)

$$h\sigma_1 ds_2 d\theta_1 = \frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1} \quad (a)$$

Точно таким же образом растягивающие усилия, действующие по граням mn и sq , имеют нормальную составляющую

$$h\sigma_2 ds_1 d\theta_2 = \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2} \quad (b)$$

Сумма этих нормальных составляющих по условию равновесия равняется нормальному давлению на элемент; следовательно,

$$\frac{h\sigma_1 ds_1 ds_2}{r_1} + \frac{h\sigma_2 ds_1 ds_2}{r_2} = p ds_1 ds_2 \quad (c)$$

или
$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{h} \quad (122)$$

Рассмотрим теперь приложения этого уравнения.

Сферический сосуд под действием равномерного внутреннего давления. В этом случае $r_1 = r_2 = r$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Из уравнения (122) получаем

$$\sigma = \frac{pr}{2h}.$$

Конический сосуд. Рассмотрим открытый конический сосуд, наполненный жидкостью (рис. 77). В этом случае кривизна меридиана $1/r_1 = 0$ и окружное напряжение σ_2 , обусловленное давлением жидкости, может быть вычислено из уравнения

(122). Внутреннее давление в точках $m-n$ на расстоянии $d-y$

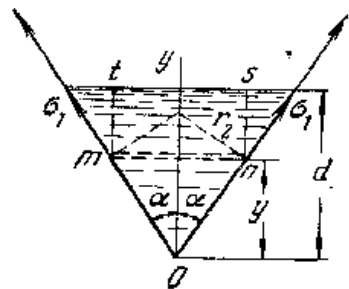


Рис. 77.

от поверхности жидкости равняется $p = \gamma(d-y)$, где γ — вес единицы объема жидкости. Радиус кривизны r_2 в этих точках равен $r_2 = \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$. Тогда уравнение (122) переписывается так:

$$\sigma_2 \frac{\cos \alpha}{y \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\gamma(d-y)}{h},$$

откуда

$$\sigma_2 = \frac{\gamma(d-y)y \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} \quad (d)$$

Наибольшее значение этого напряжения имеет место в точках, где произведение $(d-y)y$ является максимумом. Если мы положим производную от $(d-y)y$ равной нулю, то найдем $y = d/2$, и напряжение в этой точке будет

$$(\sigma_2)_{\max} = \frac{\gamma d^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha} \quad (e)$$

Напряжение σ_1 на уровне $m-n$ найдется из того условия, что вертикальные составляющие меридиональных растягивающих усилий в стенках сосуда уравновешиваются весом объема $tmOns$ жидкости (рис. 77); следовательно,

$$2\pi y (\operatorname{tg} \alpha) h \sigma_1 \cos \alpha = \pi y^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha) \left(d - y + \frac{1}{3} y \right) \gamma,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{y (\operatorname{tg} \alpha) \left(d - \frac{2}{3} y \right) \gamma}{2h \cos \alpha} \quad (f)$$

Это напряжение достигает наибольшего значения при $y = \frac{3}{4}d$. Подставляя это значение в уравнение (f), мы находим

$$(\sigma_1)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{d^2 \gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} \quad (g)$$

Уравнения (d) и (f) представляют полное решение задачи в том случае, когда напряжениями от изгиба в стенке сосуда можно пренебречь.

В случае цилиндрического сосуда диаметром d , подверженного равномерному давлению p , мы находим по-прежнему (см. т. I, стр. 46)

$$\sigma_1 = \frac{pd}{4h}; \quad \sigma_2 = \frac{pd}{2h}.$$

ЗАДАЧИ

1. Бак (рис. 78) наполнен жидкостью до указанного на рисунке уровня. Определить наибольшие напряжения σ_1 и σ_2 в цилиндрической и шаровой поверхностях сосуда, а также сжимающее усилие в укрепляющем кольце mn .
Решение. Вес жидкости, содержащейся в сосуде, равняется

$$Q = \left[\pi dr^2 + \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^2 l + \frac{l^3}{3} \right) \right] \gamma.$$

Для цилиндрической части бака имеем

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi r h} = \text{const} \quad \text{и} \quad (\sigma_2)_{\text{max}} = \frac{d\gamma r}{h}.$$

Для шаровой части наибольшее напряжение будет внизу на дне, где гидростатическое давление жидкости равняется γd_1 и $\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma d_1 R/2h$. Растягивающие усилия в шаровой части сосуда, приходившиеся на единицу длины кольца mn , равняются $Q/(2\pi r \sin \alpha)$. Радиальная составляющая этого усилия, вызывающая сжатие кольца (рис. 78, б), равняется $(Q/2\pi r) \sin \alpha$, а сжимающее усилие в кольце равно $(Q/2\pi) \sin \alpha$. Это является лишь приближенным решением, полученным на основании допущения, что цилиндрическая и шаровая части представляют собой мембраны, сопротивляющиеся только растяжению. При вычислении сжимающих напряжений в кольце необходимо к поперечному сечению самого кольца mn прибавить сечения смежных участков цилиндрической и шаровой частей.

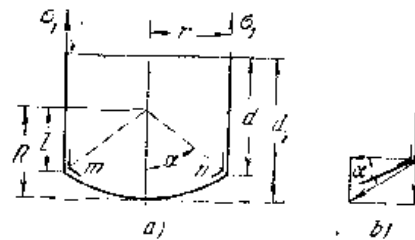


Рис. 78.

2. Определить напряжения в точках mn цилиндрического бака с полусферическим дном, который наполнен до указанного на рис. 79 уровня.

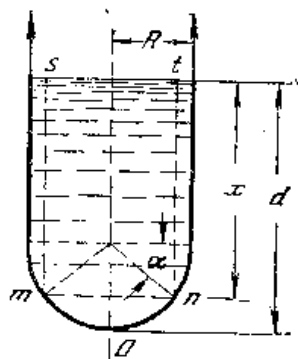


Рис. 79.

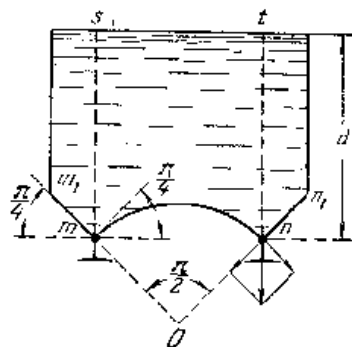


Рис. 80.

Решение. Из уравнения (122) для какой-либо точки шаровой части, находящейся на расстоянии x от поверхности жидкости, имеем

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{R} = \frac{\gamma x}{h}. \quad (b)$$

Так как меридиональные усилия, приложенные по сечению mn , уравновешиваются весом объема $smOnt$ жидкости, то второе уравнение будет

$$\sigma_1 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{d-R}{2} + \frac{R}{3} \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right), \quad (i)$$

и из уравнения (b) получаем

$$\sigma_2 = \frac{\gamma R}{h} \left(\frac{d-R}{2} + \frac{R}{3} \frac{\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \right).$$

3. Для бака на рис. 80 определить зависимость между внешним диаметром бака, диаметром опорного кольца mn и глубиной d жидкости по

условию, чтобы опорное кольцо mn испытывало лишь вертикальное давление. Средняя часть дна резервуара является шаровой поверхностью с центральным углом $\pi/2$. Тот же угол имеет и коническая часть mtm_1 .

Указание. Требуемая зависимость может быть получена из того условия, что давления на кольцо со стороны шарового дна и со стороны конической боковой поверхности, действующие под углом 45° , не должны давать горизонтальной составляющей. Из этого следует, что объем жидкости, ограниченный внутренней поверхностью $mstn$, должен быть равен объему жидкости, ограниченной наружной поверхностью.

4. Определить наибольшее напряжение в баке, представленном на рис. 78, если $R = 3$ м, $r = 2,4$ м, $d = 6$ м, $\gamma = 1$ г/см³ и $h = 0,6$ см.

5. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в стенках тора, подверженного равномерному внутреннему давлению p (рис. 81).

Решение. Условие равновесия для вертикальных сил в части mtm_1n_1 , вырезанной из сосуда

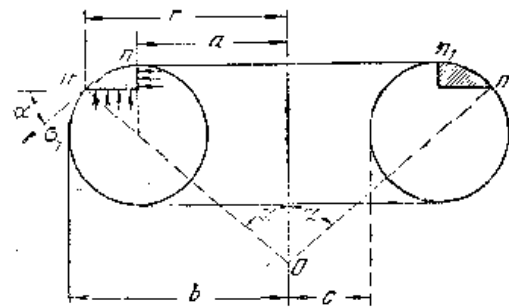


Рис. 81.

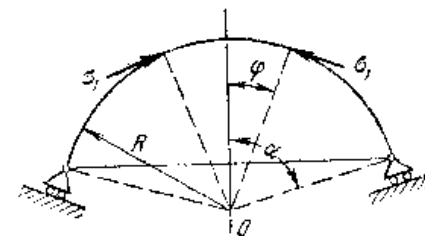


Рис. 82.

вертикальной цилиндрической поверхностью радиуса a и конической поверхностью mOn_1 , выразится так:

$$\pi (r^2 - a^2) p - \sigma_1 h 2\pi r \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{p (r^2 - a^2)}{2rh \sin \alpha}.$$

Теперь напряжение σ_2 можно вычислить из уравнения (122).

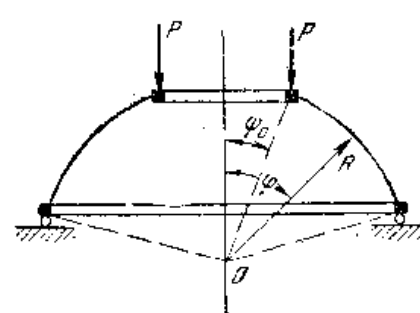


Рис. 83.

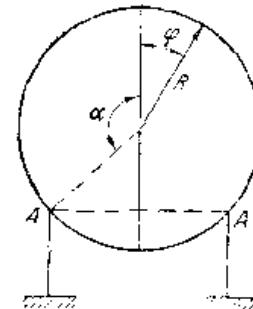


Рис. 84.

6. Определить наибольшее напряжение в стенках сосуда, представленного на рис. 81, если $a = 3$ м, $b = 3,6$ м, $h = 0,6$ см и $p = 3,5$ кг/см².

7. Шаровой купол постоянной толщины h (рис. 82) нагружен собственным весом q , приходящимся на единицу площади. Найти напряжения в меридиональном направлении, а также в перпендикулярном к меридиану.

Ответ. $\sigma_1 = -\frac{qR}{h(1+\cos\varphi)}$, $\sigma_2 = \frac{qR}{h}\left(\frac{1}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi\right)$.

8. Решить предыдущую задачу, если верхняя часть шарового купола удалена (рис. 83) и к верхнему контуру приложена равномерно распределенная нагрузка P , приходящаяся на единицу длины.

Ответ.

$$\sigma_1 = -\frac{qR(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{h\sin^2\varphi} - \frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi},$$

$$\sigma_2 = \frac{qR}{h}\left(\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \cos\varphi\right) + \frac{P\sin\varphi_0}{h\sin^2\varphi}.$$

9. Шаровой бак (рис. 84), опертый по параллельному кругу, полностью наполнен жидкостью удельного веса j . Найти σ_1 и σ_2 .

Ответ. Если $\varphi < \alpha$:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(1 - \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right), \quad \sigma_2 = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(5 - 6\cos\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right).$$

Если $\varphi > \alpha$:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(5 + \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right), \quad \sigma_2 = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(1 - 6\cos\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right).$$

26. Местные напряжения изгиба в тонкостенных сосудах

В предыдущем параграфе пренебрегалось изгибом стенок сосуда и рассматривались только растягивающие, так называемые мембранные напряжения. Перемещения, обусловленные мембранными напряжениями, вызывают изгиб стенок, и результирующая напряжений изгиба может иметь существенное значение. В особенности это относится к местам перелома меридиана. Если меридиан состоит из кривых, которые не имеют в месте сопряжения общей касательной, то для того, чтобы воспрепятствовать значительному изгибу стенок сосуда, необходимо устроить скрепляющее кольцо, как показано на рис. 78.

Напряжения могут достигать значительной величины в местах сопряжения в меридиональном сечении, состоящем из нескольких кривых, также и в том случае, если в местах сочленения имеются общие касательные. Дополнительные напряжения, возникающие в этих точках, называются напряжениями разрыва непрерывности напряжений. Покажем теперь способ их определения в простом случае цилиндрического сосуда с полушаровыми днищами, подверженного действию равномерного внутреннего давления (рис. 85). Сначала мы рассмотрим только мембранные напряжения и для цилиндрической части найдем

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h}, \quad \sigma_2 = \frac{pr}{h}, \quad (a)$$

где r — радиус цилиндра и полушара и h — толщина стенки. Для шаровой части имеем

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{pr}{2h}.$$

Соответствующие радиальные перемещения для цилиндрической и шаровой частей будут равны

$$\frac{r}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) = \frac{pr^2}{2hE}(2 - \mu) \quad \text{и} \quad \frac{pr^2}{2hE}(1 - \mu).$$

Если бы шаровая и цилиндрическая части были разъединены (рис. 85, б), то разность радиусов вследствие деформации, вызываемой мембранными напряжениями, равнялась бы

$$\delta = \frac{pr^2}{2hE}. \quad (b)$$

В действительном же сосуде днище и цилиндр связаны взаимно на их стыке усилиями сдвига $Q_0 = P_0$ и изгибающими моментами M_0 (рис. 85, б), отнесенными к единице длины окружности срединной поверхности сосуда. Эти усилия вызывают изгиб смежных частей сосуда. При изучении изгиба цилиндрической части достаточно рассмотреть изгиб элементарной полоски (рис. 86), поскольку деформация симметрична относительно оси и прогиб этой полоски совершается в меридиональной плоскости. Для простоты предположим, что полоска имеет ширину, равную единице. Если u означает радиальное перемещение в каком-либо поперечном сечении полоски, то радиус цилиндра в этом сечении укорачивается на величину u , вследствие чего появляется относительное сжатие в окружном направлении величиной u/r . Соответствующее сжимающее напряжение будет Ey/r . Следовательно, когда полоска прогибается в направлении оси цилиндра, то возникают поперечные сжимающие усилия T (рис. 86, с), величина которых на единицу длины полоски равна

$$T = \frac{Eyu}{r}h. \quad (c)$$

Так как угол θ равен $1/r$, то эти усилия дают радиальную результирующую, равную

$$\frac{Eyh}{r}\theta = \frac{Eyh}{r^2}, \quad (d)$$

которая препятствует прогибу полоски. (Предполагается, что угол θ мал.) Эти реактивные силы распределяются по полоске пропорционально прогибам u , так что при изгибе полоска находится в тех же условиях, что и балка на упругом основании¹⁾ с коэффициентом постели $k = Eh/r^2$. Так как

¹⁾ Кажется, что этот метод анализа местного изгиба в цилиндрических оболочках был введен H. Schaeffler'ом, см. Organ f. Eisenbahnwesen, 1859.

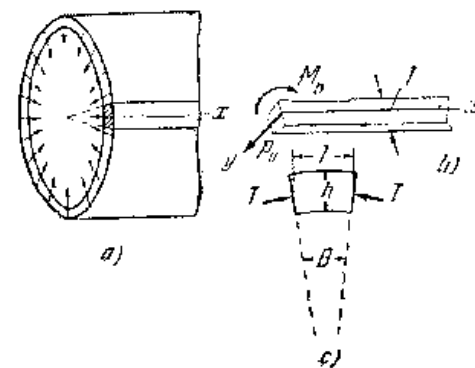


Рис. 86.

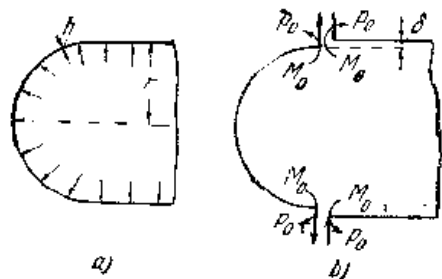


Рис. 85.

кажем теперь способ их определения в простом случае цилиндрического сосуда с полушаровыми днищами, подверженного действию равномерного внутреннего давления (рис. 85). Сначала мы рассмотрим только мембранные напряжения и для цилиндрической части найдем

любому изменению формы поперечного сечения полоски препятствуют смежные полоски точно таким же образом, как в пластинках, то здесь для расчета полоски также используется цилиндрическая жесткость (см. стр. 70) $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси полоски будет (см. уравнение (1) стр. 12)

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} = - \frac{Eh}{r^2} y.$$

Вводя, как и прежде, обозначение

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4Dr^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{r^2 h^2}}, \quad (123)$$

получим уравнение изогнутой оси полоски (см. уравнение (1), стр. 21)

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [Q_0 \cos \beta x - \beta M_0 (\cos \beta x - \sin \beta x)]. \quad (e)$$

Это волнообразная кривая с быстро затухающими амплитудами и длиной волны

$$l = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{r^2 h^2}{3(1 - \mu^2)}}, \quad (f)$$

которая мала по сравнению с r , если h мало. Из этого можно видеть, что изгиб в месте соединения цилиндра и днища имеет *местный характер* и оказывает заметное влияние на напряжения лишь в узкой полоске в непосредственной близости к соединению. Эта узкая полоска по краю днища является почти цилиндрической по форме, и следовательно, уравнением (e), которое было выведено для цилиндрической части сосуда, также можно пользоваться для приближенного вычисления прогибов и напряжений в днище¹⁾.

В простейшем случае, когда цилиндрическая стенка и шаровое днище имеют одну и ту же толщину, прогибы и углы наклона, вызываемые на краях шаровой и цилиндрической частей силами Q_0 , равны. Тогда условия непрерывности в месте соединения удовлетворятся, если $M_0 = 0$, а $Q_0 = P_0$ имеет такую величину, которая вызывает прогиб на краю цилиндра, равный $f/2$. Подставляя в уравнение (e) $M_0 = 0$ и $x = 0$, получаем для вычисления Q_0 уравнение $\frac{Q_0}{2\beta^3 D} = \frac{f}{2}$, откуда

$$Q_0 = f\beta^3 D = \frac{pr^2}{2hE} \frac{Eh}{43r^2} = \frac{p}{83}. \quad (124)$$

Зная Q_0 , мы можем вычислить из уравнения (e) прогиб и изгибающий момент в любом поперечном сечении полоски. Соответствующие напряжения разрыва непрерывности напряжений должны быть прибавлены к мембранному напряжению, определяемым уравнениями (a).

Если днище и цилиндрическая часть сосуда имеют разную толщину, то в месте соединения будут существовать условия сдвига Q_0 , и момент M_0 . Эти две величины определяются из следующих условий: 1) сумма прогибов на краю шаровой и цилиндрической частей должна равняться f (рис. 85, б); 2) углы поворота обоих краев должны быть равны между собой.

¹⁾ Доказательство того, что это является достаточно точным, было дано E. Meissner'ом, Schweiz. Bauzeitung, т. 86, стр. 1, 1925.

Указанный метод можно применить также и тех случаях, когда днища не являются полушаровыми¹⁾. Если толщина стенок сосудов, испытывающих давление, не мала, то напряжения от изгиба в стенках могут иметь перво-степенное значение, и в этом случае становится необходимым более подробное исследование закона распределения напряжений²⁾.

ЗАДАЧИ

1. Определить напряжения вследствие разрыва непрерывности в сосуде, показанном на рис. 85, если $p = 10 \text{ кг/см}^2$, $r = 60 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $\mu = 0,3$.

Решение. Из уравнения (123) мы получаем $\beta = 0,151$ и из выражения (124) мы находим $Q_0 = \frac{10}{8 \cdot 0,151} = 8,3 \text{ кг/см}$. Изгибающий момент в элементарной полоске равняется $M = -D \frac{d^2 y}{dx^2}$. Пользуясь уравнением (e) и подставляя $y = \frac{Q_0}{2\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x$, получаем

$$M = - \frac{Q_0}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x.$$

Численно наибольшее значение этого момента имеет место при $\beta x = \pi/4$, когда $M_{\max} = 17,8 \text{ кг см}$. Соответствующее наибольшее напряжение от изгиба в полоске будет равно $6M_{\max}/h^2 = 74 \text{ кг/см}^2$. Это напряжение нужно сложить с мембранным напряжением

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h} = \frac{10 \cdot 60}{2 \cdot 1,2} = 250 \text{ кг/см}^2.$$

Изгиб полоски вызывает также окружные напряжения. Эти напряжения состоят из двух частей: 1) напряжений, которые препятствуют искажению поперечных сечений полоски (см. стр. 70) и наибольшее значение которых в любом поперечном сечении полоски равно $\pm 6M/h^2$ и 2) напряжений $\sigma_2 = E/r$, обусловленных укорочением окружности. Подставляя вместо y и M найденные выше выражения, получаем напряжение разрыва непрерывности, которое надо добавить к мембранному напряжению σ_2 . По уравнению (11):

$$- \frac{Q_0 E}{2\beta^3 D r} e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{6\mu Q_0}{3h^2} e^{-\beta x} \sin \beta x = \frac{6\mu Q_0}{3h^2} e^{-\beta x} (\sin \beta x - 1,83 \cos \beta x).$$

¹⁾ Этот метод был применен при исследовании закона распределения напряжений в различных формах днищ паровых котлов; см. E. Höhn and A. Huggenberger, Über die Festigkeit der gewölbten Boden und der Zylinderschale, Zürich, 1927 и W. M. Coates, The State of Stress in Full Heads of Pressure Vessels, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1929. Метод также был применен при исследовании местного изгиба в резервуарах, содержащих жидкости; см. T. Pöschl и K. Terzaghi, Berechnung von Behältern, Berlin, 1926. H. Reissner, Beton u. Eisen, т. 7, 1928; и C. Rönge, Z. Math. u. Phys., т. 51, стр. 254, 1904. Цилиндрические оболочки с плоскими днищами были рассмотрены E. O. Hönberg'ом и K. Axelsson'ом, Trans. A. S. M. E., т. 54, стр. 13, 1932. Метод также был применен к толстостенным цилиндрам и дал удовлетворительные результаты; см. статью: C. W. MacGregor and I. F. Coffin, J. Appl. Mech., т. 14, стр. A-301, 1947. Далее о цилиндрических оболочках см. S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, 1940; русский перевод: Пластинки и оболочки, 1946, 1963.

²⁾ См. S. Timoshenko, там же.

Наибольшее значение этого напряжения можно легко найти обычным путем. Оно мало по сравнению с мембранным круговым напряжением $pr/h = 500 \text{ кг/см}^2$, так что напряжения разрыва непрерывности в этом случае существенно не влияют на наибольшее напряжение.

2. Тонкий цилиндрический барабан, прикрепленный к двум сплошным дискам, вращается около оси $O-O$ (рис. 87) с окружной скоростью v . Определить местные напряжения от изгиба в барабане, если он заделан по краям m_1 и m_2 .

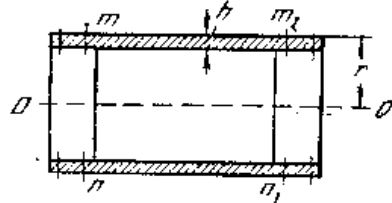


Рис. 87.

Решение. Если бы барабан был отделен от дисков, то увеличение радиуса барабана вследствие действия центробежной силы равнялось бы $\gamma v^2 r / gE$ (см. т. I, уравнение (15), стр. 36). Увеличение же радиуса сплошных дисков (см. выводы на стр. 181—183) равняется $\frac{1-\mu}{4} \frac{\gamma v^2 r}{gE}$. Разность этих двух

величин равна $\delta = \frac{3+\mu}{4} \frac{\gamma v^2 r}{gE}$. (Предполагается, что γ , μ и E одинаковы как для барабана, так и для дисков.) Применяя тот же метод, что и в предыдущей задаче, и рассматривая полосу шириной, равной единице, найдем при помощи уравнений (11) и (12) величины поперечной силы Q_0 и изгибающего момента M_0 . Этими уравнениями можно воспользоваться, если рассматриваемая полоска является очень длинной. В дополнение мы можем считать диски весьма жесткими по сравнению с барабаном и пренебречь деформациями, вызываемыми в них силами Q_0 и моментами M_0 . Тогда уравнениями для вычисления Q_0 и M_0 будут

$$\frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 3M_0) = \delta, \quad \frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 2M_0) = 0,$$

откуда

$$Q_0 = 4\beta^2 D \delta; \quad M_0 = 2\beta^2 D \delta.$$

При помощи этих величин прогибы и напряжения от изгиба в барабане найдутся из уравнения, аналогичного уравнению (11).

3. Определить наибольшее напряжение от изгиба в барабане предыдущей задачи, если $r = 50 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $v = 150 \text{ м/сек}$ и материалом является сталь.

4. Определить напряжения от изгиба, возникающие в трубе под действием насаженного на нее узкого кольца (рис. 88).

Решение. Рассмотрим продольную полоску шириной, равной единице, и обозначим через P давление между кольцом и трубой, приходящееся на единицу длины окружности трубы. Эта полоска будет изгибаться точно так же, как длинный стержень на упругом основании, который несет сосредоточенный груз P (п. 1). Уменьшение радиуса трубы под действием силы P на основании формулы (8) равняется $P/8\beta^2 D$. Увеличение радиуса кольца равно Pr^2/FE , где F — площадь поперечного сечения кольца. (Уменьшение

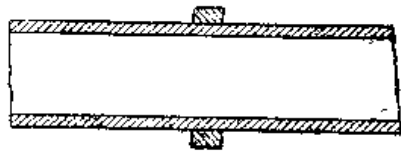


Рис. 88.

кольца в радиальном направлении предполагается малым по сравнению с радиусом r .) Если через δ обозначить первоначальную разность между внутренним радиусом кольца и наружным радиусом трубы, то для вычисления P получим следующее уравнение:

$$\frac{P}{8\beta^2 D} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta,$$

или, пользуясь формулой (123) и принимая $\mu = 0,3$, получаем

$$0,643 \frac{P}{E} \left(\frac{r}{h} \right)^{1/2} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta. \quad (g)$$

P определяется из этого уравнения, и наибольший изгибающий момент в полоске найдется из выражения (91¹). Наибольшее напряжение изгиба в полоске будет

$$\sigma = \frac{3}{2} \frac{P}{h^2} \sqrt{\frac{r^2 h^2}{3(1-\mu^2)}}.$$

Тот же метод применяется также в случаях, когда цилиндрическая труба с укрепляющими кольцами подвергается равномерному внутреннему или равномерному наружному давлению. Если расстояние между кольцами настолько велико, что влиянием любого из них на прогибы, вызываемые другими, можно пренебречь, то P можно получить из уравнения (g) путем подстановки $\delta = pr^2/Eh$. Это выражение представляет собой величину изменения радиуса трубы под действием равномерного давления²⁾.

5. Решить предыдущую задачу, предполагая, что длина l трубы невелика и что кольцо находится в середине длины. Материалом является сталь и даны следующие размеры: $r = 60 \text{ см}$, $h = 1,2 \text{ см}$, $l = 120 \text{ см}$, $F = 25 \text{ см}^2$ и $\delta = 0,12 \text{ см}$.

Указание. При вычислении давления P , приходящегося на единицу длины кольца, воспользоваться результатами, полученными для балки, показанной на рис. 13, стр. 25. Таким образом, прогиб, вызываемый в трубе давлением P , равняется

$$\frac{P}{8\beta^2 D} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l}.$$

Тогда уравнение для вычисления P будет

$$\frac{P}{8\beta^2 D} \frac{\text{ch } \beta l + \cos \beta l + 2}{\text{sh } \beta l + \sin \beta l} + \frac{Pr^2}{FE} = \delta.$$

6. Круглая цилиндрическая труба со свободно открытыми краями подвергается внутреннему равномерному давлению p . Найти продольное напряжение от изгиба и прогиб посередине трубы (рис. 89). Размеры трубы те же, что и в предыдущей задаче.

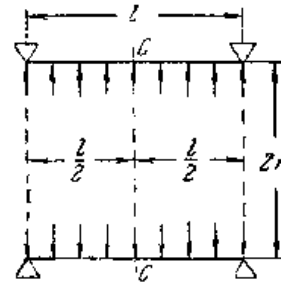


Рис. 89.

Указание. По результатам решения задачи, представленной на рис. 20, стр. 29, прогиб и изгибающий момент, приходящийся на единицу длины окружности, в среднем поперечном сечении $C-C$ будут

$$u_c = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{2 \text{ch } \frac{\beta l}{2} \cos \frac{3l}{2}}{\text{ch } \beta l + \cos \beta l} \right), \quad M = \frac{p}{\beta^2} \frac{\text{sh } \frac{\beta l}{2} \sin \frac{3l}{2}}{\text{ch } \beta l + \cos \beta l}.$$

7. Решить предыдущую задачу, предполагая, что края трубы жестко заделаны.

Указание. Воспользоваться результатами задачи, представленной на рис. 21, стр. 29.

¹⁾ Пример таких вычислений дан в статье: G. Соок, Engineering, т. 116, стр. 479, 1923. См. также R. Logenz, Z. Ver. deut. Ing., т. 52, стр. 1706, 1908; M. Westphal, там же, т. 41, стр. 1036, 1897.

²⁾ Приложение этого метода к вычислению окружных напряжений в подводных лодках, имеющих круговое поперечное сечение, дано в статье К. v. Sanden'a, «Werft u. Reederei», стр. 189, 1920.

8. Круглая стальная труба усилена кольцами, которые находятся на расстоянии l одно от другого (рис. 90, а), и подвергается внутреннему давлению p . Найти давление P , возникающее на единице длины внутренней окружности кольца. Найти наибольшие напряжения изгиба трубы.

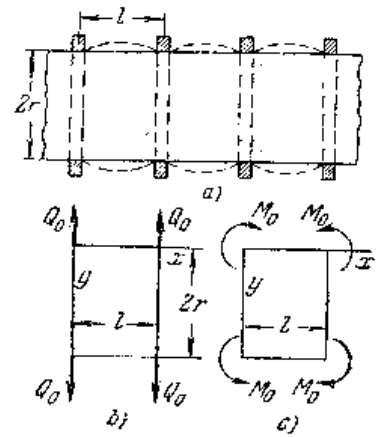


Рис. 90.

Решение. Начнем с рассмотрения части трубы между двумя кольцами, находящейся под действием поперечных сил Q_0 (рис. 90, б) и изгибающих моментов M_0 (рис. 90, в), приходящихся на единицу длины окружности трубы. (Предполагается, что ширина кольца можно пренебречь по сравнению с расстоянием l между кольцами.) Рассматривая продольную полосу шириной, равной единице, как балку на упругом основании, и пользуясь результатами задач, представленных на рис. 12, стр. 24, и на рис. 18, стр. 28, мы находим прогиб и угол наклона касательной в левому концу полосы по рис. 90, в:

$$(w_1)_{x=0} = -\frac{2Q_0\beta r^2 \operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}{Eh \operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{2Q_0\beta^2 r^2 \operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{Eh \operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}. \quad (7)$$

Для левого конца полосы на рис. 90, в получаем

$$(w_2)_{x=0} = -\frac{2M_0\beta^2 r^2 \operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{Eh \operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{dw_2}{dx}\right)_{x=0} = \frac{4M_0\beta^3 r^2 \operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l}{Eh \operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l}. \quad (9)$$

Из нашего определения P следует, что $Q_0 = -\frac{P}{2}$. Подставляя это в уравнение (6) и замечая, что в трубе (рис. 90, а) касательная к полоске должна быть параллельна оси трубы, получаем

$$\left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} + \left(\frac{dw_2}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{P \operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l}{4\beta \operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l}. \quad (10)$$

При вычислении P мы предполагаем сначала, что кольца абсолютно жестки. В таком случае прогиб в трубе, вызываемый силами P под кольцами, должен равняться радиальному расширению pr^2/Eh , которое труба должна была бы иметь при отсутствии укрепляющих колец. Следовательно, уравнением для вычисления P будет

$$(w_1)_{x=0} + (w_2)_{x=0} = \frac{pr^2}{Eh},$$

или

$$\frac{P\beta r^2 \operatorname{ch} \beta l + \cos \beta l}{Eh \operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l} - \frac{P\beta r^2}{2Eh (\operatorname{sh} \beta l + \sin \beta l)} \frac{(\operatorname{sh} \beta l - \sin \beta l)^2}{(\operatorname{ch} \beta l - \cos \beta l)} = \frac{pr^2}{Eh}. \quad (11)$$

В каждом частном случае это уравнение можно легко решить относительно P . Подставляя значение P в уравнение (10), мы получаем требуемое значение изгибающего момента M_0 .

Чтобы принять в расчет расширение укрепляющих колец, мы замечаем, что силы P вызывают увеличение внутреннего радиуса кольца, равное Pr^2/FE , где F — площадь поперечного сечения кольца. Прогиб трубы уменьшается на ту же величину. Следовательно, чтобы получить силу P в этом случае, мы должны подставить в правую часть уравнения (11) величину $\frac{pr^2}{Eh} - \frac{Pr^2}{EF}$ вместо pr^2/Eh .

9. Найти изгибающий момент M_0 и поперечную силу Q_0 , приходящиеся на единицу длины окружности в длине цилиндрического стального резервуара, наполненного жидкостью (рис. 91), если $r = 9$ м, $d = 7,8$ м, $h = 35$ см, $\gamma = 1$ г/см³ и $\mu = 0,25$.

Ответ. $M_0 = 5585$ кг см/см, $Q_0 = 225$ кг/см.

10. Решить задачу 6, предполагая, что кольцо насажено на левый конец трубы. Сопротивлением кольца кручению можно пренебречь.

Указание. Воспользоваться результатами, полученными в задаче 6, стр. 29.

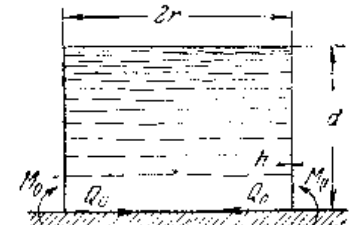


Рис. 91.

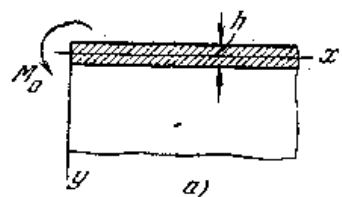
27. Температурные напряжения в цилиндрических оболочках

Если цилиндрическая оболочка со свободными краями испытывает равномерное изменение температуры, то никаких температурных напряжений не возникает. Но если края оперты или заземлены, это будет препятствовать свободному расширению оболочки и на краях возникнут местные напряжения изгиба. Предположим, например, что края длиной цилиндрической трубы заземлены; тогда поперечные силы и изгибающие моменты на краях получатся такие же, как в задаче 2, п. 26. Необходимо лишь подставить в уравнение этой задачи величину $\delta = r\alpha t$, представляющую собой увеличение радиуса оболочки вследствие температурного расширения. Если длина трубы невелика и одновременно должны рассматриваться оба конца, то изгибающие моменты и поперечные силы могут быть легко получены при помощи результатов задачи 8 п. 26. Рассмотрим теперь случай, когда происходит изменение температуры в радиальном направлении. Предположим, что t_1 и t_2 — постоянные температуры цилиндрической стенки соответственно на внутренней и наружной поверхностях и что изменение температуры по толщине стенки происходит по линейному закону. Тогда в точках, удаленных на большое расстояние от концов оболочки, не будет изгиба, и напряжения можно вычислить при помощи уравнения (87), стр. 81, выведенного для пластинки с заделанными краями. Эта формула дает следующее наибольшее напряжение от изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha E (t_1 - t_2)}{2(1 - \nu)}. \quad (12)$$

(Предполагается, что $t_1 > t_2$.) На внешней поверхности оболочки будет действовать растягивающее напряжение.

Вблизи концов оболочки будет некоторый ее изгиб, и полные температурные напряжения получатся путем наложения напряжений, возникающих вследствие этого изгиба, на напряжения, определяемые уравнением (а). Рассмотрим в качестве примера напряжения на свободном конце длинной цилиндрической трубы. При вычислении напряжений в этом случае заметим, что напряжения на краю, представленные уравнением (а), складываются в равномерно распределенные моменты M_0 (рис. 92, а) величиной



Чтобы иметь свободный край, нужно наложить моменты той же величины, но противоположного направления (рис. 92, б). Следовательно, и температурные напряжения на свободном крае получаются путем наложения на напряжения, определяемые уравнением (а), напряжений, вызываемых показанными на рис. 92, б моментами. Эти

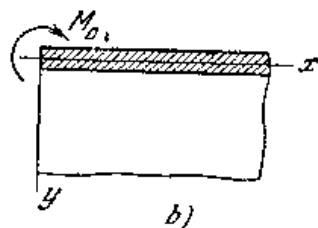


Рис. 92.

последние можно легко получить, рассматривая изгиб элементарной полоски и затем пользуясь уравнением (11), стр. 21, которое дает

$$y = -\frac{M_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad (c)$$

где β определяется по формуле (123). Наибольший прогиб, получаемый на свободном конце ($x=0$), равняется

$$y_{\max} = -\frac{M_0}{2\beta^2 D}, \quad (d)$$

а соответствующие окружные напряжения

$$\frac{M_0}{2\beta^2 D} \frac{E}{r} = \frac{E\alpha(t_1 - t_2)}{2\sqrt{3}(1-\mu)} \sqrt{1-\mu^2}. \quad (e)$$

Изгибающий момент, действующий на конце элементарной полоски, определяется по уравнению (b). Изгибающие моменты, препятствующие искажению поперечных сечений полоски при изгибе, будут равняться

$$\mu M_0 = \mu \frac{\alpha E (t_1 - t_2) h^2}{12(1-\mu)}. \quad (f)$$

Наибольшее температурное напряжение действует на наружной поверхности трубы в окружном направлении и состоит из трех частей: 1) напряжения, определяемого по выражению (а), 2) напряжения, определяемого по выражению (е), и 3) напряжения, вызываемого моментами, определяемыми по выражению (f). Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha E (t_1 - t_2)}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{3}} - \mu \right). \quad (125)$$

При $\mu=0,3$ это напряжение приблизительно на 25% больше, чем напряжение, определяемое по уравнению (а), вычисленное в точках на большом расстоянии от концов. Поэтому мы можем заключить, что если имеет место трещина в хрупком материале, как, например, в стекле, вследствие разности температур $t_1 - t_2$, то она начнется с края и будет проходить в осевом направлении. Подобным способом можно также вычислить напряжения в случаях, когда края зашпелены или оперты¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Найти температурные напряжения, возникающие в длинной стальной трубе с зашпеленными краями, если $r=60$ см, $h=1,2$ см, $\mu=0,3$, коэффициент температурного линейного расширения $\alpha=125 \cdot 10^{-7}$ и увеличение температуры трубы 55°C .

Решение. При данных размерах мы находим

$$\beta = 0,151 \text{ см}^{-1}, \quad D = 316 \cdot 10^3 \text{ кг см}.$$

Свободное удлинение радиуса трубы вследствие повышения температуры равно $\delta = \alpha r (t - t_0) = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 55 = 4125 \cdot 10^{-9}$ см. Подставляя в формулы задачи 2 предыдущего параграфа, находим поперечную силу и изгибающий момент, приходящиеся на единицу длины окружности в заделанном конце:

$$Q_0 = 4\beta^2 D = 173,2 \text{ кг/см},$$

$$M_0 = 2\beta^2 D = 577,5 \text{ кг см/см}.$$

По значениям Q_0 и M_0 можно легко вычислить напряжения в осевом и окружном направлениях в заделанном конце. (Предполагается, что труба может свободно расширяться в осевом направлении.)

2. Решить предыдущую задачу, предполагая, что края свободно оперты.

3. Стальная труба тех же размеров, что и в задаче 1, имеет температуры t_1 и t_2 соответственно на внутренней и наружной поверхности. Найти наибольшее напряжение в трубе, если $t_1 - t_2 = 55^\circ \text{C}$ и края свободны.

Ответ. $\sigma_{\max} = 1250 \text{ кг/см}^2$.

4. Решить предыдущую задачу, предполагая, что края трубы были зашпелены, когда труба имела постоянную температуру, равную $(t_1 + t_2)/2$.

28. Кручение круглого кольца под действием моментов, равномерно распределенных по его оси

Имеются случаи, когда круглое кольцо постоянного поперечного сечения подвергается действию скручивающих моментов, равномерно распределенных по его оси²⁾. Рассматривая половину кольца (рис. 93, а) как свободное тело, мы заключаем, что из условия равновесия мо-

¹⁾ Несколько примеров такого рода разобрано С. Н. Кеп'гом, Trans. A. S. M. E., т. 53, стр. 167, 1931. Случай изменения температуры в осевом направлении разобран в книге: S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells, стр. 423, 1940 (русский перевод, 1946 и 1963).

²⁾ Примерами таких задач является расчет напряжений в удерживающих кольцах коммутаторов электрических машин и расчет напряжений во фланцах труб.

ментов относительно диаметра Ox изгибающий момент, действующий в поперечных сечениях m и n , должен быть равен

$$M = M_k a, \quad (з)$$

где a — радиус оси и M_k — скручивающая пара, приходящаяся на единицу длины оси.

Рассмотрим теперь деформацию кольца. Из условий симметрии можно заключить, что при кручении каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на один и тот же угол θ , который в последующем изложении будем считать малым¹⁾. Пусть C будет центр вращения (рис. 93, б) и B — точка в поперечном сечении, находящаяся на расстоянии ρ от C . Вследствие поворота поперечного сечения точка B описывает малую дугу $\overline{BB_1} = \rho\theta$. Благодаря этому перемещению радиус продольного волокна кольца, которое перпендикулярно сечению в точке B , увеличивается на $\overline{B_2B_1}$. Если координатные оси приняты, как указано на рисунке, из подобия треугольников BB_1B_2 и BDC имеем

$$\overline{B_1B_2} = \overline{BB_1} \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \rho\theta \frac{y}{\rho} = \theta y. \quad (б)$$

Рис. 93.

Рассмотрим сначала случай, в котором размеры поперечного сечения кольца малы по сравнению с радиусом a оси. Тогда радиус любого волокна кольца можно без большой погрешности принять равным a , и относительное удлинение волокна B благодаря перемещению, определяемому по уравнению (б), будет равно

$$\varepsilon = \frac{\theta y}{a}. \quad (в)$$

Если не имеется бокового давления между волокнами кольца, то напряжения, соответствующие этому удлинению ε волокна, равняются

$$\sigma = \frac{E\theta y}{a}. \quad (д)$$

Теперь из условий равновесия половины кольца следует, что сумма всех нормальных усилий, действующих по поперечному сечению

¹⁾ Общее решение задачи, когда угол θ не мал, дано R. Grammel, Z. angew. Math. u. Mech., т. 3, стр. 429 и т. 7, стр. 198, 1927. См. также книгу С. В. Биезено и R. Граммеля, Technische Dynamik, т. 1, стр. 430, 1953.

кольца, должна равняться нулю, а момент этих усилий относительно оси x должен равняться M (см. выражение (а)). Если через dF обозначить элементарную площадь поперечного сечения, то указанные условия равновесия напишутся так:

$$\int_F \frac{E\theta y}{a} dF = 0; \quad \int_F \frac{E\theta y^2}{a} dF = M, \quad (е)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь F поперечного сечения. Первое из этих уравнений показывает, что центр тяжести поперечного сечения должен быть на оси x ; из второго уравнения находим

$$\theta = \frac{Ma}{EJ_x} = \frac{M_k a^2}{EJ_x}, \quad (126)$$

где J_x — момент инерции площади поперечного сечения кольца относительно оси x . Подставляя это в уравнение (д), находим

$$\sigma = \frac{M_k a y}{J_x}, \quad (127)$$

т. е. закон распределения нормальных напряжений по поперечному сечению кольца тот же, что и в случае изгиба призматических стержней; напряжение пропорционально расстоянию от нейтральной оси x , и наибольшее напряжение имеет место в точках, наиболее удаленных от оси.

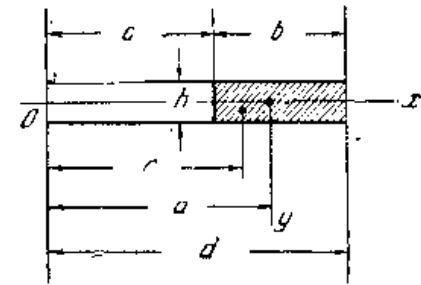


Рис. 94.

В качестве второго примера рассмотрим кольцо прямоугольного поперечного сечения (рис. 94), ширина b которого не мала по сравнению с радиусом a оси. Пусть c и d соответственно означают внутренний и наружный радиусы кольца, а r — радиус какого-либо волокна кольца; предположим, как выше, что деформация кольца заключается в повороте его поперечного сечения¹⁾ на угол θ . Относительное удлинение волокна при радиусе r и соответствующее ему напряжение будут

$$\varepsilon = \frac{\theta y}{r}; \quad \sigma = \frac{E\theta y}{r}. \quad (и)$$

Уравнение равновесия, аналогичное второму из уравнений (е), получится в следующем виде:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_c^d \frac{E\theta y^2 dr dy}{r} = M;$$

¹⁾ При этом рассмотрении возможность искажения поперечного сечения исключается. Соответствующая погрешность мала при условии, если $d/c < 1,5$. См. A. M. Wahl, цит. на стр. 99.

Интегрируя, находим

$$\frac{Eh^3}{12} \ln \frac{d}{c} = M,$$

откуда

$$\theta = \frac{12M}{Eh^3 \ln \frac{d}{c}} = \frac{12M_k a}{Eh^3 \ln \frac{d}{c}}. \quad (128)$$

Подставляя это значение во второе из формул (f), получаем

$$\sigma = \frac{12Mv}{h^3 r \ln \frac{d}{c}}.$$

Наибольшее напряжение имеет место во внутренних углах кольца, где $r = c$ и $v = h/2$:

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2 c \ln \frac{d}{c}} = \frac{6M_k a}{h^2 c \ln \frac{d}{c}}. \quad (129)$$

Если b мало, то уравнение (128) можно легко привести к виду уравнения (126). Таким образом, полагая $d = a + (b/2)$ и $c = a - (b/2)$, находим

$$\ln \frac{d}{c} = \ln \frac{a + \frac{b}{2}}{a - \frac{b}{2}} \approx \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

При малых значениях отношения b/a этот логарифм приблизительно равен b/a . Подставляя это в выражение (128), приходим к уравнению (126).

Этими выводами можно воспользоваться при вычислении напряжений, возникающих в месте сопряжения трубы и фланца⁴⁾ под действием сил R (рис. 95). R есть сила, приходящаяся на единицу длины внутренней окружности трубы. Сила, приходящаяся на единицу длины внешней окружности фланца, равняется $R(c/d)$. Под действием этих сил поперечное сечение фланца повернется на угол θ , а стенка трубы изогнется, как показано на рис. 95, b пунктиром. Пусть M_0 и $Q_0 = P_0$ будут изгибающий момент и поперечная сила в месте сопряжения, приходящиеся на единицу длины внутренней окружности трубы. Значения этих величин можно найти из условий непрерывности в месте сопряжения трубы и фланца. Так как обычно фланец бывает очень жестким в плоскости, перпендикулярной к оси трубы, то радиальное перемещение, вызываемое во фланце силами Q_0 , ничтожно, и прогиб на конце трубы можно считать равным нулю. Угол поворота конца трубы равняется θ , т. е. углу поворота поперечного

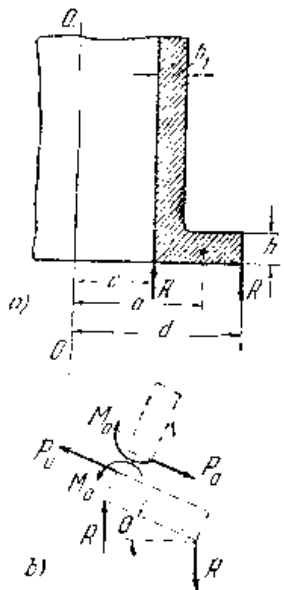


Рис. 95.

⁴⁾ Другой метод вычисления этих напряжений дан Е. О. Waters'ом, J. Appl. Mech., т. 59, стр. 161, 1937. См. также J. D. Mattimore, N. O. Smith-Petersen and H. C. Bell, Trans. A. S. M. E., т. 60, стр. 297, 1938. Этот метод был распространен на нецилиндрические оболочки G. Hogvaay and I. M. Clausen, см. статью № 53-A-43, представленную на годичное собрание Американского о-ва инженеров-механиков, декабрь 1953.

сечения фланца. Тогда уравнения (11) и (12) (см. стр. 21) превращаются в следующие уравнения для определения M_0 и Q_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - \beta M_0) &= 0; \\ -\frac{1}{2\beta^2 D} (Q_0 - 2\beta M_0) &= \theta. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений дает

$$Q_0 = \beta M_0. \quad (g)$$

Тогда

$$M_0 = 2\beta D \theta \quad \text{и} \quad Q_0 = 2\beta^2 D \theta. \quad (h)$$

Для трубы толщиной h_1 и внутренним радиусом c мы находим β по формуле (123)

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{c^2 h_1^3}}. \quad (i)$$

(Если толщина трубы мала, то разницей между внутренним радиусом и радиусом срединной поверхности можно пренебречь.) Скручивающий момент, приходящийся на единицу длины фланца и вызываемый показанными на рисунке силами, равняется

$$M_k = \frac{c}{a} \left[R(d-c) - M_0 - P_0 \frac{h}{2} \right] = \frac{c}{a} \left[R(d-c) - M_0 - M_0 \frac{h}{2} \beta \right]. \quad (j)$$

Подставляя это в выражение (128), получаем угол θ , а затем из первой формулы (h) находим

$$M_0 = 2\beta D - \frac{12c}{Eh^3 \ln \frac{d}{c}} \left[R(d-c) - M_0 - M_0 \frac{h}{2} \beta \right].$$

Заменяя D его значением $Eh_1^3/12(1-\mu^2)$, мы получаем

$$M_0 = \frac{R(d-c)}{1 + \frac{3h}{2} + \frac{1-\mu^2}{2\beta c} \left(\frac{h}{h_1} \right)^3 \ln \frac{d}{c}}. \quad (130)$$

Если даны размеры трубы, коэффициент Пуассона и сила R , то из формул (130) и (g) мы сможем вычислить величины M_0 и Q_0 , а затем, зная их, можем найти напряжения изгиба в трубе, как указано в п. 28.

ЗАДАЧИ

1. Определить изгибающий момент M_0 и поперечную силу Q_0 в трубе, показанной на рис. 95, если $d = 15,5$ см, $c = 8,5$ см, $h = 3,5$ см, $h_1 = 2$ см, $\mu = 0,3$.

Решение. Из формулы (i) имеем

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{2,73}}{\sqrt{c h_1^3}} = 0,313 \text{ см}^{-1}.$$

Кроме того, $\ln \frac{d}{c} = 0,601$; $\frac{\beta h}{2} = 0,505$. Подставляя эти значения в выражение (130), получаем

$$M_0 = 0,467R(d - c), \quad Q_0 = \beta M_0 = 0,145R(d - c).$$

Наибольшее напряжение от изгиба в трубе получится из формулы $\sigma = \frac{6M_0}{h^2}$.

2. Найти выражение для малого прогиба конического кольца, показанного на рис. 96 и представляющего элемент пружины Белльвиля. R — нагрузка на единицу длины внутреннего контура кольца.

Решение. Возьмем, как и прежде, координатные оси x и y с началом координат в центре вращения C . Относительное удлинение и напряжение для какого-либо волокна радиуса r определяются уравнениями (i). Из условий равновесия половины кольца мы получаем

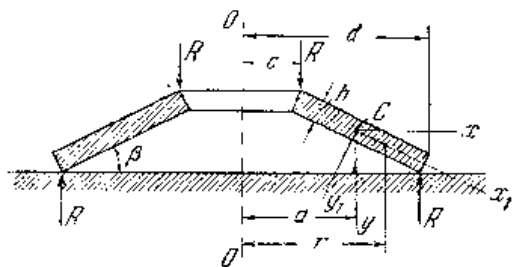


Рис. 96.

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{E\theta y}{r} dF &= 0, \\ \int_F \frac{E\theta y^2}{r} dF &= M = Rc(d - c). \end{aligned} \right\} (k)$$

Положение центра вращения можно определить по первому из этих

уравнений. Пусть a будет радиус в точке C , и допустим, что угол β конуса настолько мал, что мы можем принять $\sin \beta = \beta$; $\cos \beta = 1$. Тогда, принимая оси x_1 и y_1 параллельными сторонам прямоугольного поперечного сечения и замечая, что $y = y_1 + \beta x_1 = y_1 + \beta(r - a)$, перепишем первое из уравнений (k) в таком виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_c^d \frac{E\theta}{r} [y_1 + \beta(r - a)] dr dy_1 &= E\theta\beta h \left| r - a \ln r \right|_c^d = \\ &= E\theta\beta h \left(d - c - a \ln \frac{d}{c} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a = \frac{d - c}{\ln \frac{d}{c}}. \quad (l)$$

Второе из уравнений (k) преобразуем так:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_c^d \frac{E\theta}{r} [y_1 + \beta(r - a)]^2 dr dy_1 &= \\ = E\theta \left[\frac{h^3}{12} \ln \frac{d}{c} + \beta^2 h \left(\frac{d^3 - c^3}{2} - 2a(d - c) + a^2 \ln \frac{d}{c} \right) \right] &= Rc(d - c). \end{aligned}$$

Подставляя вместо a его значение (l), получаем следующее выражение для

вертикального прогиба верхнего края конуса:

$$f = \theta(d - c) = \frac{Rc(d - c)}{E \left[\frac{h^3}{12(d - c)} \ln \frac{d}{c} + \beta^2 h \left(\frac{d - c}{2} - \ln \frac{d}{c} \right) \right]}. \quad (m)$$

Из этого уравнения мы можем определить f , если нам будут известны размеры кольца, модуль упругости материала и нагрузка R . При этом выводе влиянием изменения угла β вследствие поворота на угол θ пренебрегалось¹⁾.

¹⁾ Для больших прогибов изменение угла β должно быть принято во внимание. В таких случаях прогиб уже не пропорционален грузу. См. статью: W. A. Brecht and A. M. Wahl, Trans. A. S. M. E. Appl. Mech. Div., т. 52, стр. 52, 1930. См. также статьи J. O. Almen and A. Laszlo, там же, т. 58, стр. 305, 1936 и S. Gross, Z. Ver. deut. Ing., т. 79, стр. 865, 1935.

ГЛАВА V

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ, ПЛАСТИНОК
И ОБОЛОЧЕК¹⁾29. Продольный изгиб призматических стержней
(простые случаи)

Рассмотрение одновременного действия изгиба и сжатия стержней (т. I, стр. 223) показало, что существует определенное *критическое значение* сжимающей силы, при котором можно незначительной поперечной нагрузкой вызвать большие прогибы. Для призматического стержня с шарнирно закрепленными концами и имеющего две плоскости симметрии²⁾ эта *критическая сжимающая сила* равна

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (a)$$

где J — наименьший главный момент инерции площади поперечного сечения. Опыты показывают, что когда сжимающая сила, приложенная к гибкому³⁾ стержню, приближается к этому значению, то начинается боковое выпучивание и оно настолько быстро происходит с возрастанием сжимающей силы, что величина нагрузки, равная критическому значению, обычно бывает достаточной для того, чтобы привести к потере несущей способности конструкции. Следовательно, эту *критическую нагрузку* нужно принимать за критерий прочности гибких колонн и стержней.

Из выражения (a) видно, что эта критическая нагрузка не зависит от предела прочности *материала* стержня, а зависит лишь от размеров конструкции и модуля упругости материала. Два одинаковых гибких стержня, один из которых имеет материалом высокопрочную

¹⁾ Подробные сведения по вопросу о продольном изгибе можно найти в книге S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, New York, 1936; русский перевод, 1946, 1955.

²⁾ Более общий случай, в котором продольный изгиб сочетается с кручением, рассмотрен ниже (стр. 231).

³⁾ Когда стержень недостаточно гибок, продольный изгиб происходит при сжимающих напряжениях, превосходящих предел пропорциональности. Этот случай разобран ниже (стр. 150).

сталь, а другой — обыкновенную строительную сталь, будут выпучиваться при одной и той же сжимающей силе, хотя прочность материала в этих двух случаях весьма различна. Уравнение (a) показывает также, что несущая способность стержня может быть увеличена путем увеличения момента инерции J . Это можно сделать без изменения площади поперечного сечения, путем размещения материала возможно дальше от главных осей инерции поперечного сечения. Следовательно, трубчатые сечения более экономичны, чем сплошные сечения для сжатых стержней. Уменьшая толщину стенки таких сечений и увеличивая поперечные размеры, мы можем увеличить их устойчивость. Однако существует нижний предел для толщины стенки, ниже которого сама стенка становится неустойчивой, и вместо продольного изгиба стержня как целого происходит местный продольный изгиб, который коробит стенки.

Эти рассуждения показывают, что *устойчивость упругих систем* или боковое выпучивание сжатых элементов имеет большое практическое значение. Это особенно справедливо во многих новейших конструкциях, где размеры поперечного сечения делаются все меньшими и меньшими благодаря использованию прочных материалов и в целях экономии веса. Во многих случаях разрушение инженерных сооружений можно объяснить упругой неустойчивостью, а не недостаточной прочностью материала.

В прежнем изложении (т. I, стр. 223) величина критической нагрузки стержня была получена путем рассмотрения одновременного действия сжимающих и изгибающих сил. Тот же результат можно получить, если допустить, что стержень сжимается только одним центрально приложенным грузом¹⁾. Рассмотрим случай стержня в виде гибкой вертикальной призмы, зашпленной внизу и нагруженной по оси сверху (рис. 97). Если груз P меньше, чем его критическое значение, то стержень остается прямым и испытывает лишь осевое сжатие. Эта прямая форма упругого равновесия *устойчива*, т. е. если приложить поперечную силу и вызвать малый прогиб, то прогиб исчезает, когда поперечная сила будет удалена, и

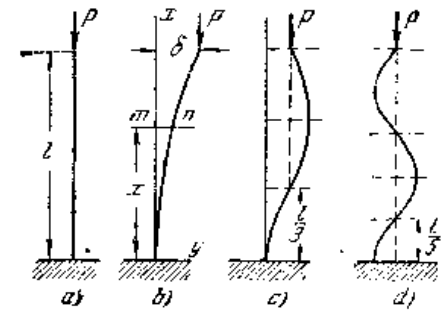


Рис. 97.

¹⁾ Значения критических грузов для различных условий на концах сжатого призматического стержня впервые были получены Л. Эйлером; см. Additamentum, «De curvis elasticis», в Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Lausanne, 1744. см. также Histoire de l'Académie, Berlin, т. 13, 1757. Английский перевод этой работы дан в Isis, № 58, т. 20, 1933.

стержень снова становится прямым. Увеличивая P постепенно, мы приходим к условию, при котором прямая форма равновесия становится неустойчивой и незначительная поперечная сила нагрузки вызывает поперечный прогиб, который не исчезает после удаления нагрузки. Тогда критическая нагрузка определится как осевая нагрузка, которая достаточна для того, чтобы удержать стержень в слегка изогнутом виде (рис. 97, *b*).

Эта нагрузка может быть вычислена с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси. Взяв ось, как указано на рис. 97, *b*, изгибающий момент в произвольном поперечном сечении x получим равным $P(\delta - y)$; дифференциальное же уравнение изогнутой оси будет¹⁾

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y). \quad (b)$$

Очевидно, что при свободном верхнем конце выпучивание стержня произойдет в плоскости *наименьшей жесткости*. Обозначая через EJ наименьшую жесткость при изгибе и полагая

$$p^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (c)$$

приводим уравнение (b) к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = p^2 \delta. \quad (d)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$y = \delta - C_1 \cos px + C_2 \sin px, \quad (e)$$

в котором C_1 и C_2 — постоянные, которые должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить следующим условиям в заделанном конце:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

Эти условия будут выполнены, если мы примем

$$C_1 = -\delta, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$y = \delta(1 - \cos px). \quad (f)$$

Условием на верхнем конце будет

$$(y)_{x=l} = \delta,$$

¹⁾ Для прогиба, показанного на рис. 97, *b*, $d^2 y/dx^2$ положительно, следовательно, мы пользуемся положительным знаком в правой части уравнения (b).

которое удовлетворяется, если $\cos pl = 0$ или если

$$pl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (g)$$

где n — целое число. Наименьшее значение pl , а следовательно и P , которое удовлетворяет уравнению (g), получается, если положить $n = 0$. Тогда, пользуясь уравнением (c), получим

$$pl = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (131)$$

Это и есть *критическая нагрузка* для стержня, представленного на рис. 97, *a*, т. е. наименьшая нагрузка, которая может удерживать стержень в слегка изогнутой форме.

При $n = 1, 2, \dots$ из уравнения (g) мы получаем

$$P = \frac{9\pi^2 EJ}{4l^2}, \quad P = \frac{25\pi^2 EJ}{4l^2}, \dots$$

Соответствующие изогнутые оси показаны на рис. 97, *c* и 97, *d*. Для формы, показанной на рис. 97, *c*, необходима сила в девять раз большая, чем критическая, а для формы, показанной на рис. 97, *d*, сила должна быть в 25 раз больше. Эти формы продольного изгиба являются неустойчивыми и не имеют практического значения, потому что конструкция теряет сопротивление, когда нагрузка достигнет значения, данного уравнением (131).

Критическая нагрузка для некоторых других случаев может быть легко получена из решения для предыдущего случая. Например, в случае стержня с шарнирно закрепленными концами (рис. 98) по условиям симметрии очевидно, что каждая половина стержня находится в тех же условиях, что и стержень, показанный на рис. 97, *b*. Следовательно, критическая нагрузка для этого случая получится путем подстановки в уравнение (131) $l/2$ вместо l , что дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (132)$$

Случай стержня с шарнирно закрепленными концами очень часто встречается в практических приложениях и называется *основным случаем* продольного изгиба призматического стержня.

В случае стержня с заделанными концами (рис. 99) возникают реактивные моменты, которые удерживают концы от поворота при продольном изгибе. Сочетание сжимающей силы и концевых моментов

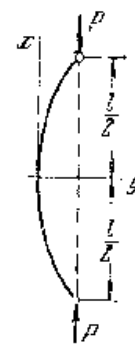


Рис. 98.

эквивалентно сжимающей силе P , приложенной эксцентрично (рис. 99). Имеются точки перегиба, где линия действия P пересекает изогнутую ось, поскольку изгибающий момент в этих точках равен нулю. Эти точки и средняя точка пролета разделяют стержень на четыре равные части, каждая из которых находится в тех же условиях, что и стержень, представленный на рис. 97, б. Следовательно, критическая нагрузка для стержня с заделанными концами найдется из уравнения (131) путем подстановки $l/4$ вместо l , что дает

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \quad (133)$$

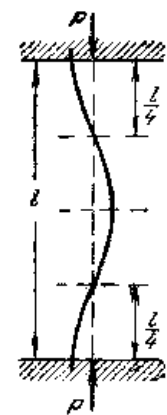


Рис. 99.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что стержень весьма гибок и напряжения, которые имеют место при продольном изгибе, остаются в пределах пропорциональности. Только при этом условии можно применять уравнение (б). Для того чтобы установить предел применимости формулы, выведенной выше для критических нагрузок, рассмотрим *основной случай* (рис. 98).

Разделив обе части формулы (132) на площадь F поперечного сечения стержня и обозначив через i наименьший радиус инерции, мы получим

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l} \right)^2. \quad (134)$$

Это уравнение применимо до тех пор, пока напряжение $\sigma_{кр}$ остается ниже предела пропорциональности материала. Если этот предел и модуль E для данного материала известны, можно по формуле (134) легко получить для каждого частного случая предельное значение отношения l/i , которое называется *гибкостью* стержня.

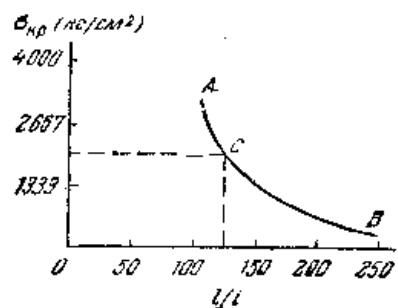


Рис. 100.

На рис. 100 зависимость (формула (134)) между гибкостью l/i и значением $\sigma_{кр}$ дается кривой ACB для строительной стали, имеющей $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Предполагая, что предел пропорциональности материала равняется 2000 кг/см^2 , мы заключаем, что лишь участок CB

кривой можно использовать для определения $\sigma_{кр}$.

Поступая точно таким же образом, как и выше, мы находим следующие уравнения для случаев, представленных на рис. 97 и 99:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{2l} \right)^2, \quad (135)$$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{\frac{1}{2}l} \right)^2. \quad (136)$$

Формулу для основного случая (131) можно применить и к этим случаям, если мы воспользуемся *приведенной длиной* l_1 вместо действительной длины стержня. В случае призматического стержня с одним заделанным и другим свободным концом приведенная длина (формула (135)) в два раза больше действительной длины, так что $l_1 = 2l$. В случае призматического стержня с обоими заделанными концами приведенная длина (формула (136)) равняется половине действительной длины или $l_1 = l/2$. Выразив для критического напряжения в общем случае можно, следовательно, представить в следующем виде:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{i}{\alpha l} \right)^2 = \pi^2 E \left(\frac{i}{l_1} \right)^2, \quad (137)$$

где α зависит от условий на концах стержня и иногда называется *коэффициентом длины*.

При изложении расчета колонн (гл. I, стр. 227) был рассмотрен основной случай колонн с шарнирно закрепленными концами. Полученные в этом случае сведения теперь могут быть применены к колоннам с другими условиями на концах, если вместо действительной длины l воспользоваться приведенной длиной l_1 . Таким образом, в каждом частном случае расчет колонны сводится к определению надлежащего значения *коэффициента длины*.

При выводе уравнения (f) для изогнутой оси после продольного изгиба наибольший прогиб δ остается неопределенным, т. е. при критической нагрузке стержень может иметь любой малый прогиб. Приведенная выше теория может быть применена только к *малым* прогибам, потому что только в этих случаях можно воспользоваться приближенным выражением d^2y/dx^2 для кривизмы вместо точного выражения

$$\frac{d^2y}{dx^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Решение точного дифференциального уравнения для изогнутой оси было найдено для некоторых случаев¹⁾; оно показывает, что в действительности не существует такой неопределенности в прогибе, как предполагалось выше. Например, для стержня с шарнирно закрепленными концами наибольший прогиб можно представить выражением²⁾

$$\delta = \frac{11\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} - 1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{P}{P_{кр}} - 1 \right) \right], \quad (138)$$

¹⁾ См. Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig, 1880. См. также Неймана, Traité des fonctions elliptiques, т. 2, стр. 192, 1888.

²⁾ См. R. v. Mises, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 435, 1924, см. также O. Dönke, Bautechnik, т. 4, стр. 747, 1926 и R. W. Burges, Phys. Rev. 1917.

которое показывает, что прогиб увеличивается очень быстро, когда нагрузка будет выше критического значения. Предполагая, например, что нагрузка будет на 1% больше чем $P_{кр}$, мы находим из выражения (138), что прогиб составляет приблизительно 9% длины l стержня. (Предполагается, что деформации лежат в пределах пропорциональности.)

Зависимость между нагрузкой и прогибом можно представить графически (рис. 101) кривой OAB , в которой нагрузка представлена ординатами, а прогибы абсциссами. До тех пор, пока нагрузка меньше чем $P_{кр}$, прогиб равен нулю. За этим пределом прогиб увеличивается быстро с возрастанием нагрузки. (Когда начинается текучесть, кривая AB уже не применима, и в дальнейшем выпучивание происходит, как указано на рис. 101 пунктирной линией BC .)

При опытных исследованиях явления выпучивания сжатых стержней найдено, что связь между прогибом и нагрузкой зависит в значительной степени от точности, с какой центрирована нагрузка, и от геометрии и однородности стержня. Кривая, изображающая зависимость между нагрузкой и прогибом, обычно подобна кривой OD на рис. 101. Вследствие неточностей различного рода искривление начинается при малых нагрузках, но прогибы возрастают очень медленно до тех пор, пока нагрузка значительно ниже критического значения. Как только нагрузка приближается к критическому значению, прогибы растут очень быстро. Чем точнее выполнен и нагружен стержень, тем ближе опытная кривая приближается к теоретической OAB .)

Рис. 101.

ЗАДАЧИ

1. Стальной стержень, прямоугольного поперечного сечения $2,5 \times 5$ см с шарнирно закрепленными концами сжимается вдоль оси. Определить наименьшую длину, при которой можно применить формулу (132), если $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² и предел пропорциональности равняется 2000 кг/см². Определить величину критического напряжения, если длина стержня равняется $1,5$ м.

Решение. Наименьший радиус инерции равен $i = 2,5/2 \sqrt{3}$ см; следовательно, наименьшая длина найдется из формулы (134)

$$2000 = \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{6,25}{12} \cdot \frac{1}{l_{\min}^2}$$

и $l_{\min} = 71,8$ см.

Критическое напряжение при $l = 1,5$ м из (134) будет $\sigma_{кр} = 457$ кг/см².

Очень близкое совпадение опытных и вычисленных значений критических нагрузок было получено Т. В. в. К а́ р т а́ н о м, Forschungsarb., № 81, 1910. См. также К. М е т т л е г, Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 357, 1926.

2. Решить предыдущую задачу, полагая, что стержень имеет круглое поперечное сечение диаметра $2,5$ см и концы его заделаны.

Ответ. Наименьшая длина равняется $1,25$ м. При $l = 1,5$ м $\sigma_{кр} = 1370$ кг/см².

3. Определить критическую сжимающую нагрузку для стойки с шарнирно закрепленными концами двутаврового сечения длиной $1,8$ м при $J = 64,4$ см⁴.

Ответ.

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{9,87 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 64,4}{180^2} = 39360 \text{ кг.}$$

30. Продольный изгиб призматических стержней (более сложные случаи)

В качестве примера более сложного случая продольного изгиба стержней рассмотрим центрально сжатую стойку с заделанным нижним концом и с шарнирно закрепленным верхним (рис. 102). Критическое значение сжимающей силы есть такое значение $P_{кр}$, которое может удерживать стойку в слегка изогнутой форме. Можно видеть, что в этом случае при продольном изгибе возникает поперечная реакция Q , и дифференциальное уравнение изогнутой оси получается в виде

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Q(l-x). \quad (a)$$

Общим решением этого уравнения при обозначении (с) из п. 29 является

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px + \frac{Q}{P}(l-x). \quad (b)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 и неизвестной реакции Q мы имеем следующие условия на концах:

$$(y)_{x=0} = 0, \quad (y)_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0.$$

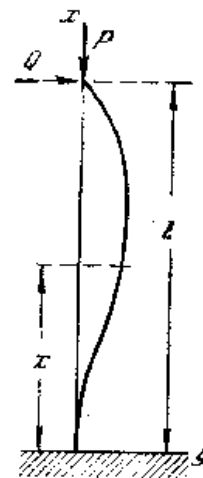


Рис. 102.

Подставляя значение y из уравнения (b), получаем по этим условиям

$$C_1 + \frac{Q}{P}l = 0, \quad C_1 \cos pl + C_2 \sin pl = 0, \quad pC_2 - \frac{Q}{P} = 0. \quad (c)$$

Определив постоянные C_1 и C_2 из первого и третьего уравнений, а затем подставив во второе, приходим к следующему трансцендентному уравнению для вычисления критической нагрузки:

$$\operatorname{tg} pl = pl. \quad (d)$$

Для решения этого уравнения полезен графический метод. На рис. 103 начерчены кривые, представляющие $\operatorname{tg} pl$ в функции от pl . Эти кривые асимптотически приближаются к вертикальным линиям $pl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$; при этих значениях $\operatorname{tg} pl$ становится бесконечным. Теперь корни уравнения (d) получаются как абсциссы точек пересечения вышеуказанных

кривых с прямой линией $y = pl$. Наименьший корень, полученный таким образом, равняется $pl = 4,493$. Тогда

$$P_{кр} = p^2 EJ = \frac{20,10 EJ}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,77l)^2}. \quad (139)$$

Эта критическая нагрузка является такой же, как для стойки с шарнирно закрепленными концами, имеющей приведенную длину $l_1 = 0,77l$.

В качестве второго примера рассмотрим стержень, лежащий на трех опорах и центральная сжимаемая сила P (рис. 104). При вычислении критического значения сжимающей силы последует наперву предыдущему определению и предположим, что $P_{кр}$ есть сила, которая может удержать стержень слегка искривленной формы. В результате искривления возникает изгибающий момент

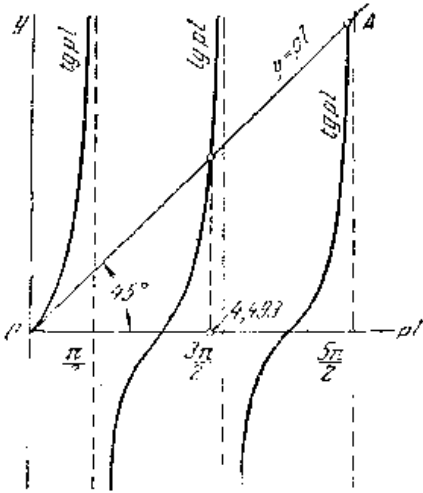


Рис. 103.

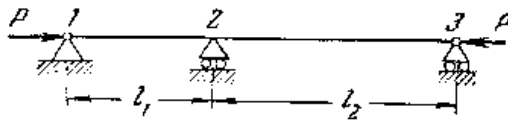


Рис. 104.

M_2 на средней опоре¹⁾, который может быть вычислен из уравнения (38), стр. 39, выведенного для неразрезных стержней. Замечая, что в нашем случае концы стержня шарнирно закреплены, получаем $M_1 = M_3 = 0$, и уравнение (38) напишется в следующем виде:

$$\left(\beta_1 \frac{l_1}{J_1} + \beta_2 \frac{l_2}{J_2} \right) M_2 = 0. \quad (e)$$

Это уравнение удовлетворяется, и искривленная форма стержня становится возможной, если

$$\beta_1 \frac{l_1}{J_1} + \beta_2 \frac{l_2}{J_2} = 0. \quad (f)$$

Здесь приняты следующие обозначения (см. выражения (36) и (23)):

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 3 \left[\frac{1}{(2u_1)^2} - \frac{1}{2u_1 \operatorname{tg} 2u_1} \right], \\ \beta_2 &= 3 \left[\frac{1}{(2u_2)^2} - \frac{1}{2u_2 \operatorname{tg} 2u_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

¹⁾ Исключение составляет тривиальный случай, когда два пролета одинаковы и поперечное сечение постоянно по всей длине. В этом случае $M_2 = 0$ на промежуточной опоре и каждый пролет находится в тех же условиях, что и стержень с шарнирно закрепленными концами.

$$u_1 = \frac{l_1}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}, \quad u_2 = \frac{l_2}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}. \quad (h)$$

Если размеры стержня даны, то из уравнений (h) известно отношение $u_1 : u_2$, а из уравнения (f) находим отношение $\beta_1 : \beta_2$, равное

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{l_2}{l_1} \frac{J_1}{J_2}. \quad (i)$$

Имея числовую таблицу функций β , мы можем легко решить это уравнение при соответствующих значениях u_1 и u_2 . Тогда критическое значение P получится из уравнения (h).

Возьмем, например, $J_1 = J_2 = J$ и $l_2 = 2l_1$. Тогда $u_2 = 2u_1$ и

$$\beta_1 : \beta_2 = -2. \quad (j)$$

Для того чтобы решить это уравнение, мы должны найти такое значение u_1 (по табличному аргументу $2u_1$), чтобы после удваивания аргумента его функция β_2 изменила знак и уменьшилась до половины численного значения функции β_1 . Пользуясь таблицей¹⁾ числовых значений β , мы легко найдем, что это условие удовлетворяется, если

$$2u_1 = 1,93.$$

Следовательно, из уравнений (h) находим

$$P_{кр} = \frac{1,93^2 EJ}{l_1^2} = \frac{3,72 EJ}{l_1^2} = \frac{14,9 EJ}{l_2^2}.$$

Видно, что значение критической нагрузки лежит между двумя значениями $\pi^2 EJ/l_1^2$ и $\pi^2 EJ/l_2^2$, вычисленными для отдельных пролетов, как если бы каждый представлял стержень с шарнирно закрепленными концами. Устойчивость более короткого пролета уменьшается благодаря действию более длинного пролета, в то время как устойчивость более длинного пролета увеличивается.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачу 1 п. 20, предполагая, что один конец стержня шарнирно закреплен, а другой защемлен, как показано на рис. 102.
2. Определить критическое значение силы P , которые сжимают вертикальные стержни прямоугольной рамы, показанной на рис. 105.

Решение. Симметричное вынуждение, показанное пунктиром на рис. 105, вызывает реактивные изгибающие моменты M_0 , которые сопротивляются свободному повороту концов вертикальных стержней. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

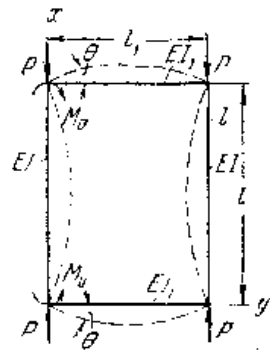


Рис. 105.

¹⁾ Такая таблица функций $\beta = \psi$ по аргументу $2u$ дана в книге автора «Theory of Elastic Stability», 1936 (русский перевод, 1946, 1955).

вертикального стержня будет

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + M_0.$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px + \frac{M_0}{P}. \quad (к)$$

Постоянные интегрирования и моменты M_0 определятся из следующих условий, основанных на симметричности формы искривленной рамы (рис. 105):

$$(y)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l/2} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 = \frac{M_0 l_1}{2EJ_1}.$$

Подставляя значение y из уравнения (к), получаем

$$C_1 + \frac{M_0}{P} = 0, \quad -C_1 p \sin \frac{pl}{2} + C_2 p \cos \frac{pl}{2} = 0, \quad C_2 p = \frac{M_0 l_1}{2EJ_1}.$$

Эти уравнения дают следующее трансцендентное уравнение для определения p и критической нагрузки:

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{Pl_1}{2pEJ_1} = 0,$$

или, пользуясь обозначением уравнения (с) п. 29, находим

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{J}{J_1} \frac{l_1}{l} \frac{pl}{2} = 0. \quad (л)$$

Когда $(J/J_1)(l_1/l)$ велико, т. е. когда сопротивление горизонтальных стержней рамы выпучиванию вертикальных стержней мало, то $\operatorname{tg} pl/2$ является большим отрицательным числом и $pl/2$ приближается к $\pi/2$. Тогда критическая нагрузка приближается к значению $\pi^2 EJ_1/l^2$, полученному прежде для стержня с шарнирно закрепленными концами (формула (132)).

Когда $(J/J_1)(l_1/l)$ мало, т. е. сопротивление горизонтальных стержней рамы выпучиванию вертикальных стержней очень велико, то $\operatorname{tg}(pl/2)$ представляет малое отрицательное число и $pl/2$ приближается к π . Тогда критическая нагрузка приближается к критическому значению $4\pi^2 EJ_1/l^2$, полученному прежде (формула (133)) для стержня с защемленными концами.

В случае квадратной рамы со всеми стержнями одинакового поперечного сечения ($l=l_1$, $J=J_1$) уравнение для определения критической нагрузки получается

$$\operatorname{tg} \frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} = 0,$$

откуда

$$\frac{pl}{2} = 2,029, \quad P_{кр} = \frac{16,47EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,774l)^2}. \quad (м)$$

Следовательно, в этом случае приведенная длина равняется 0,774*l*. (Кривые, подобные кривым, изображенным на рис. 103, можно использовать также и в этом случае.)

3. Решить предыдущую задачу, предполагая, что в дополнение к вертикальным силам P имеются две пары горизонтальных сил Q , которые вызывают скатие горизонтальных стержней рамы.

Указание. Так как горизонтальные стержни сжаты, то угол поворота, указанный на рис. 105, равняется ¹⁾ $\theta = \frac{M_0 l_1 \operatorname{tg} u}{2EJ_1 u}$, где $u^2 = \frac{Ql_1^2}{4EJ_1}$. Уравнение для вычисления критического значения P получается путем подстановки J_1 и $\operatorname{tg} u$ вместо J_1 в уравнение (л) задачи 2.

4. Стойка AB с шарнирно закрепленными концами (рис. 106) сжимается двумя силами P_1 и P_2 . Найти критическое значение силы $P_1 + P_2$, если $(P_1 + P_2)/P_1 = m$, $J_2/J_1 = n$ и $l_2/l_1 = r$.

Решение. Предполагая, что искривленная форма стойки будет такой, как показано на рис. 106 пунктиром, найдем, что горизонтальные реакции, вызываемые при выпучивании, будут равняться $Q = \delta P_2/l$. Дифференциальные уравнения верхнего и нижнего участков изогнутой оси будут

$$\left. \begin{aligned} EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= -P_1 y_1 - \frac{\delta P_2}{l} (l-x), \\ EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= -P_1 y_2 - \frac{\delta P_2}{l} (l-x) + P_2 (\delta - y_2). \end{aligned} \right\} \quad (н)$$

Пользуясь обозначениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_1}{EJ_1} &= p_1^2, \quad \frac{P_2}{EJ_2} = p_2^2, \\ \frac{P_1 + P_2}{EJ_2} &= p_3^2, \quad \frac{P_2}{EJ_1} = p_4^2, \end{aligned} \right\} \quad (о)$$

мы получаем следующие решения уравнений (н):

$$y_1 = C_1 \sin p_1 x + C_2 \cos p_1 x - \frac{\delta}{l} \frac{p_4^2}{p_1^2} (l-x),$$

$$y_2 = C_3 \sin p_2 x + C_4 \cos p_2 x + \frac{\delta}{l} \frac{p_4^2}{p_2^2} x.$$

Постоянные интегрирования получаются из условий на концах обеих частей искривленной стержня:

$$(y_1)_{x=0} = 0, \quad (y_1)_{x=l_2} = \delta, \quad (y_2)_{x=l_2} = \delta, \quad (y_2)_{x=0} = 0.$$

Из этих условий мы получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\delta (p_4^2 l + p_2^2 l_1)}{p_1^2 l (\sin p_1 l_2 - \operatorname{tg} p_1 l \cos p_1 l_2)}, \quad C_2 = -C_1 \operatorname{tg} p_1 l, \\ C_3 &= \frac{\delta (p_4^2 l - p_2^2 l_2)}{p_2^2 l \sin p_2 l_2}, \quad C_4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя в условие непрерывности

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=l_2} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=l_2},$$

получаем следующее трансцендентное уравнение для вычисления критических нагрузок:

$$\frac{p_1^2}{p_1^2} - \frac{p_1^2 l + p_2^2 l_1}{p_1 \operatorname{tg} p_1 l_1} = \frac{p_2^2}{p_2^2} + \frac{p_1^2 l - p_2^2 l_2}{p_2 \operatorname{tg} p_2 l_2}. \quad (п)$$

¹⁾ Это получается из уравнения (48), стр. 43 подстановкой $\operatorname{tg} u$ вместо $(h u)$.

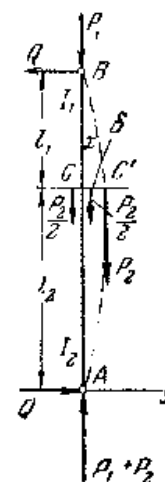


Рис. 106.

которое можно решить в каждом частном случае путем последовательных подстановок или построением графиков обеих частей уравнения и определением точек пересечения двух кривых. Взяв, например, $l_1 = l_2$, $J_1 = J_2 = J$ и $P_1 = P_2$, получим

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,87l)^2}.$$

5. Найти критическую нагрузку для колонны, заделанной внизу и свободной наверху, состоящей из двух призматических участков с моментами инерции J_1 и J_2 (рис. 107).

Решение. Если δ прогиб верха колонны, то дифференциальные уравнения для двух участков изогнутой оси будут

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P(\delta - y_1), \quad EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = P(\delta - y_2).$$

Пользуясь обозначениями (6), получаем решение этих уравнений в следующем виде:

$$y_1 = \delta - C \cos p_1 x + D \sin p_1 x, \\ y_2 = \delta (1 - \cos p_2 x).$$

Постоянные интегрирования получаются из условий

$$(y_1)_{x=l} = \delta, \quad (y_1)_{x=l_2} = (y_2)_{x=l_2}$$

которые дают

$$\delta + C \cos p_1 l + D \sin p_1 l = \delta, \\ \delta + C \cos p_1 l_2 + D \sin p_1 l_2 = \delta (1 - \cos p_2 l_2),$$

откуда

$$C = -D \operatorname{tg} p_1 l, \quad D = \frac{\delta \cos p_2 l_2 \cos p_1 l}{\sin p_1 l}.$$

Так как два участка изогнутой оси имеют одну и ту же касательную при $x = l_2$, то имеем уравнение

$$\delta p_2 \sin p_2 l_2 = -C p_1 \sin p_1 l_2 + D p_1 \cos p_1 l_2.$$

Подставляя вместо C и D найденные выше значения, окончательно получаем следующее уравнение для определения $P_{кр}$:

$$\operatorname{tg} p_1 l_1 \operatorname{tg} p_2 l_2 = \frac{p_1 l_1}{p_2 l_2}. \quad (q)$$

В частном случае, когда оба участка колонны будут одинаковы, мы имеем

$$p_1 l_1 = p_2 l_2 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

и уравнение (q) получается

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) = 1$$

или

$$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{4}$$

и $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$. Это критическая нагрузка для колонны постоянного поперечного сечения.

31. Энергетический метод определения критических сжимающих нагрузок¹⁾

Формула Эйлера, выведенная в п. 29, была получена путем решения дифференциального уравнения изогнутой оси для сжатого стержня с заданными условиями на концах. Имеются случаи, в которых это уравнение получается сложным и точное решение становится затруднительным. Тогда можно пользоваться приближенным методом, основанным на рассмотрении энергии системы.

В качестве простого примера рассмотрим колонну, заделанную внизу и несущую нагрузку сверху (рис. 97, а и 97, б). Прямолинейная форма равновесия сжатого стержня является *устойчивой*, если сжимающая сила P мала, но она *неустойчива* после того, как P достигнет своего критического значения, при котором начинается поперечное выпучивание. Это критическое значение P можно найти, сравнивая энергию системы в двух случаях: 1) когда стержень просто *сжат* и 2) когда он *сжат и изогнут*. Энергия деформации в изогнутом стержне больше, чем энергия деформации в прямом сжатом стержне, так как энергия изгиба должна быть прибавлена к энергии сжатия, которую можно считать постоянной для малых поперечных прогибов. Потенциальная энергия груза P также должна быть рассмотрена. Прогиб стержня сопровождается понижением точки приложения груза P , так что потенциальная энергия груза уменьшается. Пусть U — энергия деформации изгиба и U_1 — уменьшение потенциальной энергии груза. Если U_1 меньше, чем U , то прогиб стержня сопровождается увеличением потенциальной энергии системы. Это значит, что нужно было бы приложить некоторую дополнительную поперечную силу, чтобы произвести изгиб. В таком случае прямолинейная форма равновесия является *устойчивой*. С другой стороны, если $U_1 > U$, то прогиб стержня сопровождается уменьшением потенциальной энергии системы, и изгиб будет происходить без приложения какой-либо поперечной силы, т. е. прямолинейная форма равновесия будет *неустойчивой*. Поэтому критическое значение сжимающей силы получится из условия

$$U = U_1. \quad (140)$$

Для того чтобы вычислить величину критической нагрузки из этого уравнения, мы должны иметь выражения для U и U_1 . Когда стержень находится под действием сжимающей нагрузки, равной критической нагрузке ($p l = \pi/2$), то на основании уравнения (f) п. 29, стр. 126 уравнение изогнутой оси стержня будет

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (a)$$

¹⁾ См. статьи автора в Известиях Киевского политехнического института, 1910 и Ann. ponts et chaussées, Paris, 1913.

При этом значении y выражение потенциальной энергии изгиба получится равным

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^4}{64 l^3} EJ. \quad (b)$$

Понижение точки приложения нагрузки при изгибе равняется (см. стр. 48)

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{16 l}, \quad (c)$$

и, следовательно,

$$U_1 = P\lambda = \frac{\delta^2 \pi^2 P}{16 l}. \quad (d)$$

Подставляя значение (b) и (d) в уравнение (140), получаем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2},$$

что совпадает с формулой (131), полученной ранее.

В этом примере изогнутая ось (уравнение (a)) была заранее известна, и поэтому точное решение для критической нагрузки было получено из уравнения (140). В случаях, когда изогнутая ось неизвестна, приближенное значение критической нагрузки можно получить, взяв *подходящую кривую* (т. е. кривую, удовлетворяющую условиям на концах стержня) для изогнутой оси и поступая таким же образом, как описано выше.

Для того чтобы показать точность, которую можно достигнуть при помощи этого метода, рассмотрим снова предыдущую задачу. Предположим, например, что в случае, показанном на рис. 97, б, изогнутая ось является такой же, как для консоли, нагруженной на конце поперечной силой Q . Тогда из уравнения (97) т. 1, стр. 134, мы получаем $y = (Qx^2/6EJ)(3l - x)$. Это выражение нужно подставить в уравнение (b) для энергии деформации U изгиба, а также в уравнение (d) для U_1 , и мы получим

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{6EJ},$$

$$U_1 = P\lambda = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{P}{15} \frac{Q^2 l^3}{EJ}.$$

Подставляя в уравнение (140), получаем $P_{кр} = 2,5EJ/l^2$. Сравнивая этот результат с точной формулой (выражение (131)), мы видим, что ошибка, происходящая от этого приближения, составляет лишь около 10%.

Ошибка может быть значительно уменьшена и получится лучшее приближение, если мы возьмем для энергии деформации изгиба выражение

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 dx. \quad (e)$$

Подставив в это выражение

$$M = P(\delta - y) = P \left[\delta - \frac{Qx^2}{6EJ} (3l - x) \right] = P\delta \left[1 - \frac{x^2}{2l^2} (3l - x) \right], \quad (f)$$

мы найдем

$$U = \frac{P^2 \delta^2 17l}{2EJ 35}.$$

Уменьшение потенциальной энергии груза P равняется

$$U_1 = \frac{P}{15} \frac{Q^2 l^3}{EJ^2} = \frac{3P}{5} \frac{\delta^3}{l}.$$

Подставляя в уравнение (140), получаем

$$\frac{P^2 \delta^2 17l}{2EJ 35} = \frac{3P}{5} \frac{\delta^3}{l},$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{42 EJ}{17 l^2} = 2,4706 \frac{EJ}{l^2}.$$

Точное же значение

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2} = 2,4674 \frac{EJ}{l^2}.$$

Следовательно, ошибка приближенного решения составляет лишь 0,13%. Пользуясь уравнением (e) вместо уравнения (b) для энергии деформации, мы вводим в вычисления прогиба y предполагаемую кривую вместо производной $d^2 y/dx^2$. Так как y представляется с большей точностью при помощи предполагаемой кривой, чем $d^2 y/dx^2$, то второй метод вычисления дает лучшее приближенное значение для $P_{кр}$.

Энергетический метод обычно дает весьма удовлетворительное приближение при условии, что принятая кривая является надлежаще выбранной. Иногда мы можем сделать весьма грубое допущение для формы кривой и все же получим удовлетворительный результат. Например, мы можем принять в предыдущем примере изогнутую ось как параболу, определяемую уравнением $y = \frac{\delta x^2}{l^2}$. Тогда

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 \delta^2}{2EJ} \int_0^l \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^2 dx = \frac{P^2 \delta^2}{2EJ} \frac{8}{15} l,$$

$$U_1 = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{l} P.$$

Подставляя в уравнение (140), находим $\frac{P^2 \gamma^2}{2EJ} \frac{8}{15} l = \frac{2}{3} \frac{\gamma^2}{l} P$ и $P_{кр} = 2,5 \frac{EJ}{l^2}$. Таким образом, получается удовлетворительное приближение к критической нагрузке, хотя предполагаемая параболическая кривая не может рассматриваться как очень узкая. Она имеет приблизительно постоянную кривизну по длине, между тем как в действительной кривой кривизна пропорциональна изгибающему моменту. Она равняется нулю вверху стержня и имеет максимум внизу.

Применяя энергетический метод и пользуясь предполагаемой кривой, которая удовлетворяет условиям на концах, мы всегда получаем значение для критической нагрузки выше, чем истинное значение. Это следует из того факта, что действительная изогнутая ось искривленного стержня является такой, которая соответствует наименьшему сопротивлению стержня. Только по чистой случайности предполагаемая кривая будет истинной кривой наименьшего сопротивления. Почти в каждом случае предполагаемая кривая будет отличаться от этой кривой наименьшего сопротивления, давая таким образом более высокие значения для критических нагрузок¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Решить задачу, показанную на рис. 102, предполагая, что изогнутая ось будет точно такой же, как для равномерно нагруженной балки с одним заделанным и другим шарнирно опертым концом.

2. Решить при помощи энергетического метода задачу 4 п. 30 (стр. 135), допустив $I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$.

Решение. Предполагая, что изогнутая кривая представляет синусоиду

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

найдем, что изгибающие моменты для двух участков кривой будут

$$M_1 = P_1 y + \frac{\delta P_2}{l} (l - x),$$

$$M_2 = (P_1 + P_2) y - \frac{\delta P_2 x}{l}.$$

Потенциальная энергия изгиба равняется

$$U = \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EJ_1} + \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EJ_2} = \frac{\gamma^2}{2EJ_1} \left(P_1^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} + P_1 P_2 \frac{2l}{\pi^2} \right) + \frac{\delta^2}{2EJ_2} \left[(P_1 + P_2)^2 \frac{l}{4} + P_2^2 \frac{l}{24} - P_2 (P_1 + P_2) \frac{2l}{\pi^2} \right].$$

¹⁾ Дальнейшее изложение энергетического метода см. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 120, 1936 (русский перевод, 1946, 1955).

Уменьшение потенциальной энергии вследствие появления точек приложения грузов P_1 и P_2 равняется

$$U_1 = \frac{P_1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \frac{P_2}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\gamma^2 \pi^2}{4l} \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2 \right).$$

Подставляя в уравнение (140) и пользуясь предыдущими обозначениями (стр. 135), получаем

$$(P_1 + P_2)_{кр} = \frac{\gamma^2 E J_2 P^2 (m+1)}{m + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 - \frac{8}{\pi^2} (m-1) + a \left[\frac{1}{m} + \frac{m}{6} \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 + \frac{8}{\pi^2} \frac{m-1}{m^2} \right]} \quad (141)$$

3. Решить задачу 5 п. 30 при помощи энергетического метода.

Ответ. Предполагая, что изогнутая кривая представится уравнением

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

получаем

$$P_{кр} = \pi^2 \frac{E J_2}{4l^2} \frac{1}{\frac{l_2}{l} + \frac{l_1}{l} \frac{J_2}{J_1} - \frac{1}{a} \left(\frac{J_2}{J_1} - 1 \right) \sin \frac{\pi l_2}{l}} \quad (142)$$

32. Продольный изгиб призматических стержней под действием равномерно распределенных осевых сил

Предполагая, что под действием равномерной осевой нагрузки имеет место небольшое боковое вынуживание (рис. 108), мы можем получить критическое значение нагрузки интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси. В этом случае уравнение не является таким простым, как было ранее, и его точное решение требует применения функций Бесселя¹⁾. Однако приближенное решение можно легко получить с помощью энергетического метода.

За приближенное выражение для изогнутой оси примем

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \quad (a)$$

которое представляет истинную кривую для случая, когда происходит продольный изгиб под действием сжимающей нагрузки, приложенной на конце. Изгибающий момент в поперечном сечении m , возникающий от нагрузки, лежащей выше этого сечения, равняется

$$M = \int_x^l q (x_1 - y) dx_1.$$



Рис. 108.

¹⁾ См. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 115, 1936; русский перевод: Устойчивость упругих систем, 1946, 1955.

Подставляя выражение (а) вместо y и полагая

$$\gamma = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right),$$

получаем после интегрирования по ξ

$$M = \delta q \left[(l-x) \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{2l}{\pi} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2l}\right) \right].$$

Подставляя это в выражение потенциальной энергии изгиба, получаем

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{\delta^2 q^2 l^3}{2EJ} \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4} \right). \quad (b)$$

При вычислении уменьшения потенциальной энергии распределенной нагрузки вследствие бокового выпучивания заметим, что благодаря наклону в поперечном сечении m элемента ds изогнутой оси верхняя часть груза испытывает перемещение вниз, равное

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

и соответствующее уменьшение потенциальной энергии будет

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 q (l-x) dx.$$

Полным же уменьшением потенциальной энергии от нагрузки при продольном изгибе станет

$$U_1 = \frac{q}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 (l-x) dx = \frac{\pi^2 \delta^2 q}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right). \quad (c)$$

Подставляя (b) и (c) в уравнение (140), мы получаем

$$\frac{\delta^2 q^2 l^3}{2EJ} \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4} \right) = \frac{\pi^2 \delta^2 q}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right),$$

откуда $(ql)_{кр} = \frac{7,89EJ}{l^2}$. Точным решением для этого случая является

$$(ql)_{кр} = \frac{7,83EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(1,122l)^2}. \quad (143)$$

Таким образом, ошибка в приближенном решении меньше 1%.

ЗАДАЧИ

1. Призматический стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 109) подвергается действию равномерно распределенной осевой нагрузки интенсивности q и осевой сжимающей силы P . Найти критическое значение P , предполагая, что уравнение для изогнутой оси дается в следующем виде:

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Ответ. $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} - \frac{ql}{2}$.

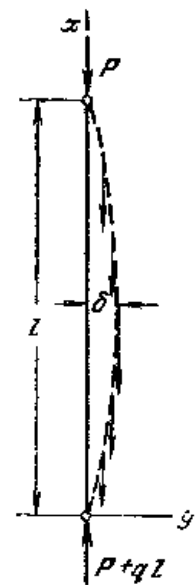


Рис. 109.

33. Продольный изгиб стержней переменного поперечного сечения

На рис. 110 показан стержень переменного поперечного сечения, симметричный относительно середины длины и имеющий две осевые плоскости симметрии. Средний участок имеет постоянное поперечное сечение с наименьшим моментом инерции, равным J_0 . К концам поперечное сечение изменяется, и наименьшие моменты инерции следуют закону

$$J = J_0 \left(\frac{x}{a} \right)^m, \quad (a)$$

где x и a — расстояния от некоторой фиксированной точки (рис. 110), m — число, зависящее от типа колонны. Когда средний участок представляет собой сплошной цилиндр, а концы — сплошные конусы, J изменяется пропорционально четвертой степени x и $m = 4$ в уравнении (а). Когда колонна имеет постоянную толщину в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 110, моменты инерции J относительно оси, параллельной плоскости рисунка, пропорциональны x и $m = 1$ в уравнении (а). (Когда колонна состоит из четырех уголков, связанных решеткой, как показано на рис. 111, площадь поперечного сечения остается постоянной, и J можно принять пропорциональным x^2 , так что $m = 2$ в уравнении (а).) Вычисления, сделанные для $m = 1, 2, 3, 4$, показывают ¹⁾, что критическая нагрузка в пределах упругости может быть представлена уравнением

$$P_{кр} = \alpha \frac{EJ_0}{l^2}, \quad (144)$$

в котором α — числовой коэффициент, зависящий от отношения h/l и J_1/J_0 , где $J_1 = J_0 (b/a)^m$ — момент инерции площади концевого поперечного сечения. В табл. 9 даны величины α для различных отношений в предположении, что концы колонны шарнирно закреплены. Можно видеть, что когда отношение h/l или отношение J_1/J_0 приближается к единице, то коэффициент α приближается к π^2 , и значения по формуле (144) сближаются со значениями по (132) для призматического стержня.

В качестве примера на применение этой таблицы рассмотрим деревянную стойку прямоугольного поперечного сечения длиной 2 м. Толщина стойки остается постоянной и равной 2 см. Ширина изменяется по прямолинейному закону и равняется 10 см в середине и 6 см на концах. Определить $P_{кр}$, если $E = 80\,000 \text{ кг/см}^2$. В этом случае $h/l = 0$; $m = 1$ и $J_1/J_0 = 6 \cdot 10 = 0,6$. Из табл. 9 находим $\alpha = 8,60$ и критическая нагрузка по формуле (144) будет

$$P_{кр} = 8,60 \frac{80\,000 \cdot 10 \cdot 2^3}{12 \cdot 200^2} = 115 \text{ кг.}$$

Для второго примера рассмотрим пирамидальную колонну (рис. 111), поперечное сечение которой состоит из четырех уголков $90 \times 90 \times 10$ мм. Наружная ширина колонны на концах равна 30 см,

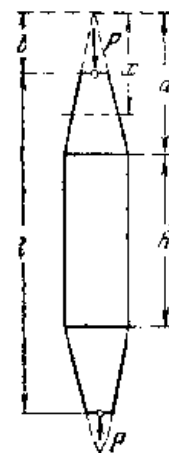


Рис. 110.



Рис. 111.

¹⁾ См. А. Н. Динник, Вестник инженеров, 1927. Таблица 9 взята из этой статьи.

Таблица 9

Коэффициент α в формуле (144)

$J_1 J_2$	h/l	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
0,1	$m=1$	6,48	7,58	8,68	9,46	9,82	π^2
	$m=2$	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	*
	$m=3$	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	*
	$m=4$	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	*
0,2	$m=1$	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	*
	$m=2$	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	*
	$m=3$	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	*
	$m=4$	6,02	7,20	8,42	9,38	9,86	*
0,4	$m=1$	7,87	8,60	9,19	9,70	9,84	*
	$m=2$	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	*
	$m=3$	7,52	8,38	9,10	9,63	9,84	*
	$m=4$	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	*
0,6	$m=1$	8,60	9,12	9,55	9,74	9,85	*
	$m=2$	8,51	9,03	9,48	9,71	9,85	*
	$m=3$	8,50	9,02	9,47	9,71	9,85	*
	$m=4$	8,47	9,01	9,45	9,71	9,85	*
0,8	$m=1$	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86	*
	$m=2$	9,24	9,50	9,66	9,82	9,86	*
	$m=3$	9,23	9,50	9,66	9,81	9,86	*
	$m=4$	9,23	9,49	9,66	9,81	9,86	*
1		π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	*

a в среднем 50 см. Длина колонны равняется 20 см. Определить критическую нагрузку для этой колонны, принимая для строительной стали $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и полагая, что решетки из стержней настолько жестки, что позволяют применять формулу (144), выведенную для сплошных стержней. Площадь и моменты инерции поперечного сечения $F = 4 \times 17,2 = 68,8 \text{ см}^2$; $J_1 = 4 [128 + 17,2 (15 - 2,59)^2] = 11 075 \text{ см}^4$; $J_2 = 4 [128 + 17,2 (25 - 2,59)^2] = 35 635 \text{ см}^4$. Взяв $J_1 J_2 = 0,3$, $m \approx 2$ и $h/l = 0$, найдем из табл. 9 путем интерполирования $\alpha \approx 7$. Тогда по формуле (144) получим $P_{кр} = 7 \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 35 635}{2000^2} = 122 623 \text{ кг}$ и

$$\sigma_{кр} = \frac{122 623}{68,8} = 1782 \text{ кг/см}^2.$$

34. Влияние поперечной силы на величину критической нагрузки

В предыдущих выводах формул для критических нагрузок мы пользовались дифференциальным уравнением изогнутой оси (см. стр. 126), в котором влиянием поперечной силы на прогиб пренебрегалось. Но когда произойдет выпучивание, поперечные сечения стержня уже не будут перпендикулярны сжимающей силе и в этих сечениях будут действовать поперечные силы. Влияние этих сил можно оценить с помощью энергетического метода, изложенного в п. 31. При использовании этого метода к энергии изгиба должна быть добавлена энергия сдвига при вычислении энергии деформации U вследствие продольного изгиба.

Пусть AB (рис. 112) сплошного сечения стойка с шарнирно закрепленными концами, изогнутая действием сжимающих сил P . Величины изгибающего момента и поперечной силы в каком-либо поперечном сечении mn будут

$$M = Py; \quad Q = P \frac{dy}{dx}. \quad (a)$$

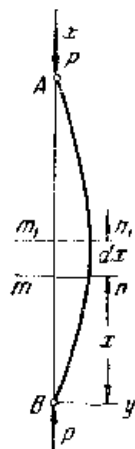


Рис. 112.

Из предыдущему (см. т. I, § 69) потенциальная энергия, накопленная в элементе стержня, равняется

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{\alpha Q^2 dx}{2GF}, \quad (b)$$

где F — площадь поперечного сечения, α — числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (см. т. I, стр. 150). Перемещение сечения mn относительно m_1n_1 благодаря сдвигу здесь принято равным $(\alpha Q/GF) dx$, и второй член правой части уравнения (b) представляет потенциальную энергию сдвига элемента. При помощи уравнений (a) и (b) найдем, что потенциальная энергия, накопленная в стержне при продольном изгибе, равняется

$$U = \int_0^l \frac{P^2 y^2 dx}{2EI} + \int_0^l \frac{\alpha P^2}{2GF} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx, \quad (c)$$

Уменьшение потенциальной энергии груза равняется

$$U_1 = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx. \quad (d)$$

Допуская, что изогнутая ось искривленного стержня представляет собой синусоиду

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (e)$$

и подставляя это значение в выражения (с) и (d), получаем

$$\left. \begin{aligned} U &= \delta^2 \frac{P^2 l}{4EJ} + \delta^2 \frac{P^2 l}{4GF} \frac{\alpha \pi^2}{l^2}, \\ U_1 &= \delta^2 \frac{P \pi^2}{4l}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Тогда уравнение (140) дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{EJ}{GF} \frac{\alpha \pi^2}{l^2}}. \quad (g)$$

Сравнение с формулой Эйлера (уравнение (132)) показывает, что благодаря действию сдвига критическая нагрузка уменьшается в отношении

$$\frac{1}{1 + \frac{EJ}{GF} \frac{\alpha \pi^2}{l^2}}. \quad (145)$$

Если мы положим

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_e, \quad \frac{GF}{\alpha} = P_d, \quad (h)$$

то формула (g) примет вид

$$P_{кр} = P_e \frac{1}{1 + \frac{P_e}{P_d}}. \quad (146)$$

Для сплошных стержней P_d весьма велико по сравнению с P_e , и влиянием поперечной силы можно пренебречь. В случае составных стержней, особенно когда применяются соединяющие планки или распорки (см. рис. 114, а), P_d может получиться того же порядка, что и P_e , и в этом случае уже нельзя пренебречь влиянием поперечной силы. Эта задача рассматривается в следующем параграфе.

35. Продольный изгиб составных стержней¹⁾

Составные стержни иногда применяются в стальных конструкциях. Их способность сопротивляться нагрузкам всегда меньше, чем сплошных колонн, имеющих ту же площадь поперечного сечения и ту же гибкость, т. е. отношение l/d , и зависит главным образом от конструкции решетки составных стержней, от размещения распорок и планок. Это уменьшение критических напряжений объясняется главным образом тем обстоятельством, что в случае составных колонн поперечные

¹⁾ См. F. Engesser, Zentr. Bauverwalt., стр. 483, 1891 и стр. 609, 1907; L. Prandtl, Z. Ver. deut. Ing., 1907, а также статью автора в Известиях Киевского политехнического института, 1908. Эти статьи рассматривают вопрос о продольном изгибе составных стержней в связи с потерей устойчивости сжатого стержня Киевского моста.

силы оказывают значительно большее влияние на прогибы, чем в случае сплошных стержней. Чтобы оценить влияние поперечной силы на критическую нагрузку, можно применить к составным стержням формулу (146), которая была выведена для сплошных стержней. Пусть P_e , как и ранее, будет критическая нагрузка, определяемая формулой (132). В случае сплошных стержней P_d в формуле (146) имеет простой физический смысл, а именно отношение Q/P_d представляет собой дополнительный угол наклона γ изогнутой кривой, вызываемый поперечными силами. P_d также имеет то же значение в случае составных стержней при условии, что число панелей велико. Чтобы определить P_d в каком-либо частном случае, мы должны исследовать боковые перемещения, вызванные поперечными силами.

Рассмотрим сначала панель составного стержня, показанного на рис. 113, а. Перемещение сдвига зависит от удлинения и укорочения диагоналей и распорок каждой панели (рис. 113, б). Положим, что узлы являются шарнирными; удлинение диагонали, вызываемое поперечной силой Q , равняется $Qa(\sin \varphi \cos \varphi / EF_d)$, где φ — угол между распоркой и диагональю, $Q/\cos \varphi$ — растягивающее усилие в диагонали, $a/\sin \varphi$ — длина диагонали, F_d — площадь поперечного сечения двух диагоналей. Соответствующее боковое перемещение (рис. 113, б) будет

$$\delta_1 = \frac{Qa}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d}. \quad (a)$$

Укорочение распорки и соответствующее боковое перемещение (рис. 113, с) равно

$$\delta_2 = \frac{Qb}{EF_b}, \quad (b)$$

где b — длина распорки, F_b — площадь поперечного сечения двух распорок.

Из выражений (a) и (b) получаем угловое перемещение, вызываемое поперечной силой Q :

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Q}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{Qb}{aEF_b}.$$

Используя ранее введенное соотношение $Q/P_d = \gamma$, находим

$$\frac{1}{P_d} = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{b}{aEF_b}.$$

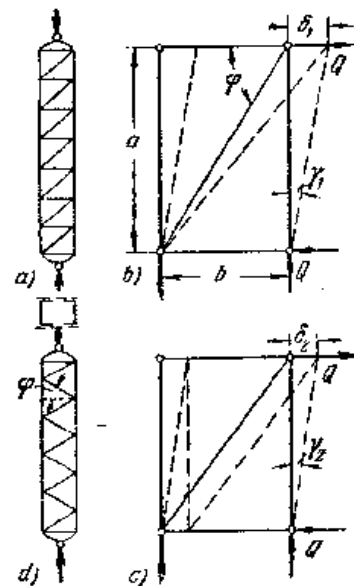


Рис. 113.

Подставляя это в формулу (146), получаем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{b}{aEF_b} \right)} \quad (147)$$

Если площади сечений F_d и F_b очень малы по сравнению с площадью поперечного сечения швеллеров (рис. 113, а), критическая нагрузка (выражение (147)) может быть значительно меньше той, которая получается по формуле Эйлера (132).

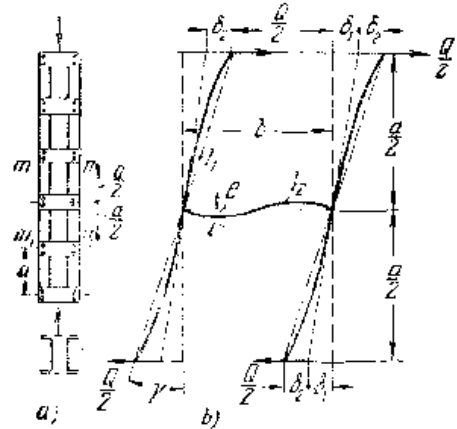


Рис. 114.

Выражение (147) можно также применить в случае, представленном на рис. 113, d, если угол φ измерять как показано на рисунке, и исключить при этом член, обусловленный деформацией распорок.

В случае стержня с соединениями только из планок, как на рис. 114, а, для определения бокового перемещения от поперечной силы Q мы должны рассмотреть деформацию участка стержня, вырезанного поперечными сечениями m и m_1 . Допустим, что изогнутые оси швеллеров имеют точки перегиба в этих сечениях; условия изгиба будут отвечать показанным на рис. 114, b. (Растягивающие и сжимающие усилия, действующие на швеллеры, на рисунке не показаны.) Прогиб состоит из двух частей: из перемещения δ_1 вследствие изгиба планки и перемещения δ_2 вследствие изгиба швеллеров. По концам планки действуют моменты $Q a/2$, и соответствующий угол поворота θ (см. уравнения (103) и (104) т. I, стр. 141) равенся

$$\theta = \frac{Qa}{2} \frac{b}{3EJ_2} - \frac{Qa}{2} \frac{b}{6EJ_2} = \frac{Qab}{12EJ_2},$$

где b — длина планок и EJ_2 — их жесткость при изгибе. Боковое перемещение δ_1 , вызванное изгибом планок, равеняется

$$\delta_1 = \theta \frac{a}{2} = \frac{Qa^2 b}{24EJ_2} \quad (c)$$

Перемещение δ_2 можно вычислить по формуле для консоли

$$\delta_2 = \frac{Q}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{Qa^3}{48EJ_1} \quad (d)$$

Полное угловое перемещение, вызываемое поперечной силой Q , равеняется

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Qab}{12EJ_2} + \frac{Qa^2}{24EJ_1},$$

по так как $Q/P_d = \gamma$, получаем

$$\frac{1}{P_d} = \frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1},$$

и формула (146) для определения критической нагрузки становяется

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1} \right)}, \quad (148)$$

где по-прежнему $\pi^2 EJ/l^2$ представляют критическую нагрузку, вычисленную для сплошной колонны по формуле Эйлера. Можно видеть, что когда жесткость при изгибе планок мала, действительная критическая нагрузка будет гораздо меньше, чем нагрузка, определяемая по формуле Эйлера.

Из выражений (147) и (148) вытекает, что при вычислении критических нагрузок для составных колонн действительная длина колонны заменяется *приведенной длиной*, которая определяется в случае составной колонны (рис. 113) формулой

$$l_1 = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi EF_d} + \frac{b}{aEF_b} \right)},$$

а в случае колонны, составленной с помощью планок, как показано на рис. 114, формулой

$$l_1 = l \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_2} + \frac{a^2}{24EJ_1} \right)}.$$

Когда приведенная длина составной колонны определена, допускаемое напряжение получается, как для сплошной колонны с гибкостью, равной отношению l_1/l .

При проектировании составных колонн важное практическое значение имеет выбор размеров составных стержней и планок. В основу для определения напряжений в этих деталях при проектировании коротких колонн предполагается, что сжимающие силы приложены эксцентрично¹⁾. Если эксцентриситеты на двух концах равны e и

¹⁾ Этот вопрос рассмотрен более подробно в статье D. H. Young, Proc. Am. Soc. Civil Engrs, декабрь, 1934 и в другой статье того же автора в Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., Zürich, т. 2, стр. 480, 1934. См. также S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 107, 1936; русский перевод, 1946, 1955 и F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, New York, стр. 167, 1952.

противоположны по направлению, то сжимающие силы образуют пару сил с моментом $2Pe$, который вызывает на концах стержня поперечные силы, равные

$$Q = \frac{2Pe}{l}. \quad (149)$$

Наибольшее значение Q получается путем подстановки в это уравнение вместо P наибольшей нагрузки $P_{кр}$, которую колонна может выдержать. Эксцентриситет e обычно принимается как некоторая часть радиуса r ядра сечения, скажем $e/r = 0,3$. Тогда детали должны быть спроектированы таким образом, чтобы наибольшие напряжения, вызываемые в них силой Q_{max} , не превосходили предела текучести.

В случае сжатых составных элементов фермы с жесткими узлами при нагружении фермы на концах элемента возникают некоторые изгибающие моменты. Если величины M_1 и M_2 этих моментов вычислены из анализа *вторичных напряжений*, то соответствующие эксцентриситеты $e_1 = M_1/P$ и $e_2 = M_2/P$ точек приложения сжимающей силы известны, и величина их алгебраической суммы должна быть подставлена в уравнение (149) вместо $2e$.

36. Неупругий продольный изгиб прямолинейных колонн

В предыдущем изложении вопросов устойчивости всегда предполагалось, что материал колонны является совершенно упругим и следует закону Гука. Предположим теперь, что материал, хотя и является

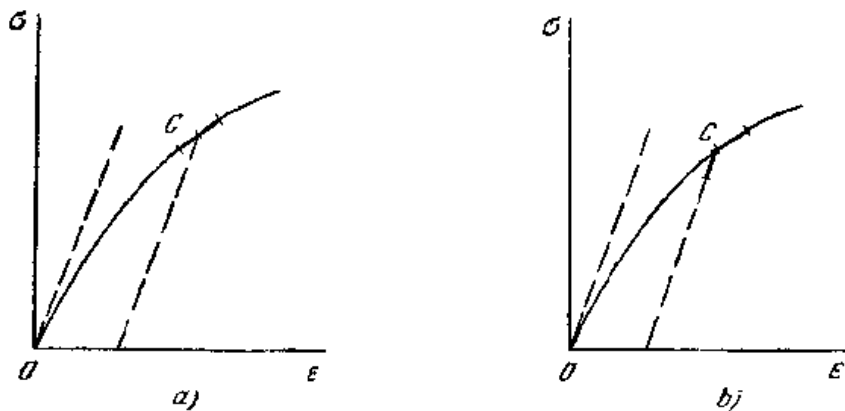


Рис. 115.

совершенно упругим, но не следует закону Гука, и что диаграмма сжатия подобна показанной на рис. 115, а. Если стержень из такого материала находится под действием сжимающих напряжений, соответствующих точке C на диаграмме, а затем вызывается некоторое малое изменение в напряжении (положительное или отрицательное), то связь

между изменением напряжения и изменением деформации будет зависеть от величины начального напряжения. Эта связь определяется наклоном опытной диаграммы сжатия в точке C или, как показано на рисунке, наклоном жирного элемента диаграммы. Величина отношения $d\sigma/d\varepsilon$ может рассматриваться как переменный модуль упругости материала, будет называться *касательным модулем* и обозначаться через E_t .

Рассмотрим теперь сжатый по оси призматический стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 116, а) и предположим, что упругие свойства материала представлены диаграммой на рис. 115, а. При

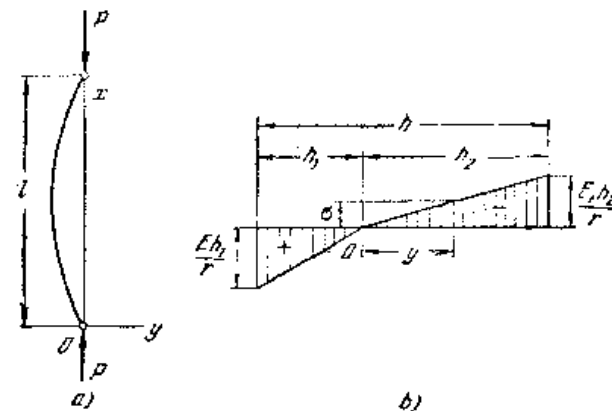


Рис. 116.

определении значения критической нагрузки для такого стержня мы можем поступить, как и прежде, и предположить, что после приложения сил P возникает бесконечно малый прогиб стержня. Тогда критическая сила $P_{кр}$ определится как сила, необходимая для того, чтобы удержать стержень в этой слегка искривленной форме. Так как предполагаемый прогиб бесконечно мал, то соответствующие напряжения от изгиба малы по сравнению с начальным сжимающим напряжением, и зависимость между напряжением и деформацией от изгиба определится соответствующим значением касательного модуля E_t . В таком случае дифференциальное уравнение изогнутой оси будет иметь тот же самый вид, что и для материала, следующего закону Гука, но вместо E появится касательный модуль E_t . Интегрирование этого уравнения дает

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_t J}{l^2}, \quad (150)$$

и

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E_t \frac{i^2}{l^2}. \quad (151)$$

Разница между этими формулами и уравнениями (132) и (134) для материалов, следующих закону Гука, заключается лишь в замене

постоянного модуля упругости E касательным модулем E_t , который является функцией сжимающего напряжения ε .

Если диаграмма сжатия, подобная приведенной на рис. 115, *a*, известна, то значение E_t можно легко определить для любого значения ε . Чтобы установить зависимость между $\varepsilon_{кр}$ и гибкостью, равной отношению l/i , мы возьмем ряд значений $\varepsilon_{кр}$ с соответствующими значениями E_t и подставим их в уравнение (151). Тогда уравнение определит соответствующие значения l/i . Пользуясь этими значениями, можно представить зависимость между l/i и $\varepsilon_{кр}$ кривой, аналогичной полученной на рис. 100 для материала, следующего закону Гука.

Этот метод вычисления $\varepsilon_{кр}$ для случая, когда материал не следует закону Гука, был предложен Ф. Энгессером⁴⁾, который поддал также мысль о применении метода для металлических стержней, сжатых выше предела пропорциональности. Однако в этом случае задача становится более сложной. Если стержень сжат за предел упругости и возник малый прогиб (рис. 116, *a*), то деформация сжатия на выпуклой стороне увеличивается, и зависимость между деформацией и напряжением определяется здесь величиной касательного модуля E_t . В то же самое время деформация сжатия на вогнутой стороне уменьшается, и в таком случае зависимость между напряжением и деформацией определяется тем начальным значением E модуля. Таким образом, здесь условия будут такие, как для материала, имеющего два различных модуля, один при растяжении и другой при сжатии. Соответствующие наклоны указаны на рис. 115, *b* двумя короткими жирными элементами графика. Предполагая, что поперечные сечения стержня остаются плоскими при изгибе, малые напряжения изгиба можем представить двумя треугольниками, показанными на рис. 116, *b*. Эти напряжения от изгиба накапливаются на равномерно распределенные начальные сжимающие напряжения. Если через r обозначить радиус кривизны изогнутой оси в рассматриваемом поперечном сечении, через $Eh_1 r$ и $E_t h_2 r$ — соответственно наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения от изгиба, то положение нейтральной оси O (рис. 116, *b*) найдется из условия, что результирующие растягивающих и сжимающих напряжений изгиба должны быть равны и должны создать пару, которая уравновесит изгибающий момент M . В случае прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b эти условия требуют

$$Eh_1^3 = E_t h_2^3 \quad (a)$$

$$\frac{Eh_1}{r} \frac{bh_1}{2} \frac{2h}{3} = M. \quad (b)$$

Замечая, что $h_1 + h_2 = h$, получаем из уравнения (a)

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}, \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}. \quad (c)$$

Тогда уравнение (b) дает

$$\frac{1}{r} \frac{bh^3}{12} \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} = M. \quad (d)$$

Введя обозначение

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}, \quad (152)$$

получаем из уравнения (d)

$$\frac{E_r J}{r} = M. \quad (153)$$

Уравнение (153) имеет тот же вид, что и уравнение для упругой кривой, когда материал следует закону Гука. Мы должны лишь заменить модуль E величиной E_r , определяемой уравнением (152) и называемой *приведенным модулем упругости*. Пользуясь для $1/r$ его приближенным выражением d^2y/dx^2 и интегрируя уравнение (153), мы получим для стержня с шарнирно закрепленными концами (рис. 116, *a*)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_r J}{l^2}, \quad (154)$$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E_r \frac{i^2}{l^2}. \quad (155)$$

Сравнивая эти выражения с (150) и (151), видим, что разница заключается лишь в замене касательного модуля E_t , примененного в первоначальных уравнениях Энгессера, приведенным модулем E_r . Так как $E_t < E$, из формулы (152) видно, что значения $P_{кр}$ на основании формулы (154) будут большими, чем значения по формуле (150). Это повышенное значение получается из того соображения, что при предполагаемом изгибе (рис. 116, *a*) деформация на выпуклой стороне стержня представляет уменьшение начальной

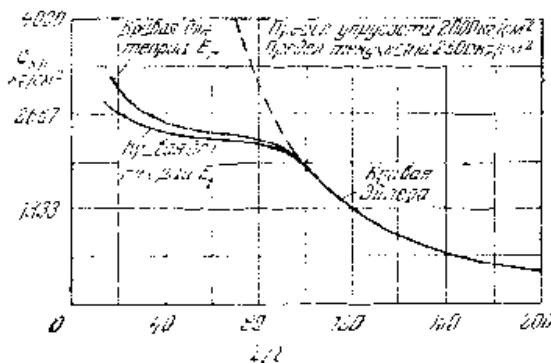


Рис. 117.

⁴⁾ F. Engesser, Z. Architect. u. Ingenieurw., стр. 455, 1889. См. также Considère, Congr. internat. procédés de construction, Paris, t. 3, стр. 371, 1889.

¹⁾ Можно показать, что это справедливо не только для случая прямоугольного сечения стержня, но также для стержня с любым симметричным поперечным сечением, который изгибается в плоскости симметрии.

деформации сжатия. Таким образом, деформация упрочнения материала как бы имеет влияние на изгиб. На рис. 117 представлены кривые, устанавливающие зависимость между $\sigma_{кр}$ и l/l_0 , вычисленные по выражениям (151) и (155) для прямоугольных стержней из строительной стали¹⁾.

В течение многих лет формула (155), основанная на приведенном модуле E_r , применялась инженерами, которые имели дело с такими пластическими материалами, как алюминиевые сплавы и строительная сталь, но некоторые эксперименты показали, что результаты испытаний лучше согласуются с формулой (151). Рис. 118, например, представляет результаты испытаний для сплошных круглых стержней из алюминиевого сплава²⁾. Видно, что для больших значений гибкости результаты совпадают с кривой Эйлера, для коротких же стержней результаты удовлетворительно согласуются с кривой, отвечающей теории касательного модуля. Таким образом, метод рассуждения, примененный при вычислении $\sigma_{кр}$ в упругой области, становится неудовлетворительным за пределом упругости, так как кривая, отвечающая теории E_r , основанная на этом методе, не согласуется с результатами испытаний.

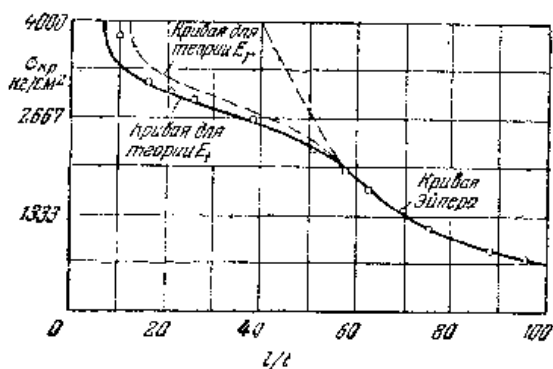


Рис. 118.

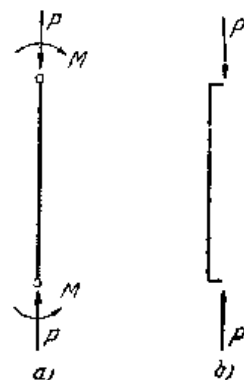


Рис. 119.

Чтобы объяснить несостоятельность этого общепринятого метода³⁾, мы должны помнить, что в случае пластической деформации стержня величина прогибов может зависеть не только от значений действующих сил, но также от порядка, в каком эти силы приложены. Возьмем, например, случай одновременного сжатия и изгиба (рис. 119, а). Если

деформации совершенно упруги, то прогибы стержня зависят только от величин P и M и не зависят от порядка, в котором они были приложены. Условия будут совершенно отличны, если при нагружении возникнут пластические деформации. Предположим, например, что сначала приложены осевые силы P и их величина такова, что возникает пластическая деформация. Если теперь будут приложены моменты M , то на изгиб стержня под их действием будет оказывать влияние наклеп материала силами P . Этот наклеп должен быть принят во внимание, и при вычислении прогибов нужно применить приведенный модуль E_r . Другой путь нагружения рассмотрим в случае, когда одновременно приложены постепенно увеличивающиеся нагрузки P и M . Такое условие нагружения получается, например, если стержень сжат силами P , приложенными с некоторым эксцентриситетом, как показано на рис. 119, б. В этом случае деформации в каждом продольном волокне непрерывно увеличиваются, и зависимость между напряжением и деформацией определяется для каждого этапа нагружения соответствующим значением касательного модуля E_r .

При экспериментальном исследовании поперечного выпучивания колонны условия обычно подобны представленным на рис. 119, б. Благодаря неизбежным эксцентриситетам изгиб колонны начинается немедленно после начала нагружения. Однако так как эксцентриситеты весьма малы, то прогибами пренебрегают до стадии, когда нагрузка начинает приближаться к ее критическому значению. В этот период деформации начинают увеличиваться быстро, и их величина определяется с помощью модуля E_r соответственно критическому значению нагрузки. Следовательно, из этих соображений вытекает, что первоначальная формула (151) Энгессера будет давать критические напряжения с большей точностью, чем формула (155), как об этом свидетельствуют и результаты опытов.

Предыдущие рассуждения, изложенные для основного случая продольного изгиба (рис. 98), можно также применить к другим случаям продольного изгиба, как, например, показанным на рис. 99 и 102. Критическое напряжение можно вычислить по формуле (137) путем подстановки E_r вместо E . Однако в общем задачи на продольный изгиб в пластической области являются более сложными, так как условия на концах и коэффициенты длины обыкновенно перестают быть постоянными и изменяются с изменением $P_{кр}$. Возьмем, например, случай, показанный на рис. 105. В пластической области коэффициент длины для этого случая зависит лишь от отношения (см. уравнение (1), стр. 134)

$$\frac{J_1}{J_1 l}, \quad (e)$$

которое не зависит от значения $P_{кр}$. Но в пластической области должно быть применено E_r вместо E , и взамен отношения (e) мы

¹⁾ Рис. 117 и 118 взяты из F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1952.

²⁾ См. статью R. L. Templin, R. G. Sturm, E. C. Hartmann and M. Holt, *Aluminum Research Laboratories*, Aluminum Company of America, Pittsburgh, 1938.

³⁾ Объяснение было дано F. R. Shanley, *J. Aeronaut. Sci.*, т. 14, стр. 261, 1947.

получим

$$\frac{E_t I_1}{E J_1} \quad (f)$$

где E_t меньше E и зависит от величины $P_{кр}$. Следовательно, отношение жесткости изгиба горизонтальных элементов рамы к жесткости вертикальных элементов получается большим, в результате чего коэффициент длины получается меньше в пластической области, чем для случая совершенной упругости. Из этого мы заключаем, что если при расчете вертикальных элементов рамы в пластической области воспользуемся для приведенной длины тем же значением, какое вычислено для совершенно упругих условий, то мы обеспечим безопасность. Подобные заключения получаются также для случаев, разобранных в пп. 32, 33, 35.

37. Устойчивость круговых колец и труб под действием внешнего давления

Устойчивость кругового кольца. Хорошо известно, что круговое кольцо или труба могут потерять устойчивость при действии лишь внешнего давления. Если жесткость изгиба кольца недостаточна, то такая потеря устойчивости может произойти при напряжениях, значительно меньших предела упругости материала. Это явление нужно принимать во внимание в таких задачах как расчет трубок паровых котлов, подвергнутых внешнему давлению, и расчет укрепляющих колец подводных лодок.

Давление, при котором круговая форма становится неустойчивой и происходит сплющивание, называется *критическим давлением*. Его

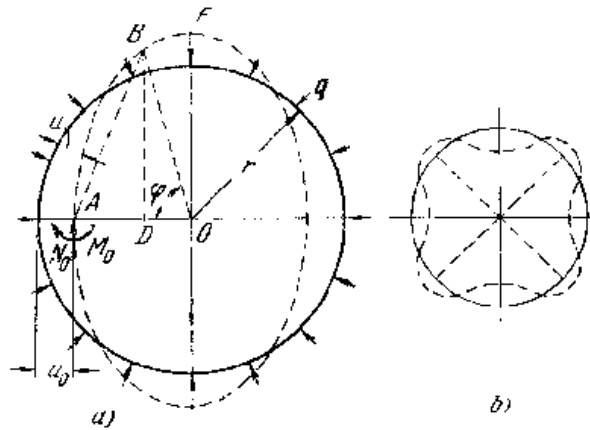


Рис. 120.

значение можно получить при помощи общего уравнения для изогнутой оси (уравнение (235) т. I, стр. 339).

Предположим, что под действием внешнего давления кольцо сплющивается в эллиптическую форму, как показано на рис. 120, а пункти-

ром. Примем следующие обозначения: q — внешнее давление, приходящееся на единицу длины ось, R — радиус оси кольца, u — радиальное перемещение кольца при сплющивании, u_0 — радиальное перемещение поперечного сечения A , M_0 — изгибающий момент в поперечном сечении, $N_0 = q(R - u_0)$ — продольная сжимающая сила в поперечном сечении A .

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении B сплющенного кольца будет

$$M = M_0 + q \overline{AO} \cdot \overline{AD} - \frac{q}{3} AB^2. \quad (a)$$

Теперь в треугольнике AOB имеем

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \overline{AO} \cdot \overline{AD}$$

или

$$\frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \overline{AO} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} (\overline{OB}^2 - \overline{AO}^2) = \frac{1}{2} [(R - u)^2 - (R - u_0)^2].$$

Так как u мало по сравнению с R , то членами u^2 или u_0^2 можно пренебречь, следовательно,

$$\frac{1}{2} \overline{AB}^2 - \overline{AO} \cdot \overline{AD} = R(u_0 - u).$$

Вставляя это значение в уравнение (а), мы получаем

$$M = M_0 - qR(u_0 - u).$$

Уравнение (235) т. I, стр. 339, получается в таком виде:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = - \frac{R^2}{EJ} \{ M_0 - qR(u_0 - u) \}$$

или

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \left(1 + \frac{qR^3}{EJ} \right) = \frac{M_0 R^2 + qR^3 u_0}{EJ}. \quad (b)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$u = C_1 \sin p\varphi + C_2 \cos p\varphi + \frac{M_0 R^2 + qR^3 u_0}{EJ + qR^3}, \quad (c)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые должны быть определены из условий в поперечных сечениях A и F сплющенного кольца, и

$$p^2 = 1 + \frac{qR^3}{EJ}. \quad (d)$$

Из условий симметрии следует, что

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (e)$$

На основании первого из этих уравнений мы получаем $C_1 = 0$, а из второго

$$\sin \frac{p\pi}{2} = 0. \quad (f)$$

Наименьший корень этого уравнения будет $\frac{p\pi}{2} = \pi$, или $p = 2$.

Вставляя это в выражение (d), мы получаем значение для критического давления¹⁾

$$q_{кр} = \frac{3EJ}{R^3}. \quad (156)$$

Другие корни уравнения (f) такие, как $p\pi/2 = 2\pi$, $p\pi/2 = 3\pi$ и т. д., соответствуют большему числу волн сплюсненного кольца и дают большие значения для давления q . Рис.

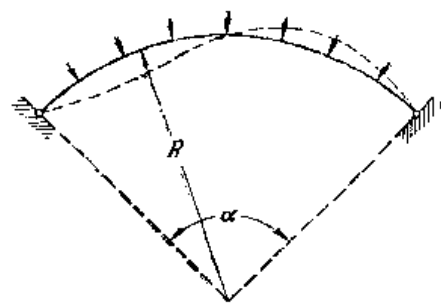


Рис. 121.

120, b показывает, например, сплюсненную форму при $p\pi/2 = 2\pi$. Эти высшие формы сплюсывания представляют интерес при исследовании устойчивости коротких цилиндрических трубок с закрепленными концами.

Устойчивость круговой арки.

Если круговая арка, имеющая шарнирно закрепленные концы, подвергается действию равномерно распределенного радиального давления, она может вынуживаться, как показано на рис.

121 пунктиром. Критическое значение давления зависит от величины угла α и может быть вычислено по следующей формуле²⁾:

$$q_{кр} = \frac{EJ}{R^3} \left(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (157)$$

Задача об устойчивости кольца в направлении, перпендикулярном его плоскости, также решена³⁾.

Устойчивость круговых труб. Изложенная выше теория устойчивости кругового кольца может быть применена также и в случае длинной круговой трубы, подверженной равномерному внешнему давлению. Рассмотрим элементарное кольцо, вырезанное из трубы двумя поперечными сечениями на расстоянии одно от другого, равном еди-

¹⁾ Эта задача была решена M. V. Bresson, Cours de mécanique appliquée, Paris, т. I, стр. 334, 1866.

²⁾ См. статью автора «Об устойчивости упругих систем», Известия Киевского политехнического института, 1910; французский перевод Ann. ponts et chaussées, 1913. См. также E. Hurlbrink, Schiffbau, т. 9, стр. 640, 1907 — 1908; E. Schwilke and C. E. Kollbrunner, Stahlbau, 1937 и 1938; А. Н. Динник, Пролонный изгиб стержней, Москва, 1939.

³⁾ См. E. L. Nicolai, Z. angew. Math. u. Mech., т. 3, стр. 227, 1923; см. также статью автора там же, стр. 358.

нице. Момент инерции поперечного сечения этого кольца будет $J = \frac{1}{12} h^3$, где h означает толщину стенки трубы. Так как при изгибе поперечные сечения кольца не искажаются, то вместо E нужно воспользоваться величиной $\frac{E}{1-\mu^2}$. Формула (156) для вычисления критического давления получается в следующем виде:

$$P_{кр} = \frac{Eh^3}{4(1-\mu^2)R^3}. \quad (158)$$

Этим выражением можно пользоваться до тех пор, пока соответствующее сжимающее напряжение в трубе будет меньше предела пропорциональности материала. За пределом пропорциональности истинное критическое давление будет меньше, чем получаемое из формулы (158), и для материала с ясно выраженным пределом текучести можно пользоваться формулой¹⁾:

$$P_{кр} = \frac{h}{R} \frac{\sigma_T}{1 + 4 \frac{\sigma_T}{E} \frac{R^2}{h^2}}, \quad (159)$$

в которой σ_T обозначает предел текучести материала при сжатии. Когда толщина уменьшается, критическое давление приближается к предельному значению $Eh^3/4R^3$, которое несколько меньше даваемого формулой (158), и во всех случаях его значение меньше чем $h\sigma_T/R$, т. е. меньше давления, соответствующего пределу текучести²⁾.

В области за пределом упругости мы можем поступать так же, как в случае сжатых стержней и воспользоваться E_t вместо E в уравнении (158). Таким путем устанавливается зависимость между $P_{кр}$ и h/R в пластической области.

Трубы с начальной эллиптической формой. Потеря устойчивости труб под действием равномерного внешнего давления в значительной степени зависит от различного рода недостатков в них. Наиболее важным недостатком является начальная эллиптичность, предельная величина которой в каждом типе трубы обычно хорошо известна по многочисленным измерениям

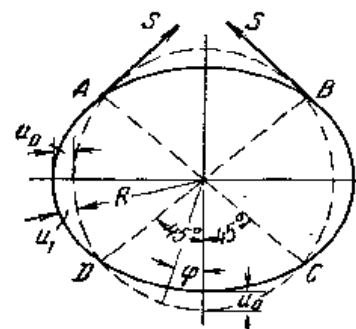


Рис. 122.

¹⁾ См. R. V. Southwell, Phil. Mag., т. 29, стр. 67, 1915.

²⁾ Опыты над потерей устойчивости коротких труб под действием внешнего давления описаны G. Cook'ом, Phil. Mag., стр. 51, 1914. Библиография по этому предмету того же автора см. Brit. Assoc. Adv. Sci. (Birmingham) Repts. 1913.

при осмотре. Поэтому желательно иметь расчетную формулу, в которой эта начальная эллиптичность явно выражена. Чтобы вывести такую формулу¹⁾, предположим, что начальное отклонение формы трубы от совершенно круглой формы, указанной пунктиром на рис. 122, определяется уравнением

$$u_1 = u_0 \cos 2\varphi, \quad (g)$$

в котором u_0 — наибольшее начальное радиальное отклонение, рассматриваемое малым по сравнению с R , а φ — центральный угол, измеряемый, как показано на рисунке. Начальная форма трубы представлена сплошной линией.

Если к такой некруглой трубе приложить внешнее давление, то будет происходить дальнейшее сближивание трубы. Обозначая радиальное перемещение, соответствующее дополнительному сближению, через u_2 и рассматривая элементарное кольцо с шириной, равной единице, мы получаем из уравнения (235) т. 1, стр. 339:

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D} MR^2, \quad (h)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

— жесткость изгиба элементарного кольца. Что касается изгибающего момента M , возникающего от давления p , то мы видим, что уменьшение кривизны имеет место на участках AB и CD элементарного кольца; следовательно, M является положительным в этих областях, в то время как на остальных участках кольца момент отрицателен. В точках A , B , C и D изгибающий момент равен нулю, и взаимодействие между частями элементарного кольца представится лишь силами S , касательными к пунктирному кругу, представляющему идеальную форму трубы. (Действие сил S на участок AB кольца показано на рисунке.) Этот круг можно рассматривать как веревочную кривую для внешнего равномерного давления p . Сжимающее усилие вдоль этой кривой остается постоянным и равным $S = pR$. Таким образом, изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении получается путем умножения S на полное радиальное отклонение $u_1 + u_2$ в этом поперечном сечении. Тогда

$$M = pR(u_2 + u_0 \cos 2\varphi), \quad (i)$$

и уравнение (h) получается в виде

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 = -\frac{1}{D} pR^3 (u_2 + u_0 \cos 2\varphi),$$

¹⁾ См. статью автора J. Appl. Mech., т. 1, стр. 173, 1933.

или

$$\frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} + u_2 \left(1 - p \frac{R^3}{D}\right) = -\frac{1}{D} pR^3 u_0 \cos 2\varphi.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям непрерывности в точках A , B , C и D , будет

$$u_2 = \frac{u_0 p}{p_{кр} - p} \cos 2\varphi, \quad (160)$$

в котором $p_{кр}$ дается формулой (158). Видно, что в точках A , B , C и D перемещение u_2 и его вторая производная обращаются в нуль. Следовательно, изгибающие моменты в этих точках равняются нулю, как предполагалось ранее. Наибольший изгибающий момент имеет место при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$, где

$$M_{\max} = pR \left(u_0 + \frac{u_0 p}{p_{кр} - p} \right) = \frac{p u_0 R}{1 - \frac{p}{p_{кр}}}. \quad (161)$$

Видно, что при малых значениях отношения $p/p_{кр}$ изменением в эллиптичности трубы вследствие давления p можно пренебречь и что наибольший изгибающий момент получается путем умножения сжимающего усилия $S = pR$ на начальное отклонение u_0 . Если отношение $p/p_{кр}$ не мало, то изменение в начальной эллиптической форме трубы должно быть учтено и для вычисления M_{\max} нужно воспользоваться уравнением (161).

Наибольшее сжимающее напряжение получится тогда путем добавления наибольшего сжимающего напряжения от изгибающего момента M_{\max} к напряжению, возникающему от сжимающего усилия pR . Таким образом, находим

$$\sigma_{\max} = \frac{pR}{h} + \frac{6pRu_0}{h^2} \frac{1}{1 - p/p_{кр}}. \quad (j)$$

С помощью этого выражения можно разработать для расчета труб метод, подобный методу расчета колонн на основании допущения несовершенств.

Предельное значение давления p есть то значение, при котором начинается текучесть материала. Обозначая это давление через p_{τ} и подставляя в уравнение (j) σ_{τ} вместо σ_{\max} , получаем

$$\sigma_{\tau} = \frac{p_{\tau} R}{h} + \frac{6p_{\tau} R u_0}{h^2} \frac{1}{1 - p_{\tau}/p_{кр}}, \quad (k)$$

откуда можно вычислить предельное добавление p_c , если известны σ_{τ} и начальное отклонение u_0 . При помощи обозначений

$$\frac{R}{h} = m \quad \text{и} \quad \frac{u_0}{R} = n \quad (l)$$

уравнение (к) для вычисления p_T получается в таком виде:

$$p_T^2 - \left[\frac{\sigma_T}{m} + (1 + 6mn) p_{кр} \right] \sigma_T - \frac{\sigma_T p_{кр}}{m} = 0. \quad (162)$$

На основании этого уравнения можно построить кривые, дающие среднее сжимающее напряжение $p_T R/h$ как функцию R/h для различных значений отношения u_0/R и для различных значений σ_T . При помощи таких кривых и при надлежащем коэффициенте безопасности можно легко подобрать подходящую толщину стенки трубы. Необходимо заметить, что давление p_T , определенное таким образом, меньше, чем давление, при котором происходит полная потеря устойчивости трубы; следовательно, пользуясь p_T как предельным значением давления, мы всегда сможем обеспечить устойчивость трубы.

В предыдущем изложении предполагалось, что длина трубы l велика по сравнению с ее радиусом, скажем, $l/R > 20$. Для коротких труб, если их края зашпелены или просто оперты, значение $p_{кр}$ больше значения, даваемого формулой (158), и зависит от отношения l/R . Теория устойчивости таких труб является более сложной¹⁾, так как труба разбивается при выпучивании на несколько волн по окружности и число этих волн зависит от отношения l/R ²⁾.

Задача об устойчивости труб, закрытых на концах и подверженных равномерному давлению на концах и с боков³⁾, также решена⁴⁾.

38. Устойчивость прямоугольных пластинок

Проблема выпучивания сжатых прямоугольных пластинок представляет большой практический интерес при рассмотрении упругой устойчивости сжатых элементов,

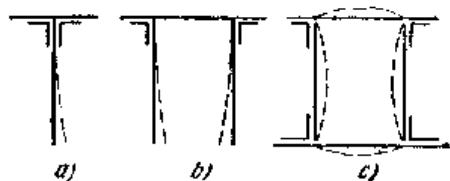


Рис. 123.

составленных из пластинок, которые часто применяются в стальных конструкциях (рис. 123). Потеря устойчивости таких элементов может быть вызвана выпучиванием стенки или боковых пластин, но не выпучиванием элемента как це-

лого. Например, в случаях, показанных на рис. 123, выпучивание пластин, как указано пунктиром, имеет место, если толщина пластинки

¹⁾ Рассмотрение этой задачи см. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 445, 1936; см. русский перевод, 1946, 1955.

²⁾ Некоторые кривые для вычисления критических давлений на короткие трубы были предложены Комитетом исследования по сопротивлению сосудов, находящимся под внешним давлением, А. С. М. Е., декабрь 1933.

³⁾ Это условие возникает при исследовании устойчивости обшивки корпуса подводной лодки между двумя укрепляющими кольцами.

⁴⁾ См. статью R. v. Mises in Festschrift f. Prof. A. Stodola, Zürich, 1929.

выбрана неудовлетворительно. Так как длина сжатого элемента обычно велика по сравнению с размерами поперечного сечения, то задача сводится к задаче о выпучивании длинной сжатой пластинки (рис. 124). Короткие стороны пластинки можно рассматривать как свободно опертые; условия для двух других сторон зависят от формы поперечного сечения. Например, если сечение колонны имеет квадратную форму (рис. 123, с) и все боковые пластинки имеют одну и ту же толщину, то они стремятся выпучиться одновременно. Каждую грань можно тогда рассматривать как сжатую прямоугольную пластинку со всеми четырьмя свободно опертыми сторонами. В случаях, показанных на рис. 123, а и 123, б, нижние края вертикальных стенок свободны, а верхние края упруго зашпелены¹⁾.

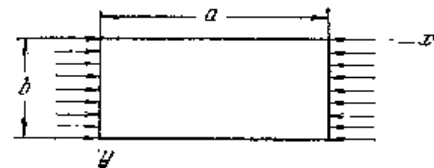


Рис. 124.

Имеется строгое решение задачи об устойчивости для различных условий вдоль длинных сторон пластинки, показанной на рис. 124²⁾. Здесь мы даем только некоторые окончательные результаты и значения критических напряжений, полученные из этих решений.

Прямоугольная пластинка, свободно опертая на четырех краях. Свободно опертая пластинка под действием равномерного сжатия в направлении оси x (рис. 124) выпучивается, разделяясь на квадраты или прямоугольники, близкие к квадратам. Критическое значение сжимающего напряжения дается формулой³⁾

$$\sigma_{кр} = \beta \sigma_e, \quad (163)$$

в которой

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E h^2}{12 b^2 (1 - \mu^2)}, \quad (164)$$

где h — толщина пластинки и b — ее ширина. Коэффициент

$$\beta = \left(\frac{a}{mb} + \frac{mb}{a} \right)^2 \quad (a)$$

¹⁾ Первые опыты, в которых вопрос об устойчивости тонкостенных конструкций был рассмотрен, были сделаны В. Фейрберном и описаны в его книге «Britannia and Conway Tubular Bridges», London, 1849. См. также работу Е. Годкинсона, опубликованную в качестве приложения к Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, London, 1849.

²⁾ См. S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, 1936; см. русский перевод, 1944, 1956.

³⁾ Решение такой задачи принадлежит Г. Н. Вуан'ю; см. Proc. London Math. Soc., т. 22, стр. 54, 1891. Другие случаи продольного изгиба прямоугольных пластинок были рассмотрены автором. См. его статьи «Об устойчивости сжатых пластинок», Известия Киевского политехнического института, 1907; Z. Math. u. Phys., т. 58, 1911; Eisenbau, т. 12, 1921. Proc. Am. Soc. Civil. Engrs., т. 55, стр. 855, 1929; см. также Н. Reissner, Zentr. Bauverwalt., Berlin, стр. 93, 1909.

зависит от величины отношения a/b , а целое число m представляет число волн, на которые пластинка разбивается при выучивании. Число m должно быть выбрано так, чтобы β сделать минимумом¹⁾. Некоторые значения коэффициента β даны в табл. 10. Для более длинных пластинок ($a/b \geq 3$) хорошее приближенное значение даст $\beta = 4$.

Таблица 10

Коэффициенты для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольных пластинках со свободно опертыми краями

$a/b =$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3
$\beta =$	8,41	5,14	4,20	4,00	4,13	4,47	4,20	4,01	4,00	4,01	4,13	4,01	4,00
$\sigma_{кр} =$	1520	933	760	727	747	807	760	733	727	733	747	733	727

Значения $\sigma_{кр}$, данные в табл. 10, вычислены в предположении, что $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0,3$ и $h/b = 0,01$. Критическое напряжение для какого-либо другого значения отношения h/b можно получить путем умножения табличных значений на $10^4 (h^2/b^2)$. Для пояснения сказанного рассмотрим длинную стальную пластинку, имеющую предел текучести, равный 2800 кг/см^2 . Предположим, что мы желаем определить значение отношения b/h , при котором критическое напряжение равняется пределу текучести. Полагая $\beta = 4$ и пользуясь табл. 10, мы получаем $\sigma_{кр} = 725 \times 10^4 \times \frac{h^2}{b^2} = 2800 \text{ кг/см}^2$, откуда

$$\frac{b}{h} = 50,8. \quad (b)$$

При больших значениях отношения b/h выучивание будет происходить при сжимающих напряжениях, меньших предела текучести материала. При таких условиях за основу определения рабочего напряжения нужно принимать критическое напряжение, а не предел текучести материала.

Три края пластинки оперты, а четвертый свободен. Если один из длинных краев, например $y = b$, свободен (см. рис. 124), то для вычисления критических значений сжимающего напряжения можно воспользоваться предыдущей формулой (163), взяв значения коэффициента β из вышеследующей табл. 11.

Таблица 11

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с тремя свободно опертыми краями и четвертым ($y = b$) свободным

$a/b =$	0,5	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
$\beta =$	4,40	1,440	1,135	0,952	0,835	0,755	0,698	0,610	0,564	0,516	0,506

¹⁾ Можно видеть, что это наименьшее значение β равняется 4 и имеет место при $a = mb$, т. е. когда пластинка при изгибе разделяется на квадраты.

Два противоположных края свободно оперты, третий защемлен, а четвертый свободен. Края $x = 0$, $x = a$ на рис. 124 будут рассматриваться как свободно опертые, а край $y = 0$ — как защемленный. Здесь можно воспользоваться той же самой формулой (163), причем значение коэффициента β брать в табл. 12. (Для больших значений отношения a/b хорошее приближенное значение даст $\beta = 1,33$.)

Таблица 12

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с двумя противоположными краями, свободно опертыми, третьим защемленным и четвертым ($y = b$) свободным

$a/b =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$\beta =$	1,70	1,56	1,47	1,41	1,36	1,34	1,33	1,33
$a/b =$	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$\beta =$	1,34	1,36	1,38	1,45	1,47	1,41	1,36	1,34

Два противоположных края просто оперты, два других защемлены¹⁾. Края $x = 0$ и $x = a$ рассматриваются свободно опертыми. Соответствующие значения коэффициента β формулам (163) даны в табл. 13.

Таблица 13

Коэффициент β для вычисления критического сжимающего напряжения в прямоугольной пластинке с двумя противоположными свободно опертыми краями и с защемленными двумя другими краями

$a/b =$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1
$\beta =$	0,44	0,69	0,65	0,70	0,729	0,783	0,769	0,705	0,700	0,729	0,705	0,700

Прямоугольная пластинка, опертая по контуру и подвергающаяся действию касательных напряжений, равномерно распределенных по контуру (рис. 125). Критическое значение касательного напряжения, при котором может произойти выучивание пластинки, равняется

$$\tau_{кр} = \beta \sigma_e. \quad (165)$$

Значения численного коэффициента β даны в табл. 14.

Табл. 14 можно пользоваться при выборе толщины стенки составной балки. У опор балки поперечная сила имеет наибольшее значение. Поэтому часть стенки между двумя ребрами жесткости можно

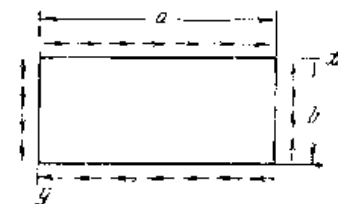


Рис. 125.

¹⁾ Мы имеем это условие, когда два противоположных края сжатого элемента, показанного на рис. 123, с, очень жестки и только два других края могут выучиваться.

Таблица 14

Коэффициент β для вычисления критического касательного напряжения в прямоугольной пластинке, опертой по контуру и подвергающейся действию равномерно распределенных по ее контуру касательных напряжений

$a/b =$	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3	∞
$\beta =$	9,42	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,3	6,1	5,4

рассматривать как прямоугольную пластинку со свободно опертыми краями, подвергающуюся лишь действию касательных напряжений. Например, если расстояние между ребрами жесткости равняется 1,5 м, $E = 2 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ и $\mu = 0,3$, то, пользуясь табл. 15¹⁾, получим следующие значения критического напряжения в кг/см^2 для балок со стенкой высотой h и толщиной b .

Таблица 15

Критическое напряжение (кг/см^2) в балке со стенкой высотой h и толщиной b

$b, \text{ см}$	$h = 0,95 \text{ см}$	$h = 1,11 \text{ см}$	$h = 1,27 \text{ см}$	$h = 1,43 \text{ см}$
150	683	933	1220	1550
210	530	723	945	1200
300	478	654	850	1086

При помощи табл. 10—15 можно получить необходимую толщину стальных листов, применяемых в составных сжатых элементах, сечения которых показаны на рис. 123. Если стороны трубчатого сечения рис. 123, с рассматривать как длинные прямоугольные пластинки с опертыми краями, то критическое сжимающее напряжение будет

$$\sigma_{кр} = 4\sigma_e = \frac{\pi^2 h^2}{3b^2} \frac{E}{1-\mu^2}. \quad (с)$$

Взяв, например, $h/b = 0,91$, мы найдем $\sigma_{кр} = 725 \text{ кг/см}^2$. Это напряжение значительно ниже предела пропорциональности для строительной стали. Если длинные края той же пластинки рассматривать как защемленные, то мы находим

$$\sigma_{кр} = 7\sigma_e = \frac{7}{4} \cdot 725 = 1270 \text{ кг/см}^2.$$

В случаях, показанных на рис. 123, а и 123, б, сжатые вертикальные стальные листы можно рассматривать как длинные пластинки, защемлен-

¹⁾ Дополнительные данные относительно выпучивания стенки и расчет ребер жесткости даны в статьях автора, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., т. 55, стр. 855, 1929 и Engineering, т. 138, стр. 207, 1934. См. также E. Chwalla, Repts. 2d Congr. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., Berlin, 1936; Stahlbau, 1936.

рис. 4) верхним краем и со свободным нижним краем. Поэтому критическое напряжение будет равняться

$$\sigma_{кр} = 1,33\sigma_e = \frac{1,33\pi^2}{12} \frac{h^2}{b^2} \frac{E}{1-\mu^2}. \quad (d)$$

Опять устойчивость пластинки зависит от величины отношения b/h . Предполагая, что предел текучести строительной стали равняется 2000 кг/см^2 , значение b/h , при котором $\sigma_{кр}$ равняется этому напряжению, получится из уравнения (d):

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{1,33\pi^2}{12 \cdot 2000} \frac{2 \cdot 10^6}{0,91}} \approx 35.$$

Следовательно, если $b/h > 35$, то критическое напряжение получается меньше предела текучести материала. Это обстоятельство должно быть принято во внимание при выборе величины допускаемого напряжения. Устойчивость пластинки можно увеличить путем усиления свободного края пластинки.

Во всех приведенных выше случаях предполагалось, что критическое напряжение ниже предела пропорциональности. Для напряжений за пределом пропорциональности приведенные выше формулы дают преувеличенные значения критических напряжений²⁾.

39. Выпучивание балок, не имеющих боковых опор

Хорошо известно, что при отсутствии поперечных опор двутавровые балки, нагруженные в плоскости стенки, оказываются недостаточно устойчивыми в поперечном направлении. Если нагрузка увеличивается за некоторый критический предел, то такие балки выпучиваются из плоскости стенки, и дальнейшее нагружение вызывает в них потерю устойчивости³⁾. Для определения этого предела можно воспользоваться энергетическим методом.

Для пояснения этого рассмотрим балку AB (рис. 126, а) узкого прямоугольного поперечного сечения, нагруженную в центре тяжести среднего поперечного сечения силой P , действующей в продольной вертикальной плоскости симметрии. Если эта сила мала, то изгиб балки происходит только в вертикальной плоскости и эта форма изгиба будет устойчива. Это значит, что если балка изгибается в боковом направлении поперечной силой, то этот прогиб исчезает по удалении силы, и балка возвращается к своей первоначальной форме. Однако если сила P увеличивается, достигается ее предельное значение, при котором изгиб вертикальной плоскости становится

⁴⁾ Это предположение дает верхний предел для критического напряжения. Истинное критическое напряжение будет несколько ниже, так как закрепление верхнего края не абсолютно жестко.

⁵⁾ Этот вопрос разобран в книге S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 384, 1936; русский перевод, 1948, 1953.

⁶⁾ Потеря устойчивости балок вследствие бокового выпучивания иллюстрируется катастрофой с мостом вблизи Тарба, Франция; см. Revue technique, ноябрь 15, 1897. Боковое выпучивание балок узкого прямоугольного поперечного сечения было разобрано Л. Прандтлем, Диссертация, Нюрнберг, 1899 и A. G. Michell, Phil. Mag., т. 48, 1899. Выпучивание двутавровых балок было разобрано автором; см. Известия Петербургского политехнического института, томы 4 и 5 — 905 и 1906. См. также Ann. ponts et chaussées,

неустойчивым. Тогда балка выпучивается в боковом направлении и могут иметь место большие поперечные прогибы при весьма малом увеличении нагрузки. Это предельное значение P называется *критической нагрузкой*.

Критическая нагрузка определяется путем рассмотрения потенциальной энергии системы. Какой-либо боковой прогиб балки сопровождается увеличением энергии деформации. После малого бокового выпучивания мы имеем не только энергию деформации изгиба в вертикальной плоскости, которую можно рассматривать неизменной, но также энергию деформации изгиба в поперечном направлении и энергию деформации кручения. В то же самое

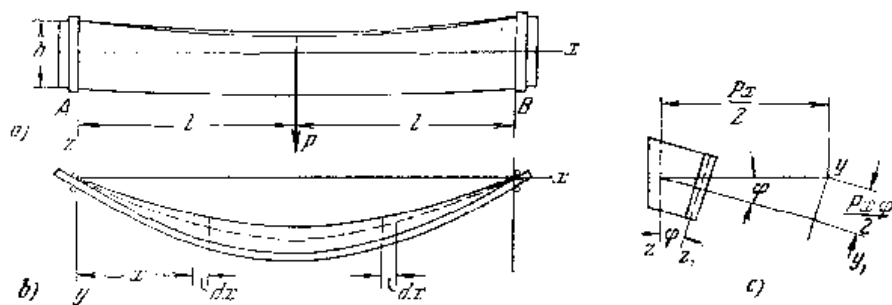


Рис. 126.

время потенциальная энергия груза уменьшается, потому что боковое выпучивание сопровождается понижением ее точки приложения. Пусть U_1 означает это уменьшение потенциальной энергии груза, U — энергию деформации вследствие изгиба в поперечном направлении и U_2 — энергию деформации вследствие кручения. Тогда критическая нагрузка определится по уравнению (140), стр. 137, которое получается в следующем виде:

$$U + U_2 = U_1. \quad (a)$$

Теперь мы должны вычислить величины, входящие в это уравнение. Изгибающий момент в вертикальной плоскости в каком-либо поперечном сечении в расстоянии x от левой опоры (рис. 126, б) равен $Px/2$. При рассмотрении бокового выпучивания необходимо вычислить изгибающий момент относительно оси z_1 (рис. 126, с). Этот момент равен $(Px/2)\varphi$, где φ означает малый угол закручивания, переменный по длине балки. Тогда при малых поперечных прогибах¹⁾ мы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$EJ_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2} \varphi. \quad (b)$$

Соответствующая энергия деформации изгиба равняется

$$U = EJ_z \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{P^2}{4EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx. \quad (c)$$

1913 и Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., т. 87, стр. 1247, 1924. Практическое приложение теории разобрано E. Schwalla, Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelsymmetrischem I-Querschnitt, Berlin, 1939. См. также книгу Ф. Влейха, цит. на стр. 149, гл. 4.

¹⁾ При малых прогибах мы можем принять для кривизны d^2y/dx^2 вместо d^2y/dx^2 .

Энергия деформации кручения равняется (см. т. I, уравнение (186))

$$U_2 = C \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx, \quad (d)$$

где жесткость при кручении C для прямоугольного поперечного сечения получается из уравнения (159) т. I, стр. 245.

Рассмотрим теперь, повышение точки приложения груза P вследствие поперечного прогиба. Возьмем два симметрично расположенных элемента dx балки (рис. 126, б и 126, с) и рассмотрим влияние изгиба только этих двух элементов в плоскости xz_1 . Угловое перемещение вследствие этого изгиба равно $-\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx$. Так как этот изгиб происходит в плоскости xz_1 , наклоненной под углом φ к горизонту (рис. 126, с), то он приводит к понижению груза P на $-x\varphi \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) dx$. Полное понижение P в результате изгиба

всех элементов балки при выпучивании поэтому будет $\delta = - \int_0^l x\varphi \frac{d^2y}{dx^2} dx$;

пользуясь уравнением (b), находим

$$\delta = \frac{P}{2EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx.$$

Отсюда

$$U_1 = P\delta = \frac{P^2}{2EJ_z} \int_0^l x^2 \varphi^2 dx. \quad (e)$$

Подставляя в уравнение (a) выражения (c), (d) и (e), находим

$$4EJ_z C \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{P^2}{\int_0^l x^2 \varphi^2 dx}. \quad (f)$$

Взяв для угла закручивания φ удачно выбранную функцию x , удовлетворяющую условиям на концах, получаем приближенное значение критической нагрузки из уравнения (f). Предположим, например, что

$$\varphi = a \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (g)$$

Эта функция имеет нулевое значение на концах балки, где угол закручивания равен нулю, и наибольшее значение в середине ($x=l$). Подставляя (g) в выражение (f), находим¹⁾

$$P_{кр} = \frac{17,2 \sqrt{CEJ_z}}{(2l)^2}. \quad (166)$$

¹⁾ Более подробное исследование показывает, что ошибка этого приближенного решения составляет около 1,5%. Следовательно, формула (166) достаточно точна для практических приложений.

Таким образом, критическое значение нагрузки зависит от произведения жесткости кручения и жесткости бокового изгиба балки.

Выше предполагалось, что груз P приложен в центре тяжести среднего поперечного сечения балки. Если точка приложения находится на расстоянии a выше центра тяжести, то правая часть формулы (166) должна быть умножена на

$$[1 - 1,74(a/2l) \sqrt{EJ_z C}]^2.$$

Если нагрузка равномерно распределена по центральной оси балки (рис. 126), то ее критическое значение равно

$$(2ql)_{кр} = \frac{28,3 \sqrt{CEJ_z}}{(2l)^2}. \quad (167)$$

Для консоли длиной l , нагруженной в центре тяжести свободного конца, критическая нагрузка равняется

$$P_{кр} = \frac{4,01 \sqrt{CEJ_z}}{l^2}. \quad (168)$$

В случае двутавровой балки формулы для критических нагрузок имеют вид, полученный выше для балки узкого прямоугольного поперечного сечения, с той разницей, что числовой коэффициент в числителе правой части не является постоянным, но зависит от величины выражения ²⁾

$$\alpha = \frac{C}{EJ_z} \left(\frac{2l}{h} \right)^2. \quad (h)$$

Например, если двутавровая балка опирается, как показано на рис. 126, и равномерно нагружена по центральной оси, то критическое значение полной распределенной нагрузки будет

$$(2ql)_{кр} = \frac{\beta \sqrt{CEJ_z}}{(2l)^2}. \quad (169)$$

Величины коэффициента β для различных значений отношения α даны в табл. 16. Видно, что с увеличением α постоянная β приближается к величине, данной ранее для балки прямоугольного поперечного сечения.

В третьей строке табл. 16 даны величины соответствующих значений критических напряжений изгиба, вычисленные в предположении, что

$$\gamma = \frac{J_z}{J_y} \left(\frac{h}{2l} \right)^2 = 0,0001. \quad (i)$$

Здесь J_z/J_y — отношение боковой и вертикальной жесткости изгиба и $h/2l$ — отношение высоты балки к ее пролету. Для любых других соотношений размеров балки критические напряжения получаются путем умножения чисел третьей строки на 10^4 . Четвертая и пятая строки табл. 16 дают критическое напряжение, когда нагрузка соответственно приложена к верхней

¹⁾ См. статью автора в *Ann. ponts et chaussées*, 1913. См. также его «*Theory of Elastic Stability*», стр. 254, 1936; русский перевод, 1946, 1955.

²⁾ Жесткость при кручении C для двутавровых балок рассмотрена в п. 47, стр. 204.

или нижней полке балки. Все вычисления сделаны в предположении совершенной упругости материала ¹⁾.

Таблица 16

Критические напряжения (кг/см^2) для двутавровых балок, находящихся под действием равномерной нагрузки при $\gamma = 0,0001$ и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$

$\alpha =$	0,1	1	2	4	6	8	12
$\beta =$	143,0	53,0	42,6	36,3	33,8	32,5	31,5
$\sigma_{кр} =$	568	663	753	907	1040	1153	1353
$\sigma'_{кр} =$	367	454	538	684	813	923	1120
$\sigma''_{кр} =$	880	970	1050	1200	1330	1430	1630
$\alpha =$	16	20	32	50	70	90	100
$\beta =$	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6
$\sigma_{кр} =$	1530	1780	2080	2570	3020	3400	3580
$\sigma'_{кр} =$	1290	1440	1840	2330	2770	3160	3330
$\sigma''_{кр} =$	1810	1960	2350	2840	3280	3670	3840

Рассмотрим в качестве примера строительную стальную двутавровую балку следующих размеров: длина $2l = 6 \text{ м}$; высота $h = 60 \text{ см}$; ширина полки $b = 18 \text{ см}$; толщина стенки $\delta_1 = 1,7 \text{ см}$; средняя толщина полки $\delta = 2,2 \text{ см}$; площадь поперечного сечения $F = 175 \text{ см}^2$; главная жесткость изгиба $EJ_y = 91\,060 E \text{ кг/см}^2$; главная жесткость изгиба $EJ_z = 1840 E \text{ кг/см}^2$. Из уравнения (224), стр. 204 имеем

$$C = G \left(\frac{2}{3} b\delta^3 + \frac{1}{3} h\delta^3 \right) = 226G.$$

Тогда из уравнения (h), полагая $E = 2,6G$, находим $\alpha = 4,78$ и из выражения (i) получаем

$$\gamma = \frac{1840}{91\,060 \cdot 100} = 202 \cdot 10^{-6}.$$

Путем интерполяции из табл. 16 получаем при $\alpha = 4,78$

$$\sigma_{кр} = 907 + (1040 - 907) \frac{0,78}{2} = 959 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Более подробное исследование этого предмета см. в статье автора *Trans. Am. Soc. Civil. Engrs.*, т. 87, стр. 1247, 1924 и его «*Theory of Elastic Stability*», гл. 5, 1936; русский перевод, 1946, 1955; см. также E. Chwalla, *цит.* на стр. 168.

Это критическое напряжение при $\gamma = 0,0001$. Критическое напряжение в рассматриваемом примере будет равняться $959 \cdot \gamma \cdot 10^4 = 1937 \text{ кг/см}^2$. Нагрузка, соответствующая этому напряжению, должна рассматриваться как предельная нагрузка для балки.

Этот числовой результат показывает, что боковое выпучивание может иметь место при напряжениях, меньших предела прочности материала при непосредственном сжатии и даже меньших предела упругости. Это обстоятельство следует учитывать, и для определения рабочих напряжений нужно принимать за основу критическое напряжение, а не предел текучести. В этом примере, взяв коэффициент безопасности, равный 3, найдем, что рабочее напряжение будет равняться $1937/3 = 646 \text{ кг/см}^2$.

ГЛАВА VI

ДЕФОРМАЦИИ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

40. Толстостенный цилиндр

Если круглый цилиндр со стенкой постоянной толщины подвергается действию равномерно распределенных внутреннего и наружного давлений, то вызываемые ими деформации будут симметричными относительно оси цилиндра и не будут меняться по его длине. Рассмотрим кольцо, вырезанное из цилиндра двумя перпендикулярными к его оси плоскостями, отстоящими одна от другой на единицу (рис. 127). Из условий симметрии следует, что по граням элемента

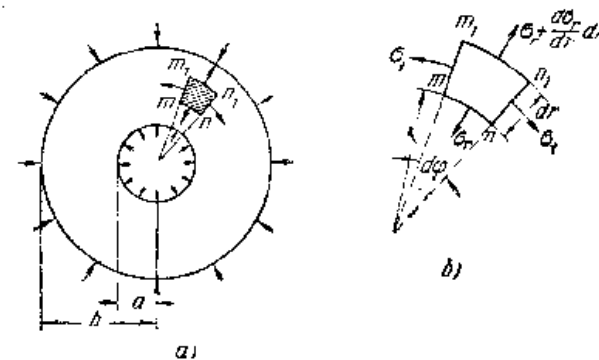


Рис. 127.

$m_1 n_1$ (рис. 127, *b*), выделенного из этого кольца двумя осевыми плоскостями и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями, не будут действовать касательные напряжения. Пусть σ_t означает окружное напряжение, действующее по нормали к граням $m_1 n_1$ и $m_2 n_2$ элемента, и σ_r — радиальное напряжение, нормальное к грани $m_1 m_2$. Это напряжение изменяется с изменением радиуса r , и величина этого изменения в расстоянии dr равняется $(d\sigma_r/dr) dr$. Нормальное радиальное напряжение по грани $m_1 n_1$, следовательно, будет

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr.$$

Проектируя усилия, приходящиеся на элемент, на направление биссектрисы угла $d\varphi$, получим следующее уравнение равновесия:

$$\sigma_r d\varphi + \sigma_t dr d\varphi - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\varphi = 0, \quad (a)$$

или, пренебрегая малыми величинами высшего порядка,

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0, \quad (b)$$

Это уравнение содержит два неизвестных: напряжения σ_t и σ_r . Второе уравнение, необходимое для определения этих величин, получится из рассмотрения деформации цилиндра.

Деформация цилиндра симметрична относительно его оси и состоит из радиального перемещения всех точек стенки цилиндра. Это перемещение постоянно в окружном направлении, но меняется по радиусу, т. е. является только функцией радиуса. Если u означает радиальное перемещение цилиндрической поверхности радиуса r , то перемещение на поверхности радиуса $r + dr$ равняется $u + \frac{du}{dr} dr$. Следовательно, элемент mm_1n_1 претерпевает полное удлинение u радиальном направлении, равное $(\frac{du}{dr} dr)$, и относительное удлинение в этом же направлении будет

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (c)$$

Относительное удлинение того же элемента в окружном направлении равно относительному удлинению соответствующего радиуса, т. е.

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (d)$$

На основании формул (38) т. I, стр. 55, выражения для напряжений в зависимости от деформаций будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Нормальные напряжения σ_r и σ_t , очевидно, не независимы, поскольку они могут быть выражены в функции одного u . Подставляя выражения (170) в уравнение (b), получаем следующее уравнение для определения u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (e)$$

¹⁾ Весом элемента здесь пренебрегается.

Общее решение этого уравнения будет

$$u = C_1 r - \frac{C_2}{r}, \quad (f)$$

что можно проверить путем подстановки. Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра, где давления, т. е. нормальные напряжения σ_r , известны. Подставляя решение (f) в выражения (170), получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) - C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right], \quad (g)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1 (1+\mu) + C_2 \frac{1-\mu}{r^2} \right]. \quad (h)$$

Если p_b и p_n означают соответственно внутреннее и наружное давления, то условия на наружной и внутренней поверхностях цилиндра будут

$$(\sigma_r)_{r=b} = -p_n \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=a} = -p_b. \quad (i)$$

Знак правой части каждого условия отрицателен, потому что за положительное нормальное напряжение принято растягивающее. Подстановка выражения σ_r (выражение (g)) в условия (i) дает два уравнения для определения постоянных C_1 и C_2 , из которых получаем

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \frac{a^2 p_b - b^2 p_n}{b^2 - a^2}, \quad C_2 = \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_b - p_n)}{b^2 - a^2}. \quad (j)$$

Имея эти значения для произвольных постоянных, мы из выражений (g) и (h) получим общие формулы¹⁾ для нормальных напряжений σ_r и σ_t :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_n - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_n) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}, \\ \sigma_t &= \frac{a^2 p_n - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{(p_n - p_b) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Интересно отметить, что сумма этих двух напряжений остается постоянной; деформации же всех элементов в направлении оси цилиндра одинаковы, и поперечные сечения цилиндра после деформации остаются плоскими. Это оправдывает наше рассмотрение задачи как плоской.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $p_n = 0$, т. е. цилиндр подвергается *только внутреннему давлению*. Тогда формулы (171) напишутся так:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (172)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right). \quad (173)$$

¹⁾ Это решение появилось впервые в статье Ламе и Клапейрона «Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes», Mém. divers savans, т. 4, 1833.

Эти уравнения показывают, что σ_r всегда является сжимающим напряжением, а σ_t — растягивающим напряжением. Последнее является наибольшим на внутренней поверхности цилиндра, где оно равняется

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p_n (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \quad (174)$$

Это уравнение показывает, что $(\sigma_t)_{\max}$ всегда численно больше внутреннего давления и приближается к этой величине, когда b увеличивается. Наименьшее значение σ_t будет на наружной поверхности цилиндра. Отношение

$$\frac{(\sigma_t)_{\max}}{(\sigma_t)_{\min}} = \frac{a^2 + b^2}{2a^2}$$

увеличивается с увеличением толщины стенки цилиндра. При сравнительно малой толщине нет большой разницы между наибольшим и наименьшим значениями σ_t . Взяв, например, $b = 1,1a$, найдем, что $(\sigma_t)_{\max}$ превосходит $(\sigma_t)_{\min}$ на 10,5%. Поэтому ошибка будет малой, если мы предположим, что растягивающие напряжения σ_t равномерно распределяются по толщине стенки, и воспользуемся формулой

$$\sigma_t = \frac{p_n a^2}{(b - a)},$$

которая совпадает с выражением, приведенным на стр. 106 для тонкостенных цилиндров. Касательное напряжение будет наибольшим на внутренней поверхности цилиндра, где оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_n (a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} - \frac{p_n (b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} \right] = \frac{p_n b^2}{b^2 - a^2}. \quad (k)$$

Когда на цилиндр действует только наружное давление, мы имеем $p_n = 0$, и формулы (171) дают

$$\sigma_r = -\frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (175)$$

$$\sigma_t = -\frac{p_n b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (176)$$

В этом случае σ_r и σ_t оба — сжимающие напряжения, и σ_t всегда численно больше, чем σ_r . Наибольшее сжимающее напряжение будет на внутренней поверхности цилиндра, где

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{2p_n b^2}{b^2 - a^2}. \quad (177)$$

Интересно отметить, что когда отношение b/a радиусов цилиндра увеличивается, то это наибольшее сжимающее напряжение приближается к удвоенному значению наружного давления, действующего на цилиндр, а именно к $-2p_n$.

Рассмотрим теперь деформацию цилиндра. Подставляя значения (j) произвольных постоянных в уравнение (f), находим

$$u = \frac{1}{E} \left[\frac{\mu a^2 p_n - b^2 p_n}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_n - p_n)}{(b^2 - a^2) r} \right]. \quad (178)$$

Это дает радиальное перемещение для любой точки стенки цилиндра. В частном случае цилиндра, подверженного только внутреннему давлению ($p_n = 0$), радиальное перемещение на внутренней поверхности на основании выражения (178) будет

$$(u)_{r=a} = \frac{a p_n}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu \right). \quad (179)$$

Когда цилиндр подвергается только наружному давлению ($p_n = 0$), радиальное перемещение на наружной поверхности равно

$$(u)_{r=b} = -\frac{b p_n}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right). \quad (180)$$

Знак минус указывает на то, что перемещение направлено к оси цилиндра.

41. Напряжения, вызываемые горячей посадкой

Если необходимо вызвать контактное давление между штулкой и валом или между двумя кольцами, собранными одно внутри другого, то обычно на практике делают внутренний радиус наружной части меньше наружного радиуса внутренней части и конструкцию собирают после предварительного подогревания наружной части. После охлаждения возникнет контактное давление между двумя частями, которое называется *давлением от горячей посадки*. Величину этого давления и напряжения, возникающие от него, легко можно вычислить при помощи формул предыдущего параграфа.

Предположим, например, что наружный радиус внутреннего цилиндра в ненапряженном состоянии больше внутреннего радиуса наружного цилиндра (рис. 128) на величину δ . Тогда после сборки возникнет давление p между двумя цилиндрами. Величина p найдется из того условия, что увеличение внутреннего радиуса наружного цилиндра плюс уменьшение наружного радиуса внутреннего цилиндра должно быть равно δ .

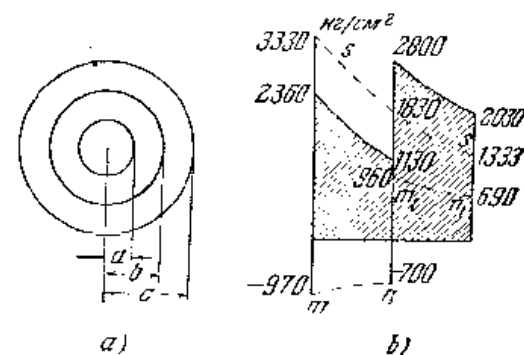


Рис. 128.

Следовательно, на основании формул (179) и (180) запишем

$$\frac{bp}{E} \left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \mu \right) - \frac{bp}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) = \delta,$$

откуда

$$p = \frac{E\delta}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)}. \quad (181)$$

Тогда формулы (172) и (173) дадут напряжения в наружном цилиндре (181), а (175) и (176) — напряжения во внутреннем цилиндре. При расчете обычно рассматриваются напряжения, возникающие на внутренней поверхности наружного цилиндра. Эти напряжения будут

$$\sigma_t = \frac{p(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2}, \quad \sigma_r = -p.$$

Наибольшее касательное напряжение на этой поверхности равно (см. формулу (k), стр. 176)

$$\tau_{\max} = \frac{pc^2}{c^2 - b^2},$$

или, подставляя вместо p его значение из формулы (181), находим

$$\tau_{\max} = \frac{E\delta c^2 (b^2 - a^2)}{2b^2 (c^2 - a^2)}. \quad (182)$$

В частном случае сплошного вала и втулки мы имеем $a=0$, что дает

$$p = \frac{E\delta}{2bc^2} (c^2 - b^2), \quad (183)$$

$$\tau_{\max} = \frac{E\delta}{2b}, \quad (184)$$

т. е. наибольшее касательное напряжение будет таким же, как в простом растянутом стержне, который претерпевает относительное удлинение, равное δ/b .

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что оба цилиндра имеют одинаковую длину. В случае вала и втулки (рис. 129) выступающие части вала сопротивляются сжатию, в результате чего давление вблизи концов втулки увеличивается, как показано заштрихованной зоной¹⁾.

¹⁾ Экспериментальные исследования напряжений от горячей посадки приведены в статье: A. Huggenberger, Technische Blätter, Schweiz. Lokomotiv- und Maschinenfabrik, Winterthur, 1926. Дальнейшее рассмотрение напряжений от горячей посадки даны в статье: W. Janicki, Schweiz. Bauzeitung, т. 88, 93, 1926 и т. 90, стр. 127, 1927. См. также J. W. Baughner, Trans. A. S. M. E., т. 52, 1930 и O. J. Högger and C. W. Nelson, J. Appl. Mech., т. 4, стр. 183, 1937 и т. 5, стр. 32, 1938. Практические сведения о напряжениях от горячей посадки см. O. J. Högger, изд., A. S. M. E. Handbook, New York, стр. 178, 1953. Точное решение задачи см. S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, стр. 388, 1951.

Если составной цилиндр, как, например, представленный на рис. 128, подвергается внутреннему давлению, то вызываемые этим давлением напряжения будут такими же, как в цилиндре со сплошной стенкой толщиной $c - a$. Эти напряжения накладываются на напряжения от горячей посадки. Горячая посадка вызывает окружное сжимающее напряжение на внутренней поверхности цилиндра, которое уменьшает наибольшее окружное растягивающее напряжение, вызываемое внутренним давлением в этом месте, так что можно получить более благоприятное распределение напряжений, чем в случае цельной трубы (см. задачу 2, стр. 179). Поэтому цилиндры, составленные из нескольких труб, применяются в тех случаях, где внутренние давления очень высоки, как, например, в стволах орудий.

Распределение начальных напряжений, аналогичное описанному выше, в случае составных цилиндров можно также получить и в цельной трубе, применяя высокое внутреннее давление, достаточное для того, чтобы вызвать остаточную деформацию во внутренней части трубы. После удаления этого внутреннего давления останутся некоторые напряжения в трубе вследствие остаточной деформации, так что тогда внутренняя часть будет находиться в состоянии сжатия, а наружная часть в состоянии растяжения¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Определить окружные напряжения на внутренней и наружной поверхностях и в середине толщины стенки цилиндра при внутреннем радиусе 10 см и наружном радиусе 20 см, подверженного внутреннему давлению $p_B = 2000$ кг/см².

Ответ. Из формулы (173) получаем $(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = 8330$ кг/см²; $(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = 1830$ кг/см²; $(\sigma_t)_{r=20 \text{ см}} = 1330$ кг/см².

2. Определить напряжение в составном цилиндре (рис. 128), подверженном внутреннему давлению $p_B = 2000$ кг/см², если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $\delta = 0,012$ см.

Решение. Определим сначала первоначальные напряжения в цилиндре вследствие разности внутреннего радиуса наружной поверхности и наружного радиуса внутренней поверхности. По формуле (181) получаем

$$p = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,012 (15^2 - 10^2) (20^2 - 15^2)}{15 \cdot 2 \cdot 15^2 (20^2 - 10^2)} = 260 \text{ кг/см}^2.$$

Окружные напряжения, вызываемые этим давлением во внутреннем цилиндре, на основании формулы (176) будут

$$(\sigma_t)_{r=10 \text{ см}} = -\frac{2pb^2}{b^2 - a^2} = -\frac{2 \cdot 260 \cdot 15^2}{15^2 - 10^2} = -970 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = -\frac{p(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} = -700 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Дальнейшее изложение этого вопроса дано в п. 70.

Напряжения для наружного цилиндра на основании формулы (173) будут

$$(\sigma_r)_{r=15 \text{ см}} = \frac{p(b^2 + c^2)}{c^2 - b^2} = \frac{260(15^2 + 20^2)}{20^2 - 15^2} = 960 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=20 \text{ см}} = \frac{2pb^2}{c^2 - b^2} = \frac{2 \cdot 260 \cdot 15^2}{20^2 - 15^2} = 690 \text{ кг/см}^2.$$

Распределение первоначальных напряжений σ_r по толщине стенки показано на рис. 128, b пунктирами m_1 и m_2 . Напряжения, вызванные внутренним давлением, такие же, как и в предыдущей задаче, представлены на рисунке пунктиром ss . Наложение этих двух распределений напряжений дает эпюру напряжений, представленную заштрихованной площадью. Можно видеть, что благодаря первоначальным напряжениям, возникшим при сборке, наибольшее напряжение в цилиндре, подверженном внутреннему давлению, уменьшается с 3330 до 2800 кг/см².

3. Пользуясь рис. 128, найти напряжение σ_t от горячей посадки при $r = 15 \text{ см}$ и $r = 25 \text{ см}$, если $a = 10 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$, $c = 30 \text{ см}$. Воспользоваться коэффициентом насадки $\delta/b = 0,001$ и принять $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $(\sigma_t)_{r=15 \text{ см}} = -900 \text{ кг/см}^2$; $(\sigma_t)_{r=25 \text{ см}} = 917 \text{ кг/см}^2$.

4. Для втулки и вала на рис. 129 найти равномерное давление p , если радиус вала равен 15 см и наружный радиус втулки равен 30 см. Начальная разность диаметров между втулкой и валом равняется 0,03 см. Принять $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

42. Вращающийся диск постоянной толщины

Когда круглый диск вращается вокруг оси симметрии, которая перпендикулярна диску, то силы инерции вызывают напряжения, которые могут получиться очень большими при высоких скоростях. Эти напряжения распределяются симметрично относительно оси вращения и могут быть вычислены при помощи метода, указанного в п. 40. Предполагается, что напряжения не изменяются по толщине диска, и эта толщина принимается равной единице.

Уравнение равновесия такого элемента, как $m_1 m_2 d$, на рис. 127, выводится путем добавления к силам, которые были рассмотрены в п. 40, силы инерции, действующей на элемент:

$$\frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} dr d\theta, \quad (a)$$

В этом уравнении γ есть вес единицы объема и ω — угловая скорость диска. Остальные обозначения те же, что в п. 40. Тогда уравнение равновесия получится в следующем виде:

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} = 0. \quad (b)$$

Подставляя вместо напряжений σ_t и σ_r выражения их в зависимости от перемещения u (выражение (170), стр. 174), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + (1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2 r}{gE} = 0. \quad (185)$$

Общее решение этого уравнения получается путем сложения частного решения с решением соответствующего однородного уравнения (см. уравнения (e) и (f), стр. 175). Частное решение будет

$$u = - (1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2}{gE} \frac{r^3}{8}.$$

Тогда, пользуясь обозначением

$$N = (1 - \mu^2) \frac{\gamma \omega^2}{gE}, \quad (c)$$

получаем общее решение уравнения (185)

$$u = -N \frac{r^3}{8} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (d)$$

где так же, как и прежде, C_1 и C_2 — постоянные, которые нужно определить таким путем, чтобы удовлетворить условиям на краях диска.

Для диска с отверстием в центре (рис. 127) и при отсутствии сил на его контуре эти условия выразятся так:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0. \quad (e)$$

Общее выражение для σ_r получится, если подставить выражение (d) в первое из уравнений (170), стр. 174, что даст

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[-\frac{3 + \mu}{8} N r^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{r^2} \right]. \quad (f)$$

При $r = a$ и $r = b$ это выражение должно обратиться в нуль, как то следует из уравнений (e). Производя эту подстановку, мы получаем для определения C_1 и C_2 следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3 + \mu}{8} N a^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{a^2} &= 0, \\ -\frac{3 + \mu}{8} N b^2 + (1 + \mu) C_1 - (1 - \mu) C_2 \frac{1}{b^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

откуда

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8(1 + \mu)} (a^2 + b^2) N, \quad C_2 = \frac{3 + \mu}{8(1 - \mu)} a^2 b^2 N. \quad (h)$$

Общее выражение для u получится, если эти значения подставить в уравнение (d). Затем, подставив в уравнения (170) результирующее выражение для u , мы найдем

$$\sigma_r = \frac{3 + \mu}{8(1 - \mu^2)} EN \left(a^2 + b^2 - r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right), \quad (186)$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \mu}{8(1 - \mu^2)} EN \left(a^2 + b^2 - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} \right). \quad (187)$$

Если теперь N заменить его значением, данным формулой (с), и положить

$$\frac{a}{b} = \alpha, \quad \frac{r}{b} = x, \quad b\omega = v, \quad (i)$$

то формулы (186) и (187) станут следующими:

$$\sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + x^2 - x^2 - \frac{x^2}{x^2} \right), \quad (188)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + x^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} x^2 + \frac{x^2}{x^2} \right). \quad (189)$$

Видно, что радиальное напряжение σ_r обращается в нуль на краях, где $x=1$ или $x=\alpha$, и оно положительно для других значений x . Наибольшее же значение имеет место при

$$x = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

или

$$r = \sqrt{ab}. \quad (j)$$

Пользуясь формулой (j) для r , получаем из выражения (188)

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} (1-\alpha)^2. \quad (190)$$

Окружное напряжение σ_t достигает наибольшего значения на внутреннем крае диска. Подставляя $x=\alpha$ в выражение (189), получаем

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 + \frac{1-\mu}{3+\mu} \alpha^2 \right). \quad (191)$$

Можно видеть, что $(\sigma_t)_{\max}$ всегда больше, чем $(\sigma_r)_{\max}$.

На рис. 130 значения членов, содержащихся в скобках выражений (188) и (189), показаны как ординаты в зависимости от значений x , принятых абсциссами. Сплошные линии представляют случаи $\alpha=1/4$, т. е. внутренний радиус составляет $1/4$ наружного радиуса. Пунктиры представляют

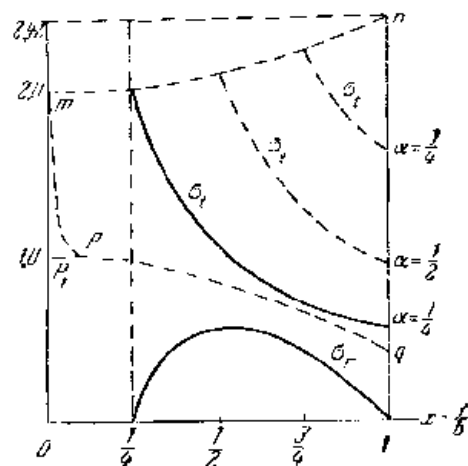


Рис. 130.

значения члена, содержащегося в скобках выражения (189), для других значений α . Формулой (191) устанавливается, что напряжение $(\sigma_t)_{\max}$ на внутреннем крае изменяется в зависимости от α по параболическому закону. Это показано кривой mn на рис. 130.

Интересно отметить, что когда внутренний радиус очень мал, т. е. α приближается к нулю, то наблюдается очень резкое изменение напряжения σ_t вблизи отверстия. Это показано кривой mpq , для которой

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{4}. \quad (192)$$

Для другого крайнего случая, когда внутренний радиус приближается к наружному радиусу диска и α приближается к единице, выражение (191) приводится к виду

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g}.$$

Это совпадает с формулой (15) т. I, стр. 36, которая была получена для тонкого вращающегося кольца. Видно, что в случае диска с отверстием в центре наибольшее напряжение незначительно меняется с изменением радиуса отверстия; значение для очень тонкого кольца лишь приблизительно на 20% выше значения для очень толстого кольца с малым отверстием.

В случае сплошного диска условие на конце будет $u=0$ при $r=0$; следовательно, постоянную C_2 в общем решении (уравнение (d)) нужно принять равной нулю. Постоянная C_1 найдется из условия, что $\sigma_r=0$ на наружном крае диска. Пользуясь вторым из выражений (g), мы, таким образом, получаем

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8(1+\mu)} N b^2. \quad (k)$$

Вводя теперь значения постоянных C_1 и C_2 в общее выражение (уравнение (d)) для перемещения u , подставляем затем результат в формулы (170) стр. 174. Таким путем получаем

$$\sigma_r = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} (1-x^2), \quad (193)$$

$$\sigma_t = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8} \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} x^2 \right), \quad (194)$$

где $x=r/b$. И радиальное, и окружное напряжения всегда положительны и увеличиваются с уменьшением x . Другими словами, напряжения увеличиваются с приближением их к центру. В центре ($x=0$) напряжения будут

$$(\sigma_t)_{\max} = (\sigma_r)_{\max} = \frac{\gamma v^2}{g} \frac{3+\mu}{8}. \quad (195)$$

Сравнивая это с формулой (192), видим, что благодаря концентрации напряжения на краю малого центрального отверстия в два раза больше, чем в центре сплошного диска. Закон изменения напряжения σ_t по радиусу сплошного диска представлен на рис. 130 пунктиром pqq .

Формулы, выведенные выше для вращающихся дисков, применяются иногда для сравнительно длинных цилиндров¹⁾, например, для роторов электрических машин. В больших машинах окружные скорости бывают весьма велики. Вышесказанные рассуждения показывают, что напряжения, вызываемые силами инерции, пропорциональны квадрату окружной скорости и поэтому они имеют первостепенное значение в таких случаях. Следовательно, для материала данной прочности и для данной угловой скорости ротора существует определенный предел для диаметра ротора, за который опасно переходить.

При выборе рабочих напряжений для таких роторов необходимо иметь в виду, что очень большие поковки могут, по всей вероятности, иметь дефекты материала у центра, где как раз достигают наибольшего значения напряжения, обусловленные силами инерции. Чтобы исключить неопределенность, на практике обычно просверливают центральное отверстие по оси ротора. Хотя наибольшие напряжения вследствие наличия отверстия увеличиваются вдвое, однако это компенсируется возможностью исследования доброкачественности материала внутри поковки. При предварительных испытаниях ротор заставляют вращаться со скоростью, выше обычной²⁾, так что напряжения около отверстия могут превосходить предел текучести. После остановки ротора напряжения не исчезнут совершенно вследствие остаточной деформации материала у отверстия. Внутренняя часть металла, претерпевшая текучесть, сжимается наружной, а наружная, наоборот, растягивается внутренней³⁾. Это явление совершенно аналогично тому, что происходит в толстостенном цилиндре, перенапряженном под действием внутреннего давления (см. стр. 179). Остаточные напряжения, вызываемые у отверстия перенапряжением, противоположны по знаку напряжениям, обусловленным силами инерции; следовательно, перенапряжение оказывает благоприятное влияние на окончательное распределение напряжения в роторе⁴⁾.

Необходимо также заметить, что полученные выше выражения для напряжений (см. формулы (188) и (189)), кроме ν и постоянных, определяющих свойства материала, содержат лишь отношения z и x . Следовательно, для данного материала и данной окружной скорости напряжения равны в подобно расположенных точках геометрически

¹⁾ Распределение напряжений в толстых дисках рассмотрено в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 352, 1951; русский перевод, 1937, стр. 348.

²⁾ В электрических машинах обычно на 20% выше рабочей скорости.

³⁾ Этот вопрос разобран С. Ноллегергом, Brown Bowery C. Mitt., ноябрь 1919.

⁴⁾ Остаточные напряжения во вращающихся дисках, вследствие текучести металла, были исследованы A. Nadai and L. H. Donnell'em; см. Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928. См. также H. Нейску, Z. angew. Math. u. Mech., т. 4, стр. 331, 1924 и F. Laszlo, там же, т. 5, стр. 281, 1925.

подобных роторов. Это обстоятельство может упростить вычисления напряжений геометрически подобных дисков, а также может быть использовано при установлении прочности больших дисков на основании испытаний моделей.

В предыдущем изложении предполагалось, что контуры дисков свободны от внешних сил. Если же на диск действуют растягивающие или сжимающие силы, равномерно распределенные по его контуру, то вызываемые ими напряжения найдутся при помощи формул, выведенных для толстостенных цилиндров (п. 40). Эти напряжения (см. формулы (171)) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= k - \frac{n}{r^2}, \\ \sigma_t &= k + \frac{n}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где k и n — постоянные, зависящие от размеров диска и от величины внешних сил, действующих на контуре. Напряжения, определяемые по формулам (I), должны быть присоединены к напряжениям из формул (188) и (189), и полные напряжения могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} - \beta_1 \omega^2 r^2, \\ \sigma_t &= A - \frac{B}{r^2} - \beta_2 \omega^2 r^2, \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\gamma}{g} \frac{3 + \mu}{8}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma}{g} \frac{1 + 3\mu}{8}, \quad (197)$$

A и B — постоянные интегрирования, которые можно вычислить в каждом частном случае при помощи выражений (171), (188) и (189). При обозначениях

$$\left. \begin{aligned} s &= \sigma_r + \beta_1 \omega^2 r^2, \\ t &= \sigma_t + \beta_2 \omega^2 r^2 \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

и

$$w = \frac{1}{r^2} \quad (199)$$

выражения (196) становится

$$s = A + Bw, \quad t = A - Bw. \quad (200)$$

Если s и t известны для какой-либо точки диска, то эти величины для другой точки можно легко найти, пользуясь следующим графическим методом¹⁾. Пусть s_1 и t_1 означают величины s и t для какой-либо точки, где $w = w_1$ (рис. 131). Тогда величины s_2 и t_2 для какой-либо другой точки, где $w = w_2$, получаются как отрезки, отсекаемые на вертикальной линии, проходящей через w_2 , прямыми $s_1 s_2$ и $t_1 t_2$, которые между собой пересекаются на оси ординат ($w = 0$) и одинаково наклонены к этой оси. Эти линии представляют графически уравнения (200). Они имеют общую ординату A на оси $w = 0$ и имеют равные и противоположные по знаку углы наклона ($\pm B$). Это графическое построение является весьма полезным при вычислении напряжений во вращающихся дисках переменной толщины, как мы увидим в следующем параграфе.

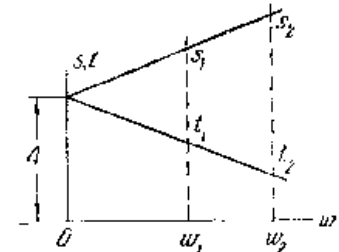


Рис. 131.

¹⁾ Этот метод был разработан R. G. Timmем, Dingle's Polytech. J., т. 338, стр. 217, 1923.

ЗАДАЧИ

1. Определить напряжения, возникающие под действием центробежных сил в роторе; наружный его радиус равен 63 см и радиус внутреннего отверстия — 10 см. Наружная часть ротора имеет прорезы глубиной 25 см, в которые вкладывается обмотка (рис. 132). Ротор стальной и делает 1800 оборотов в минуту. Вес обмотки в прорезях равен весу удаленного материала.

Решение. Часть ротора, заключенная между наружной поверхностью и цилиндрической поверхностью радиуса 40 см из-за наличия радиальных прорезов не может испытывать окружные растягивающие напряжения. Центробежная сила, возникающая в этом вращающемся кольце, передается в виде радиальных растягивающих напряжений на поверхность цилиндра радиусом 40 см. Величина этих напряжений равняется

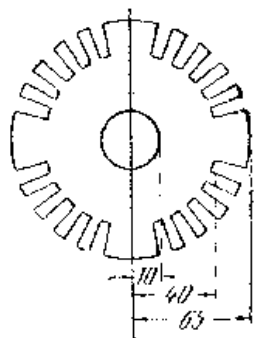


Рис. 132.

$$p_0 = \frac{1}{2\pi \cdot 40} \int_{r=40}^{r=63} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dV = \frac{1}{2\pi \cdot 40} \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot 2\pi \int_{40}^{63} r^2 dr = \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot 1755.$$

При $\gamma = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $g = 981 \text{ см/сек}^2$ это дает

$$p_0 = 495 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее окружное напряжение, возникающее на внутреннем контуре от растягивающих напряжений p_0 , по формуле (177) равняется

$$\sigma'_i = \frac{2 \cdot 495 \cdot 40^2}{40^2 - 10^2} = 1056 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее окружное напряжение на том же контуре, обусловленное влиянием массы ротора, расположенной между радиусами в 10 см и 40 см, и вычисленное, как для вращающегося диска, по формуле (191), равняется $\sigma'_i = 378 \text{ кг/см}^2$. Тогда полное наибольшее окружное напряжение на внутреннем контуре будет равно $(\sigma_r)_{\max} = (\sigma'_i + \sigma''_i) = 1056 + 378 = 1434 \text{ кг/см}^2$.

2. Стальное кольцо насажено на чугунный диск (рис. 128). Определить изменение давления по поверхности их соприкосновения, вызванное силами инерции при 3600 об/мин, если $a = 2,5 \text{ см}$, $b = 12,5 \text{ см}$, $c = 25 \text{ см}$, $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E_a = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma_c = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $\gamma_a = 0,0072 \text{ кг/см}^3$.

Решение. Пусть p_0 будет увеличение давления между кольцом и диском. Произвольные постоянные в уравнении (f) для наружного кольца определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_c}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} Nc^2 + (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2 \frac{1}{c^2} \right] &= 0, \\ \frac{E_c}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} Nb^2 + (1+\mu)C_1 - (1-\mu)C_2 \frac{1}{b^2} \right] &= -p_0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Если мы применим уравнение (f) к внутреннему диску, для которого произвольные постоянные обозначим через C'_1 и C'_2 , а N — постоянная, определяемая формулой (с), то для определения C'_1 и C'_2 мы получим следующие

уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_a}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} N'b^2 + (1+\mu)C'_1 - (1-\mu)C'_2 \frac{1}{b^2} \right] &= -p_0, \\ \frac{E_a}{1-\mu^2} \left[-\frac{3+\mu}{8} N'a^2 - (1+\mu)C'_1 - (1-\mu)C'_2 \frac{1}{a^2} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Из уравнений (m) и (n) можно найти четыре постоянные C_1 , C_2 , C'_1 и C'_2 как функции p_0 . Величина же p_0 найдется из того условия, что на поверхности соприкосновения радиальные перемещения диска и кольца равны между собой. В результате, пользуясь уравнением (d), получим для определения p_0 следующее уравнение:

$$-N \frac{b^3}{8} + C_1 b + \frac{C_2}{b} = -N' \frac{b^3}{8} + C'_1 b + \frac{C'_2}{b}. \quad (o)$$

Числовые вычисления предоставляется произвести читателю.

3. Найти изменение давления p , вычисленного в задаче 4 и 41, если вал и втулка вращаются со скоростью 1800 оборотов в минуту, $\gamma = 0,0078 \text{ кг/см}^3$ и $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

43. Вращающийся диск переменной толщины

Вопрос об определении напряжений во вращающемся диске переменной толщины является более сложным¹⁾. Мы разберем приближенный метод решения этой задачи, основанный на замене действительного профиля системы дисков постоянной толщиной (рис. 133)²⁾. Напряжения в отдельных дисках вычисляются по формулам, выведенным в п. 42. В таком случае мы должны будем рассмотреть условия на границах между этими дисками, например, в сечениях 2, 3, 4 (рис. 133), где имеет место резкое изменение толщины диска. Если y и $y + \Delta y$ означают толщины двух рассматриваемых смежных дисков, то соответствующее изменение $\Delta \sigma_r$ величины радиального напряжения σ_r найдется из уравнения

$$\sigma_r y = (\sigma_r + \Delta \sigma_r) (y + \Delta y),$$

которое выведено в предположении, как и прежде, что напряжения равномерно распределяются по толщине диска. Решая это уравнение,

¹⁾ Общее уравнение для этого случая вместе с решениями его разными методами можно найти в книге: A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 6 изд., стр. 312—340, 1924. Вращающийся диск конического профиля был рассмотрен Н. М. Мартино, Engineering, т. 115, стр. 1, 1923; В. Ходкинсон, Engineering, т. 116, стр. 274, 1923 и А. Фишером, Z. Osterr. Ing. u. Architekt.-Ver., т. 74, стр. 46, 1922. См. также книгу: L. Malkin, Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, Berlin, 1935 и книгу: С. В. Визенго и Р. Граммел, Technische Dynamik, т. 2, ст. 5, 1953.

²⁾ Этот метод был разработан М. Доналто, Die Berechnung rotierender Scheiben und Ringe, Berlin, 1912. Это описано на английском языке Н. Негле в Engineering, т. 106, стр. 131, 1918. Дальнейшая разработка метода принадлежит Р. Граммелю, цит. на стр. 185, и числовой пример рис. 133 был взят из этой статьи. См. также статьи: М. Г. Дриесен, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928; R. Grammel, Ing. Arch., т. 7, стр. 136, 1936; R. G. Olsson, там же, т. 8, стр. 270 и 373, 1937; А. Хейд, там же, т. 10, стр. 339, 1939. Приближенный метод решения задачи был дан Г. Ф. Лакс, J. Appl. Mech., т. 12, стр. A-65, 1945.

получаем

$$\Delta\sigma_r = -\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r \quad (2)$$

Изменение $\Delta\sigma_r$ окружного напряжения в том же сечении найдется из условия, что относительное окружное удлинение будет одним и тем же на обеих сторонах сечения. Следовательно,

$$\sigma_r - \mu\sigma_r = (\sigma_r + \Delta\sigma_r) - \mu(\sigma_r + \Delta\sigma_r),$$

откуда

$$\Delta\sigma_r = \mu\Delta\sigma_r.$$

Тогда из соотношений (198) найдем

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= \Delta\sigma_r = -\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r, \\ \Delta t &= \Delta\sigma_r = \mu\Delta s. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Формулы (197), (198), (199) и (201) совместно с графическим решением, данным на рис. 131, достаточны для расчета диска переменной толщины.

В качестве примера рассмотрим изображенный на рис. 133 диск, вращающийся со скоростью 3000 оборотов в минуту. Размеры диска даны

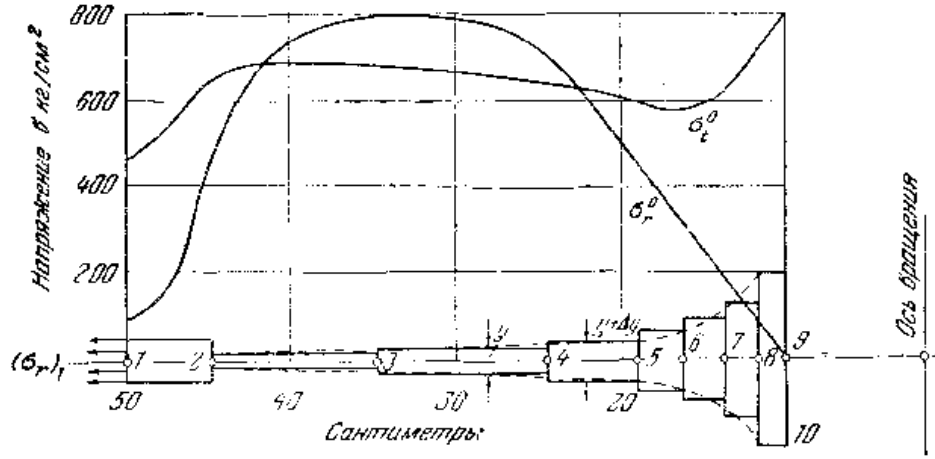


Рис. 133.

в табл. 17. В дополнение предположим, что центробежные силы, приложенные на внешнем крае, как, например, центробежная сила лопатки турбины, вызывают радиальное напряжение на внешнем контуре, равное $(\sigma_r)_1 = 100 \text{ кг/см}^2$. Пусть, $\mu = 0,3$ и $\gamma = 0,00785 \text{ кг/см}^3$. Тогда из соотношений (197) мы получим $\beta_1\omega^2 = 0,327 \text{ кг/см}^2$, $\beta_3\omega^2 = 0,188 \text{ кг/см}^2$.

Первые восемь колонок табл. 17 составлены на основании приведенных выше данных и рис. 133.

Вычисление напряжений мы начнем с внешнего контура диска, где известно напряжение $(\sigma_r)_1$. Величина окружного напряжения $(\sigma_t)_1$ на наружном контуре обычно бывает неизвестной, поэтому для начала расчета необходимо ей задаться. Возьмем для простоты вычисления $(\sigma_t)_1$ так, чтобы s и t были равны между собой (см. формулы (198)). Тогда

$$(\sigma_t)_1 = (\sigma_r)_1 + \beta_1\omega^2 r_1^2 - \beta_3\omega^2 r_1^2,$$

Таблица 17

Вычисления напряжений во вращающемся диске

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Поперечное сечение	r см	r^2 см ²	$10^8 \frac{\omega^2}{c.m.^2}$	$\beta_1\omega^2 r^2$ кг/см ²	$\beta_3\omega^2 r^2$ кг/см ²	y см	$\frac{\Delta y}{y + \Delta y}$	σ_r кг/см ²	Δs кг/см ²	Δt кг/см ²	σ_t кг/см ²	σ_t^0 кг/см ²	σ_t^0 кг/см ²
1	50	2500	4,00	817	470	2,5		100			447	100	479
2	45	2025	4,94	662	381	1,0	+1,50	255	+383	+113	536	440	628
3	35	1225	8,16	401	230	1,5	-0,333	984	-328	-98	705	801	705
4	25	625	16,00	204	118	2,5	-0,400	950	-380	-114	626	724	633
5	20	400	25,00	131	75	3,5	-0,286	682	-195	-58	514	534	605
6	17,5	306	32,63	100	58	4,75	-0,263	532	-140	-42	459	402	688
7	15	225	44,44	74	42	7,0	-0,321	421	-135	-40	430	280	604
8	12,5	156	64,00	51	29	10,0	-0,300	294	88	-26	419	132	666
9	10	100	100,00	33	19			178			447	0	908
								-281			570		

или, пользуясь числами 5-й и 6-й колонок таблицы, получаем

$$(\sigma_r)_1 = 100 + 817 - 470 = 447 \text{ кг/см}^2.$$

Теперь из формул (198) находим

$$s_1 = (\sigma_r)_1 + \beta_1 \omega^2 r_1^2 = 100 + 817 = 917 \text{ кг/см}^2,$$

$$t_1 = (\sigma_t)_1 + \beta \omega^2 r_1^2 = 447 + 470 = 917 \text{ кг/см}^2.$$

Так как $s_1 = t_1$, то при построении, указанном на рис. 131, прямые s и t совпадают. На рис. 134, где s и t приняты ординатами, а $\omega = 1/r^2$ — абсциссой, эти линии изображаются линией $a-a$, параллельной оси ω . Длина этой

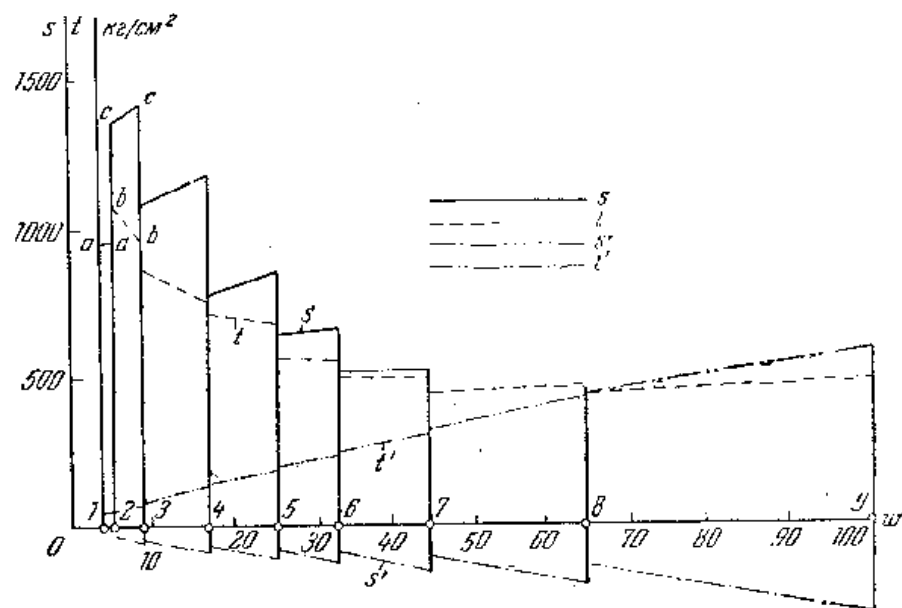


Рис. 134.

линии, соответствующая радиальному расстоянию 1—2 диска (рис. 134), определится из чисел 4-й колонки таблицы. Таким образом, получим для сечения 2 (рис. 133)

$$s_2 = t_2 = 917 \text{ кг/см}^2,$$

а пользуясь формулами (198), найдем

$$(\sigma_r)_2 = s_2 - \beta_1 \omega^2 r_2^2 = 917 - 662 = 255 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_t)_2 = t_2 - \beta \omega^2 r_2^2 = 917 - 381 = 536 \text{ кг/см}^2.$$

В сечении 2 имеет место резкое изменение толщины диска. Чтобы принять это в расчет, мы воспользуемся формулами (201) совместно с числами 8-й колонки таблицы 17. Тогда

$$(\Delta s)_2 = (\Delta \sigma_r)_2 = \left(-\frac{\Delta y}{y + \Delta y} \sigma_r \right) = 1,50 \cdot 255 = 383 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\Delta t)_2 = (\Delta \sigma_t)_2 = \mu (\Delta s)_2 = 0,3 \cdot 383 = 115 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы получить точки b и c , мы должны прибавить эти величины к ординате точки a на рис. 134; линии bb и cc тогда будут построены, как указано на рис. 131. Таким же образом будут найдены s_3 и t_3 для сечения 3. Повторяя указанный процесс, получим все необходимые данные для сечения 3 и т. д. Таким образом, мы можем вычислить все значения верхних строчек в колонках от 9-й до 12-й табл. 17.

Вследствие того, что напряжение $(\sigma_r)_1$ на краю диска было взято произвольно, условия на внутреннем контуре обычно не будут удовлетворены и напряжение $(\sigma_r)_b$, полученное указанным способом, не будет совпадать с напряжением, которое в действительности там имеется. Для того чтобы удовлетворить условиям на внутреннем контуре, необходимо произвести дополнительное вычисление. Положив $(\sigma_r)_1 = 0$, $\omega = 0$ и взяв для $(\sigma_t)_1$ произвольное значение (в расчете принято $(\sigma_t)_1 = 50 \text{ кг/см}^2$), получим тем же, что и ранее, приемом соответствующее распределение напряжений. В этом случае по формулам (198) мы получаем $s = \sigma_r$ и $t = \sigma_t$. Результаты этих вычислений приведены в нижних строчках колонок от 9-й до 12-й, а соответствующие построения представлены линиями t' и s' на рис. 134. Решение, которое удовлетворяет действительным условиям на внутреннем контуре диска, получится путем сочетания двух найденных выше распределений напряжений следующим образом. Пусть $(\sigma_r)_b$ и $(\sigma_r)_{b'}$ будут радиальные напряжения на внутреннем контуре диска, полученные соответственно при первом и втором вычислениях, и пусть $(\sigma_r)_b^0$ означает действительное напряжение на внутреннем контуре. Тогда решение для действительных условий получится, если напряжения, найденные во втором вычислении, умножить на величину

$$n = \frac{(\sigma_r)_b^0 - (\sigma_r)_b}{(\sigma_r)_{b'}}$$

и присоединить их к напряжениям, найденным в первом вычислении. Величина средних напряжений в сечениях, где толщина резко изменяется, может быть вычислена из следующих уравнений:

$$(\sigma_r)^0 = \left(\sigma_r + \frac{\Delta s}{2} \right) + n \left(\sigma_r' + \frac{\Delta s'}{2} \right),$$

$$(\sigma_t)^0 = \left(\sigma_t + \frac{\Delta t}{2} \right) + n \left(\sigma_t' + \frac{\Delta t'}{2} \right).$$

Результаты этих вычислений в случае, когда радиальные напряжения на внутреннем контуре равны нулю, приведены в двух последних колонках таблицы и представлены двумя кривыми на рис. 133.

44. Температурные напряжения в длинном полом цилиндре

Когда стенки цилиндра неравномерно нагреваются, то их элементы расширяются неодинаково, вследствие чего возникают температурные напряжения. В последующем изложении распределение температуры принимается симметричным относительно оси цилиндра и постоянным вдоль этой оси. В таком случае деформации цилиндра будут симметричны относительно оси, и мы можем воспользоваться методом, изложенным в п. 40. Вырежем из цилиндра кольцо с двумя поперечными сечениями, перпендикулярными к оси и находящимися одно от другого на расстоянии, равном единице. Можно допустить, что при деформации эти поперечные сечения остаются плоскими, если взять их на достаточном расстоянии от концов цилиндра¹⁾; следова-

¹⁾ На концах напряжения в направлении оси цилиндра равны нулю, и распределение напряжений получится более сложным.

тельно, относительные удлинения в осевом направлении будут постоянными. Пусть z будет осью цилиндра, w — осевое перемещение по z , остальные обозначения будут теми же, что и в п. 40 и на рис. 127. Тогда относительные удлинения в трех перпендикулярных направлениях будут

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{const}, \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (a)$$

Эти удлинения могут быть выражены в зависимости от напряжений $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_t$ и температурного расширения. Пусть α — коэффициент линейного расширения, а t — прирост температуры сверх равномерной начальной температуры. Температурный прирост меняется только с изменением радиального расстояния r . Из уравнений (43) (см. т. 1, стр. 64) удлинения определяются так:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_t) + \alpha t, \\ \epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_t) + \alpha t, \\ \epsilon_t &= \frac{\sigma_t}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_r) + \alpha t. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Обозначая через Δ относительное объемное расширение, получаем

$$\Delta = \epsilon_z + \epsilon_r + \epsilon_t = \frac{1+2\mu}{E} (\sigma_z + \sigma_r + \sigma_t) + 3\alpha t. \quad (c)$$

Из уравнений (b) и (c) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}, \\ \sigma_t &= \frac{E}{1+\mu} \left(\epsilon_t + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) - \frac{\alpha t E}{1-2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Уравнением равновесия элемента $mn m_1 n_1$ (рис. 127) будет (см. уравнение (b), стр. 174)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \quad (e)$$

Подставляя уравнения (d) и (a) в уравнение (e), получаем

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha \frac{dt}{dr}. \quad (202)$$

Это уравнение определяет перемещение u для какого-либо частного распределения температуры. Оно может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right] = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha \frac{dt}{dr}.$$

Интегрирование по r дает

$$\frac{d}{dr} (ru) = \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha tr + 2C_1 r.$$

Второе интегрирование приводит к решению

$$u = \frac{1}{r} \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha \int_a^r \sigma tr dr + C_1 r + C_2 \frac{1}{r}, \quad (f)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, которые должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить условиям на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Если эти поверхности считать свободными от внешних сил, то условия для определения C_1 и C_2 выражаются так:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0. \quad (g)$$

Общее выражение для σ_r получится, если подставить во второе из уравнений (d) $\epsilon_r = du/dr$ и $\epsilon_t = u/r$ и затем взять вместо u его значение (f), что дает

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{1+\mu}{(1-2\mu)r^2} \int_a^r \sigma tr dr + \frac{C_1}{1-2\mu} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_z \right). \quad (h)$$

Тогда из уравнений (g) находим

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{1+\mu}{1-2\mu} \frac{a^2}{b^2-a^2} \int_a^b \sigma tr dr, \\ C_1 &= \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{1}{b^2-a^2} \int_a^b \sigma tr dr - \mu \epsilon_z. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Подставляя эти значения в уравнение (h), получаем общее выражение для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_a^r \sigma tr dr + \frac{r^2 - a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^b \sigma tr dr \right], \quad (203)$$

а из уравнения равновесия (e) найдем общее выражение для σ_t :

$$\sigma_t = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r \sigma tr dr + \frac{r^2 + a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^b \sigma tr dr - \alpha t \right]. \quad (204)$$

Если закон распределения температуры по толщине стенки известен, то мы можем раскрыть интегралы выражений (203) и (204) и получить σ_r и σ_t для каждого частного случая.

Когда стенки цилиндра имеют температуру t_b на внутренней поверхности и температуру, равную нулю, на наружной ¹⁾, то закон распространения температуры можно представить следующей функцией:

$$t = \frac{t_b}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{r}. \quad (205)$$

¹⁾ Любое другое температурное состояние на поверхностях цилиндра можно получить путем наложения на это состояние состояние равномерного напряжения или охлаждения, что не вызывает каких-либо напряжений.

При помощи этого выражения для t формулы (203) и (204) получаются в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left[-\ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \ln\frac{b}{a} \right], \quad (206)$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left[1 - \ln\frac{b}{r} - \frac{a^2}{b^2-a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \ln\frac{b}{a} \right]. \quad (207)$$

Наибольшее значения σ_t достигает на внутренней или внешней поверхностях цилиндра. Подставляя в последнее уравнение $r=a$ и $r=b$, получаем

$$(\sigma_t)_{r=a} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2b^2}{b^2-a^2} \ln\frac{b}{a}\right), \quad (208)$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - \frac{2a^2}{b^2-a^2} \ln\frac{b}{a}\right). \quad (209)$$

Распределение температурных напряжений по толщине стенки для частного случая, когда a/b равно 0,3 и t_b отрицательно, показано на рис. 135.

Если толщина стенки мала по сравнению с наружным радиусом цилиндра, то мы можем упростить формулы (208) и (209), полагая

$$\frac{b}{a} = 1 + m, \quad \ln\frac{b}{a} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

и рассматривая m как малую величину. Тогда

$$(\sigma_t)_{r=a} = -\frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)} \left(1 + \frac{m}{3}\right), \quad (j)$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)} \left(1 - \frac{m}{3}\right). \quad (k)$$

В случае очень тонких стенок вторым членом в скобках этих уравнений можно пренебречь, и формулы совпадают с выведенными для неравномерно нагретой пластинки (см. выражение (87), стр. 81).

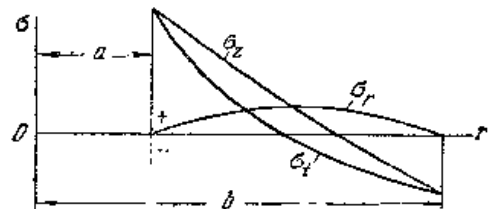


Рис. 135.

В предыдущем изложении мы рассмотрели только σ_r и σ_t и показали, что эти величины не зависят от удлинения ϵ_z в направлении оси цилиндра. Напряжения σ_z могут быть определены из первой формулы (d). Подставляя $\epsilon_r = du/dr$, $\epsilon_t = u/r$ и пользуясь выражениями (i) для u и (j) для произвольных постоянных, мы в состоянии найти общее выражение

для σ_z . Это выражение содержит постоянное удлинение ϵ_z в направлении оси цилиндра. Если мы допустим, что цилиндр может свободно удлиняться, то получим величину ϵ_z из условия, что сумма нормальных усилий по поперечному сечению цилиндра, перпендикулярному к оси z , равняется нулю. В результате этих вычислений получим следующее окончательное выражение для σ_z :

$$\sigma_z = \frac{E\alpha t_b}{2(1-\mu)\ln\frac{b}{a}} \left(1 - 2\ln\frac{b}{a} - \frac{2a^2}{b^2-a^2} \ln\frac{b}{a}\right). \quad (210)$$

Можно видеть, что на внутренней и наружной поверхностях цилиндра напряжения σ_z и σ_t равны между собой¹⁾.

В случае диска без отверстия в центре и имеющего постоянную толщину, которую можно считать малой по сравнению с радиусом b диска, радиальное и окружное напряжения определяются следующими выражениями:

$$\sigma_r = \alpha E \left(\frac{1}{b^2} \int_0^b tr \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r tr \, dr \right), \quad (211)$$

$$\sigma_t = \alpha E \left(-t + \frac{1}{b^2} \int_0^b tr \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r tr \, dr \right). \quad (212)$$

В каждом частном случае, когда температура t известна как некоторая функция r , интегралы в этих выражениях можно легко раскрыть и получить температурные напряжения.

Температурные напряжения представляют большое практическое значение, особенно для больших цилиндров, как, например, роторов паровых турбин, тяжелых валов или больших турбинных дисков. Во всех этих случаях нагревание или охлаждение должно быть постепенным для того, чтобы избежать температурный градиент в радиальном направлении²⁾. Температурные напряжения имеют важное значение также и в дизельных двигателях³⁾. В случае материалов, которые слабо сопротивляются растяжению, как, например, камень, кирпич и бетон, трещины, вероятно, начнут на наружной поверхности цилиндра, где t_b положительно.

ЗАДАЧИ

1. Определить температурные напряжения в цилиндре, имеющем $2a=1$ см, $2b=3$ см, $E\alpha/(1-\mu)=35,7$, если температура на внутренней его поверхности равняется $t_b=-1^\circ\text{C}$, а на наружной поверхности равняется нулю.

Решение. По формулам (208) и (209) находим

$$(\sigma_t)_{r=a} = (\sigma_z)_{r=a} = 24 \text{ кг/см}^2,$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = (\sigma_z)_{r=b} = -12 \text{ кг/см}^2.$$

Величина σ_z на основании формулы (206) достигает наибольшего значения при $r=0,78$ см и равняется $4,6$ кг/см². Закон распределения напряжений по толщине стенки показан на рис. 135.

¹⁾ Более подробное исследование температурных напряжений в цилиндрах было произведено С. П. Lees, Proc. Roy. Soc. (London) A, т. 101, 1922. Графики для быстрого расчета напряжений на основании уравнения (206) (207) и (210) были даны Л. Н. Ваткегом, Engineering, т. 124, стр. 443, 1927. Численный пример, который приведен ниже, взят из этой статьи.

²⁾ Рассмотрение вопроса о температурных напряжениях в цилиндрах, в которых температура изменяется вдоль оси, дано А. Stodola, цит. на стр. 187, Приложение. См. также G. Eichelberg, Forschungsarb., № 220, 1923 и № 263. О температурных напряжениях в дисках см. Н. Queclan, Z. Ver. deut. Ing., т. 72, стр. 322, 1928. Та же задача рассмотрена в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 408, 1951; русский перевод, 1937, стр. 401.

³⁾ См. R. Zulzer, Temperature Variation and Heat Stresses in Diesel Engines, т. 121, стр. 447, 1926; A. Nägele, Transfer of Heat in Reciprocating Engines, там же, т. 127, стр. 282, 1929; W. Nusselt, Z. Ver. deut. Ing., т. 70, стр. 468, 1926; J. N. Goodier, J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-33, 1937.

Угол закручивания на единицу длины равен

$$\theta = \frac{4\pi^2 M_k J_p}{F^4 G}, \quad (214)$$

где $J_p = (\pi/64)(bh^3 + b^3h)$ — полярный момент инерции площади поперечного сечения (см. т. I, Приложение А, стр. 352) и $F = \pi bh/4$ — площадь поперечного сечения.

Равносторонний треугольник. Наибольшее касательное напряжение имеет место в середине сторон (точки m на рис. 137) и может быть вычислено по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{20M_k}{b^3}. \quad (215)$$

Угол закручивания на единицу длины равняется

$$\theta = \frac{M_k}{0,6GJ_p} = \frac{46,2M_k}{b^4G}. \quad (216)$$

*Правильный шестиугольник*¹⁾. Для этого случая будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,217Fd}, \quad (217)$$

$$\theta = \frac{M_k}{0,133Fd^2G}, \quad (218)$$

где d — диаметр вписанного круга и F — площадь поперечного сечения.

Правильный восьмиугольник. Для этого случая будут

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{0,223Fd}, \quad (219)$$

$$\theta = \frac{M_k}{0,130Fd^2G}, \quad (220)$$

где F и d имеют то же значение, что и в предыдущем случае.

Трапеция. В случае равнобедренной трапеции приближенные значения наибольшего напряжения и угла закручивания получаются при условии замены трапеции эквивалентным прямоугольником, который получен, как указано пунктирными линиями на рис. 138. Из центра тяжести C трапеции чертим перпендикуляры BC и CD на боковые стороны и затем проводим вертикали через точки B и D . Формулы (158) и (159), данные в т. I, стр. 245, если применить к таким образом полученному прямоугольному поперечному сечению, дают приближенные значения τ_{\max} и θ для трапеции, показанной на рис. 138.

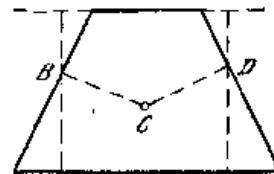


Рис. 138.

Для какого-либо сплошного (нетрубчатого) пада приближенное значение угла закручивания получается путем замены поперечного сечения *эквивалентным* эллиптическим сечением той же площади F и того же полярного момента инерции J_p . Тогда приближенное значение для θ будет дано формулой (214).

¹⁾ Решения для правильного шестиугольника, восьмиугольника и трапеции см. С. Вебер, Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit, Berlin, 1921.

ГЛАВА VII КРУЧЕНИЕ

45. Валы некругового поперечного сечения

Вопрос о кручении круглых валов был рассмотрен в т. I (стр. 238). Там же были даны формулы для наибольшего напряжения и для угла закручивания прямоугольных валов. Имеется несколько других форм поперечного сечения скручиваемого вала, для которых задача о распределении напряжений и угле закручивания решена. На следующих страницах дано несколько окончательных результатов, которые могут представить практический интерес.

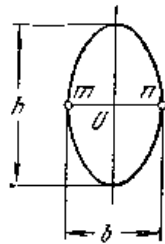


Рис. 136.

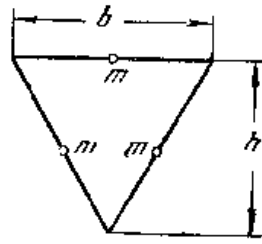


Рис. 137.

*Эллиптическое поперечное сечение*¹⁾. Наибольшее касательное напряжение имеет место на концах малой оси mn (рис. 136) и равняется

$$\tau_{\max} = \frac{16M_k}{\pi b^3 h}. \quad (213)$$

¹⁾ Решения задач на кручение для эллиптического поперечного сечения, а также для равностороннего треугольника принадлежат St.-Venant'у, Mémoires des savants étrangers, т. 14, 1855. Вывод формул, данных здесь, можно найти в книге Тимошенко and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 258, 1951; русский перевод, стр. 261, 1937.

46. Мембранная аналогия¹⁾.

Мембранная аналогия устанавливает определенные соотношения между поверхностью провисания равномерно нагруженной мембраны и распределением напряжений в скручиваемом стержне. Вообразим однородную мембрану с тем же очертанием, какое имеет поперечное сечение скручиваемого элемента, подверженную равномерно растяжению на контуре и равномерному поперечному давлению. Можно показать, что дифференциальное уравнение провисания поверхности²⁾ этой мембраны имеет тот же вид, что и уравнение, которое определяет распределение напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня. Если S — растягивающее усилие, приходящееся на единицу длины контура мембраны, p — поперечное давление, приходящееся на единицу площади, и θ — угол закручивания на единицу длины стержня, то оба дифференциальных уравнения будут идентичны, когда

$$\frac{p}{S} = 2G\theta \quad (a)$$

Если это условие выполнено, то устанавливаются следующие соотношения между поверхностью мембраны и распределением касательных напряжений при кручении: 1) *касательная к горизонтали поверхности* в любой точке провисшей мембраны дает направление касательного напряжения в соответствующей точке поперечного сечения скручиваемого стержня; 2) *наибольший угол* наклона мембраны относительно контура в любой точке определяет величину касательного напряжения в соответствующей точке скручиваемого стержня; 3) *удвоенный объем*, заключенный между поверхностью изогнутой мембраны и плоскостью, проходящей через ее контур, пропорционален крутящему моменту скручиваемого стержня.

Все эти положения можно легко доказать в случае кругового вала. Пусть рис. 139 представляет соответствующую круговую мембрану, равномерно растянутую усилиями S и нагруженную равномерным давлением p , действующим вверх. Рассматривая центральный участок *mn* радиуса r мембраны (рис. 139, *b*), замечаем, что полное давление

на этот участок равняется $\pi r^2 p$. Это давление уравновешивается растягивающими усилиями S , которые равномерно распределены по кругу радиуса r и имеют направление касательной к деформированной мембране. Обозначая через w смещения мембраны, получаем

$$\pi r^2 p = -2\pi r S \frac{dw}{dr}$$

и

$$-\frac{dw}{dr} = \frac{pr}{2S}. \quad (b)$$

Подставляя в это уравнение значение p/S , данное формулой (a), получаем

$$-\frac{dw}{dr} = G\theta r. \quad (c)$$

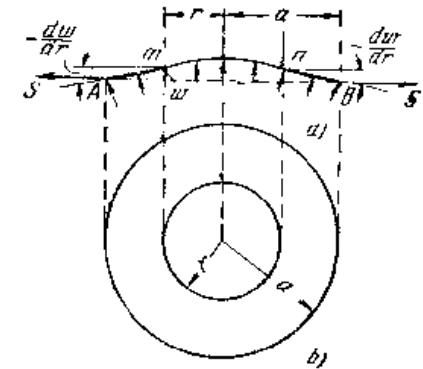


Рис. 139.

В правой стороне этого уравнения мы имеем выражение для напряжения кручения в скручиваемом круглом валу (см. уравнение (b), т. I, стр. 239). Следовательно, угол наклона касательной к мембране дает величину напряжения при кручении. Наибольший угол наклона касательной к мембране в каждой точке направлен по меридиану; следовательно, напряжение при кручении в валу в каждой точке имеет направление, перпендикулярное радиусу.

Это заключение снова согласуется с результатом элементарной теории кручения.

Чтобы определить крутящий момент, который вызывает напряжения, определяемые по уравнению (c), вычислим объем, заключенный между мембраной (рис. 139, *a*) и плоскостью контура *AB*. Интегрирование уравнения (c) дает деформированную поверхность мембраны

$$w = \frac{G\theta}{2} (a^2 - r^2),$$

а требуемый объем будет равняться

$$V = \int_0^a 2\pi r w \, dr = G\theta \frac{\pi a^4}{4} = \frac{1}{2} G\theta J_p.$$

Сравнивая это выражение с обычной формулой для крутящего момента (см. уравнение (150) т. I, стр. 240), мы в мембранной аналогии заключаем, что удвоенный объем дает величину крутящего момента. Следовательно, приведенные выше три положения относительно мембранной аналогии легко доказываются в случае кругового вала.

¹⁾ Аналогия была разработана L. P. G. and P. e. m., см. Phys. Z., т. 4, стр. 758, 1903; Jahresber. deut. math. Ver., т. 13, стр. 31, 1904. О дальнейшем развитии см. статьи: A. A. Griffith and G. I. Taylor, Proc. Inst. Mech. Engrg., стр. 755, 1917 и Advisory Comm. Aeronaut. (England) Tech. Reps., т. 3, стр. 920, 938 и 950, 1917—1918. См. также Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 289, 1951; русский перевод, стр. 267, 1937.

²⁾ Предполагается, что прогибы малы.

В других случаях форму поверхности провисания мембраны надо представить для заданного поперечного сечения вала; следовательно, качественные заключения относительно распределения напряжения при кручении легко получить. Например, для прямоугольного поперечного

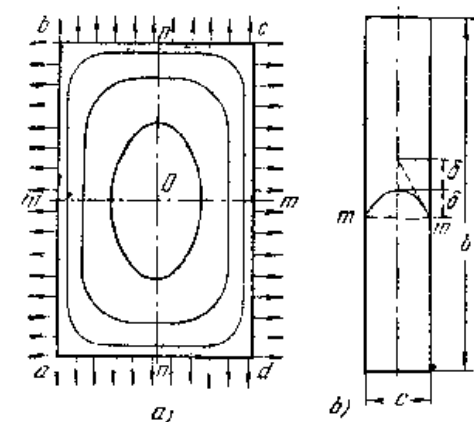


Рис. 140.

сечения поверхность изогнутой мембраны можно представить горизонталями, как показано на рис. 140, а. Напряжение обратно пропорционально расстоянию между этими линиями; следовательно, оно больше там, где линии сближаются. Наибольшее напряжение имеет место в точках $m - m$, где наклон поверхности мембраны является наибольшим. В углах a, b, c, d , где поверхность мембраны совпадает с плоскостью контура $abcd$, наклон этой поверхности равен нулю; следовательно, касательное напряжение в этих точках равно нулю.

Рассмотрим теперь случай узкого прямоугольного поперечного сечения (рис. 140, б). Изогнутую поверхность равномерно нагруженной мембраны на некотором удалении от коротких сторон прямоугольника можно считать цилиндрической. При этом допущении каждая полоска mm поверхности ведет себя подобно равномерно нагруженной нити и ее наибольший прогиб определяется выражением

$$\delta = \frac{pc^2}{8S},$$

или, пользуясь соотношением (а), находим

$$\delta = \frac{c^2}{4} C\theta.$$

Наибольшее напряжение равно углу наклона поверхности в точках $m - m$. Этот наклон поверхности равен $4\delta/c$ для параболической кривой; следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{4\delta}{c} = cC\theta. \quad (d)$$

Соответствующий крутящий момент равен удвоенному объему, ограниченному мембраной и плоскостью контура. Пренебрегая влиянием коротких сторон прямоугольника на деформацию мембраны и вычисляя объем, принимая его за объем параболического цилиндра длиной b , находим

$$M_k = 2 \frac{2}{3} \delta bc = \frac{1}{3} bc^3 C\theta, \quad (e)$$

откуда

$$\theta = \frac{M_k}{\frac{1}{3} bc^3 G}. \quad (221)$$

Подставляя в выражение (d), получаем

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\frac{1}{3} bc^3}. \quad (222)$$

Эти формулы совпадают с формулами (158), (159), приведенными в т. I (стр. 245), если прямоугольник предполагается очень узким.

Если вместо узкого прямоугольника мы имеем узкую трапецию, как показано на рис. 141, то приближенное решение получается при допущении, что поверхность изогнутой мембраны на достаточном удалении от коротких сторон является конической. Удвоенный объем, соответствующий элементу mm поперечного сечения, получается как в приведенном выше уравнении (с) и равняется

$$\frac{1}{3} C\theta c^3 dx, \quad (f)$$

где c — переменная ширина поперечного сечения, определяемая уравнением

$$c = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{b} x. \quad (g)$$

Подставляя это в уравнение (f) и интегрируя результат, получаем крутящий момент в следующем виде:

$$M_k = \int_0^b \frac{1}{3} C\theta c^3 dx = \frac{bG\theta}{12} (c_1 + c_2) (c_1^2 + c_2^2).$$

Тогда угол закручивания будет

$$\theta = \frac{M_k}{\frac{1}{12} b (c_1 + c_2) (c_1^2 + c_2^2) G}. \quad (223)$$

Если $c_1 = c_2 = c$, эта формула совпадает с (221), полученной для узкого прямоугольника.

В более сложных случаях, в которых форма изогнутой поверхности мембраны не может быть легко определена аналитически, эту поверхность можно исследовать экспериментально при помощи мыльной пленки для равномерно растянутой мембраны и путем измерения наклона ее поверхности оптическим методом. Для этой цели применяется аппарат, показанный на рис. 142¹⁾. Алюминиевая пластинка с двумя отверстиями — одним круглым и другим требуемой формы —

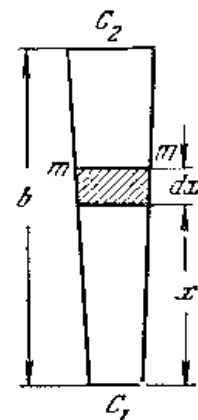


Рис. 141.

¹⁾ См. A. A. Griffith and G. I. Taylor, цит. на стр. 198.

закрепляется между двумя половинами чугунного ящика *A*. Нижняя часть ящика, имеющая форму неглубокого лотка, поддерживается установочными винтами. Вследствие накачивания воздуха в эту часть ящика мыльные пленки, покрывающие отверстия, выгибаются вверх.

Горизонтали на поверхности мыльной пленки вычерчиваются при помощи винта *B*, который проходит через отверстие в листе плоского

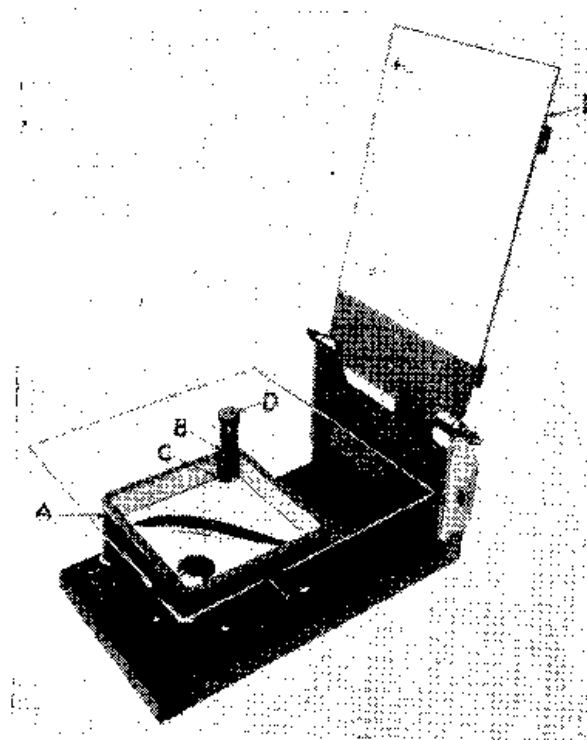


Рис. 142.

стекла. Стекло достаточно велико для того, чтобы покрыть ящик, когда винт *B* находится в любом возможном положении. Нижний конец винта несет закаленное стальное острие *C*, расстояние которого от стеклянной пластики фиксируется винтом. Острие приближают к пленке путем передвижения стеклянной пластики до тех пор, пока искажение вида пленки не покажет, что контакт достигнут. Запись делается на листе бумаги, прикрепленном к доске *E*, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси, расположенной на том же уровне, что и стальное записывающее острие *D*. Чтобы отметить какое-либо положение винта, необходимо только наколоть точку на бумаге, поворачивая доску вниз на записывающее острие. После того как острие *B* заставило коснуться пленки в ряде мест, точки, записанные на бу-

маге, используются для вычерчивания горизонталей. Меняя установку винта *B*, можно повторить эту операцию для любого числа горизонталей. Когда эти линии начерчены, объем и соответствующий крутящий момент можно получить суммированием.

Углы наклона в мембране и соответствующие напряжения в стержне получаются в результате измерения расстояний между соседними горизонталями. Лучшую точность измерения наклонов можно получить, направляя луч света на поверхность пленки и измеряя угол отклонения отраженного луча. Чтобы установить соотношения между измеренным наклоном и напряжением, пленки, покрывающие два отверстия в алюминиевом листе, сравниваются при одном и том же давлении воздуха. Так как обе пленки имеют одно и то же отношение p/S , то соответствующие два вала имеют один и те же значения $G\theta$ (см. уравнение (а)). Следовательно, измеряя углы наклона двух мыльных пленок, мы можем сравнить напряжения вала данного поперечного сечения с напряжениями круглого вала известного диаметра при условии, что они имеют один и тот же угол закручивания θ на единицу длины и один и тот же модуль сдвига. Соответствующее отношение n крутящих моментов определяется отношением объемов, заключенных между мыльными пленками и плоскостью пластинки. Это отношение дает отношение жесткостей при кручении двух сопоставляемых валов. Что касается напряжений круглого вала, то эти напряжения можно легко вычислить в любой точке для любого заданного крутящего момента M_k . Напряжение τ , вызванное в какой-либо точке некруглого вала крутящим моментом nM_k , получается путем умножения напряжения τ_0 в выбранной точке круглого вала на экспериментально определяемое отношение наибольших наклонов в рассматриваемых точках двух валов.

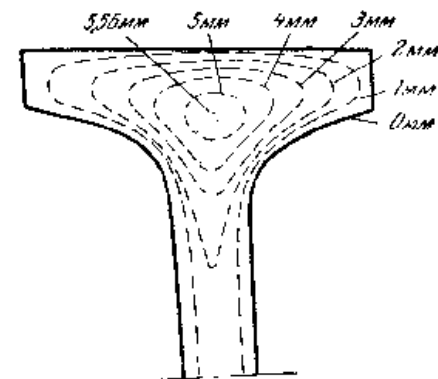


Рис. 143.

На рис. 143 изображены горизонтали, полученные для части сечения двутавра, который был использован как лонжерон крыла самолета. Вследствие близкой группировки горизонталей в выкружках входящих углов и в середине верхней грани надо считать, что касательные напряжения наибольшего значения достигают именно в этих местах. Выступающие части полки очень мало напряжены. Наибольшее напряжение в среднем участке стенки практически постоянно вдоль граней стенки и равно напряжению в узком прямоугольнике для того же угла закручивания.

47. Кручение прокатных профилей

Формулы (221) и (222), выведенные для узкого прямоугольного поперечного сечения, можно применить также для приближенных решений в других случаях, в которых ширина поперечного сечения мала. Например, в случае одинаковой толщины поперечных сечений, показанных на рис. 144, а и 144, б,

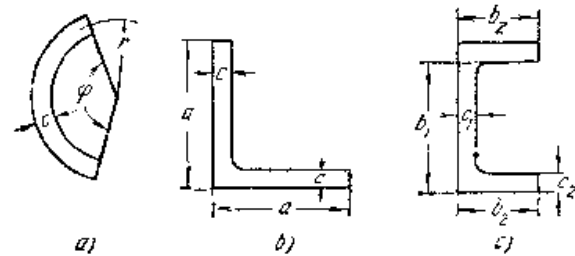


Рис. 144.

угол закручивания получается из формулы (221) путем подстановки развернутой длины осевой линии вместо b . Эта длина равняется $b = \varphi r$ в случае сечения, представленного на рис. 144, а, и $b = 2a - c$ в случае сечения, представленного на рис. 144, б. Наибольшее на-

пряжение для первого из этих двух сечений получается из формулы (222). Для углового сечения (рис. 144, б) наибольшее напряжение имеет место у входящего угла. Это наибольшее напряжение получается путем умножения напряжения, даваемого формулой (222), на коэффициент концентрации напряжений, больший единицы. Величина этого коэффициента будет рассмотрена ниже (см. п. 58, стр. 258).

Приведенные здесь заключения следуют из мембранной аналогии, рассмотренной в предыдущем параграфе. Из этого рассуждения читатель может видеть, что если толщина c поперечного сечения, показанного на рис. 144, а, мала по сравнению с радиусом r , то с достаточной точностью все еще можно использовать параболическую кривую, показанную на рис. 140, б и определяющую провисание пленки¹⁾. В таком случае наибольший наклон пленки и соответствующее наибольшее напряжение для поперечного сечения на рис. 144, а будут приблизительно такими же, как для узкого прямоугольника.

В случае швеллера (рис. 144, с) угол закручивания получается путем расчленения поперечного сечения на три прямоугольника, как показано на рисунке, с подстановкой в формулу (221) величины $b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3$ вместо bc^3 . Таким образом, мы получаем

$$\theta = \frac{3M_b}{(b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3) G} \quad (224)$$

Чтобы вычислить напряжение, которое имеет место в середине сторон b_2 полки, необходимо лишь, как видно из формул (221), (222)

¹⁾ Поверхность провисания здесь уже не цилиндрическая, но если c мала по сравнению с r , то кривизна пленки в тангенциальном направлении мала по сравнению с кривизной в радиальном направлении и ею можно пренебречь.

умножить θ на $c_2 G$; тогда

$$\tau = \frac{3M_b c_2}{b_1 c_1^3 + 2b_2 c_2^3} \quad (225)$$

Эти же приближенные формулы можно использовать также при кручении двутавровых балок¹⁾ с полками постоянной толщины (рис. 145, а).

В случае двутавровой балки с наклонными полками (рис. 145, б) мы обозначим через c_2 толщину полки на краях и через c_3 толщину полки у стенки, так что

$$c_3 = c_2 + \frac{1}{2} b_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Пользуясь выражением (223) для полки, мы заключаем, что угол закручивания θ получается из формулы (224) путем подстановки в него величины $\frac{1}{4} (c_2 + c_3) (c_2^3 + c_3^3)$ вместо c_2^3 .

Наибольшее напряжение обычно имеет место в выточках и носит местный характер. Его величина будет рассмотрена в п. 58. Значительное напряжение может также иметь место в точках m (рис. 145, б) в середине наружных граней полки. Это последнее напряжение получается по-прежнему путем умножения угла закручивания θ на $c_3 G$, где c_3 представляет наибольшую толщину полки.

Необходимо заметить, что при выводе формулы (224) была использована формула для бесконечно узкого прямоугольника и что влиянием коротких сторон прямоугольника на рис. 140 на величину объема, ограниченного мыльной пленкой, совершенно пренебрегалось. Благодаря наличию этих сторон объем, очевидно, будет несколько уменьшен. В то же самое время в углах швеллера (рис. 144, с), где сходятся вместе два прямоугольника, можно ожидать большей деформации мыльной пленки, чем в случае одного прямоугольника. Такое дополнительное смещение вызывает увеличение объема. Эти два фактора, которыми пренебрегалось при выводе формулы (224), противоположно действуя, в некоторой степени нейтрализуют друг друга, так что формула (224) достаточно точна для тонкостенных сечений²⁾.

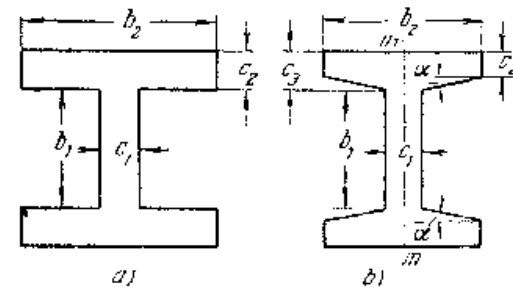


Рис. 145.

¹⁾ Наибольшее напряжение имеет место во входящих углах, оно будет рассмотрено ниже (см. п. 58, стр. 258).

²⁾ Опыты с тонкостенными двутавровыми балками при кручении были проделаны автором, Известия Петербургского политехнического института, т. 5, 1906. Эти испытания показали удовлетворительное согласование с формулой (224). Весьма обширный ряд испытаний на кручение прокатных балок

Для случаев кручения двутавровых балок и швеллеров, в которых толщина полки не мала и изменяется по ширине полки, была выведена ¹⁾ более сложная формула для жесткости кручения, которая весьма удовлетворительно согласуется с опытами.

ЗАДАЧИ

1. Найти отношение углов закручивания цельной и разрезанной круглой тонких труб одинаковых геометрических размеров (рис. 146) и находящихся под действием равных крутящих моментов.

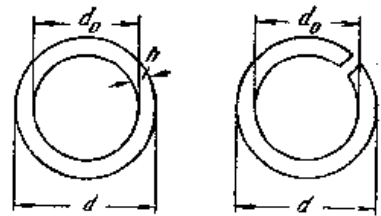


Рис. 146.

Решение. Пользуясь формулами (151) т. 1, стр. 241 и (221), получаем для цельной и разрезанной труб соответственно

$$\theta = \frac{32M_k}{\pi d^3 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4}\right) G},$$

$$\theta_1 = \frac{3M_k}{\pi \left(\frac{d+d_0}{2}\right) \left(\frac{d-d_0}{2}\right)^3 G}.$$

Отношение углов закручивания будет равняться

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{2(d-d_0)^2}{3(3d^2 + d_0^2)}.$$

Для очень тонких труб $(d^2 + d_0^2) \approx 2d^2$ и отношение получается в виде

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{d}\right)^2.$$

2. Определить угол закручивания на сантиметр длины швеллера (рис. 144, в), если $M_k = 20\,000$ кг·см, $b_1 = 25$ см, $b_2 = 9$ см, $c_2 = 1$ см, $c_2 = 1,5$ см, $G = 8 \cdot 10^8$ кг/см².

Решение. $\theta = \frac{3 \cdot 20\,000}{(25 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1,5^3) \cdot 8 \cdot 10^8} = 0,00088$ рад на см.

3. Определить отношение наибольших касательных напряжений для труб, рассмотренных в задаче 1, если крутящие моменты одинаковы для обеих труб.

4. Определить жесткость кручения S для двутавровой балки, рассмотренной на стр. 205, если полки наклонены так, как пояснено на той же странице.

48. Кручение тонкостенных трубчатых стержней

При рассмотрении кручения тонкостенных трубчатых стержней опять удобно применить мембранную аналогию ²⁾. В этом случае наружный и внутренний края поперечного сечения располагаются

был сделан А. Фёрререм, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch., стр. 295, 1921 и Vaingenieur, т. 3, стр. 42, 1922. Некоторые поправочные коэффициенты для формулы (224) были получены на основании этих опытов.

¹⁾ Формула была выведена на основании опытов, сделанных Inge L y s e and V. G. Johnston, Lehigh University Publ., т. 9, 1935.

²⁾ Кручение трубчатых стержней было рассмотрено R. В r e d f o m, Z. Ver. deut. Ing., т. 40, стр. 815, 1896. См. также T. P r e s c o t t, Phil. Mag., т. 60, 1920.

в мембране на различных горизонтальных плоскостях, соединяющих края, как показано линиями mn на рис. 147. Если толщина трубы мала, то кривизной мембраны можно пренебречь, т. е. линии mn можно считать прямыми. Угол наклона мембранной поверхности в таком случае будет постоянным по толщине стенки и равным f/h , где f — разность уровней двух краев и h — толщина трубы, которая может изменяться вдоль контура поперечного сечения. Мембранная аналогия указывает на то, что в этом случае касательные напряжения равномерно распределяются по толщине стенки и определяются наклоном поверхности, равным

$$\tau = \frac{f}{h}. \quad (a)$$

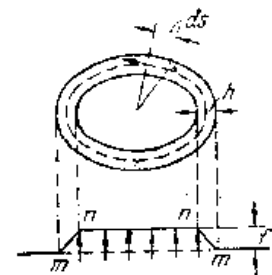


Рис. 147.

Следовательно, напряжение по контуру обратно пропорционально толщине стенки. Объем, заключенный между поверхностями mn и mn , вычисляется при помощи осевой линии кольцевого поперечного сечения, показанной штриховой кривой на рисунке. Если F — площадь, ограниченная этой линией, объем $mmnn$ равен Ff , то из мембранной аналогии мы получаем

$$M_k = 2Ff. \quad (b)$$

Тогда из выражений (a) и (b) мы находим

$$\tau = \frac{M_k}{2Fh}. \quad (226)$$

Эту формулу можно применить при вычислении напряжений в трубчатых стержнях при кручении, если толщина стенки мала, изменение толщины не является резким и нет входящих углов.

Угол закручивания θ на единицу длины трубчатого стержня можно вычислить из рассмотрения энергии деформации кручения. Энергия деформации, приходящаяся на единицу длины трубчатого стержня, равняется

$$U = \int_0^s \frac{\tau^2 h ds}{2G},$$

где s — длина осевой линии кольцевого поперечного сечения, показанная на рис. 147 штриховой линией.

Подставляя в это уравнение значение τ из формулы (226) и приравнявая энергию деформации работе, совершенной крутящим моментом, получаем

$$\frac{M_k^2}{8F^2G} \int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2} M_k \theta, \quad (c)$$

откуда

$$\theta = \frac{M_K}{4F^2G} \int_0^s \frac{ds}{h} = \frac{1}{2FG} \int_0^s \tau ds. \quad (227)$$

В случае трубы одинаковой толщины τ — постоянно и выражение (227) приводится к виду

$$\theta = \frac{\tau s}{2FG}. \quad (228)$$

По этой формуле можно легко вычислить угол закручивания, когда даны размеры поперечного сечения, касательное же напряжение τ можно определить, используя формулу (226).

Выражение (227), выведенное из рассмотрения энергии деформации скручиваемого трубчатого стержня, можно также получить из мембранной аналогии. Рассматривая равновесие плоскости $n-n$ на рис. 147, мы заключаем, что давление pF^1 , действующее на эту плоскость, уравновешивается растягивающими усилиями S , действующими в мембране. Растягивающее усилие $S ds$, действующее на элемент ds контура, имеет малый наклон поверхности, равный τ ; следовательно, вертикальная составляющая этого усилия равна $\tau S ds$, и условие равновесия плоскости $n-n$ будет

$$pF = \int_0^s \tau S ds. \quad (d)$$

Замечая, что растягивающее усилие S в мембране постоянно и что $p/S = 2G\theta$ (см. уравнение (a), стр. 198), мы находим из уравнения (d)

$$\frac{p}{S} = \frac{1}{F} \int_0^s \tau ds = 2G\theta.$$

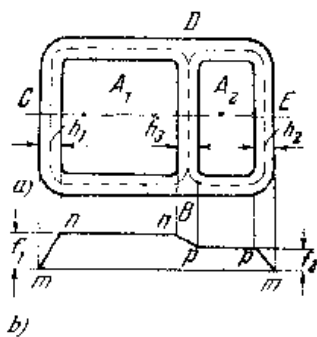


Рис. 148.

Решая это уравнение относительно θ , мы получаем формулу (227) для угла закручивания.

Иногда требуется вычислить напряжения кручения в трубчатом стержне, имеющем промежуточные стенки, как на рис. 148, а. Границы поперечного сечения в этом случае формируются из трех замкнутых кривых. Применяя мембранную аналогию, заметим, что эти кривые будут размещены в трех различных горизонтальных плоскостях mn , pp и mt , как показано на рис. 148, б. Мысленная пленка, соединяющая эти три кривые, образует ограниченную поверхность, поперечные сечения которой показаны линиями mn , pp и mt . Предполагая опять, что толщины стенки h_0 , h_1 и h_2 малы, и пренебрегая

¹⁾ В случае тонкостенных стержней площадь F , ограниченную осевой линией (показанной пунктиром), можно рассматривать вместо площади плоскости $n-n$.

кривизной мембраны в направлениях, нормальных к краям сечения, заключаем, что линии mn , pp и mt являются прямыми. В таком случае наклоны мембраны, дающие напряжения в стенках трубчатого стержня, будут

$$\tau_1 = \frac{f_1}{h_1}, \quad \tau_2 = \frac{f_2}{h_2}, \quad (e)$$

$$\tau_3 = \frac{f_1 - f_2}{h_3} = \frac{h_1\tau_1 - h_2\tau_2}{h_3}. \quad (f)$$

Величина крутящего момента, вызывающего эти напряжения, получается путем удваивания объема фигуры $mtppm$ на рис. 148, б. Если мы обозначим площади, ограниченные пунктирными линиями на рис. 148, а, через F_1 и F_2 , то этот крутящий момент будет равняться

$$M_K = 2(F_1f_1 + F_2f_2), \quad (g)$$

или, пользуясь формулами (e), получаем

$$M_K = 2F_1h_1\tau_1 + 2F_2h_2\tau_2. \quad (h)$$

Другие уравнения для решения задачи получаются применением уравнения (227) к двум замкнутым кривым, указанным штриховыми линиями на рис. 148, а. Предполагая, что участок BCD стенки имеет постоянную толщину h_1 и что участки DEB и DB имеют постоянную толщину, соответственно равную h_2 и h_3 , из уравнения (227) имеем

$$\tau_1s_1 + \tau_3s_3 = 2G\theta F_1, \quad (i)$$

$$\tau_2s_2 - \tau_3s_3 = 2G\theta F_2. \quad (j)$$

В этих выражениях s_1 , s_2 и s_3 являются длинами осевой линии, измеренными по пунктирным линиям соответственно BCD , DEB и DB . Применяя интеграл (227) к замкнутым кривым $BCDB$ и $DEBD$, мы проходим участок DB длины s_3 в двух противоположных направлениях; следовательно, вторые члены левых частей уравнений (i) и (j) появляются с противоположными знаками. Угол закручивания θ правых частей выражений (i) и (j), очевидно, тот же, что и угол закручивания всего трубчатого стержня. Четыре уравнения (f), (h), (i) и (j) содержат четыре неизвестных τ_1 , τ_2 , τ_3 и θ , которые можно легко вычислить. Исключая θ , мы получаем для касательных напряжений следующие формулы:

$$\tau_1 = M_K \frac{h_2s_2F_1 + h_3s_3(F_1 + F_2)}{2[h_1h_2s_2F_1^2 + h_2h_3s_1F_2^2 + h_1h_2s_3(F_1 + F_2)^2]}, \quad (k)$$

$$\tau_2 = M_K \frac{h_3s_1F_2 + h_1s_3(F_1 + F_2)}{2[h_1h_2s_2F_1^2 + h_2h_3s_1F_2^2 + h_1h_2s_3(F_1 + F_2)^2]}, \quad (l)$$

$$\tau_3 = M_K \frac{h_1s_2F_1 - h_2s_1F_2}{2[h_1h_2s_2F_1^2 + h_2h_3s_1F_2^2 + h_1h_2s_3(F_1 + F_2)^2]}. \quad (m)$$

Если стенка DB поперечного сечения на рис. 148, а есть плоскость симметрии поперечного сечения, то мы имеем $s_1 = s_2$, $h_1 = h_2$ и $F_1 = F_2$, и уравнение (m) дает $\tau_3 = 0$. Таким образом, в этом случае крутящий момент воспринимается полностью наружной стенкой трубы, а промежуточная стенка является ненапряженной ¹⁾.

Чтобы получить угол закручивания θ для трубчатого стержня, мы должны подставить вычисленное значение напряжений в уравнение (i) или (j). Таким

¹⁾ В этом выводе малыми напряжениями, соответствующими изменению наклона мембраны по толщине стенки, пренебрегается.

образом, задача о кручении трубчатого стержня, подобного показанному на рис. 148, может быть легко решена с достаточной точностью при условии, что толщина стенки мала по сравнению с общими размерами поперечного сечения.

В предыдущем примере был рассмотрен трубчатый стержень, состоящий только из двух ячеек. В практических приложениях мы часто встречаем стержни с большим числом ячеек, в которых случай алгебраического решения, описанный выше, становится громоздким. Быстрый ответ можно получить путем численного решения задачи в каждом частном случае при помощи метода последовательных приближений¹⁾. Чтобы пояснить численный метод, мы рассмотрим случай трубчатого стержня с тремя ячейками (рис. 149). Следуя предыдущим обозначениям, мы обозначим через f_1, f_2 и f_3 соответствующие трем ячейкам уровни мембраны, s_1, \dots, s_4 — длины осевых линий стенок сегментов и h_1, \dots, h_4 — соответствующие толщины стенок. Тогда, поступая по-прежнему, мы получаем вместо уравнений (i) и (j) следующие:

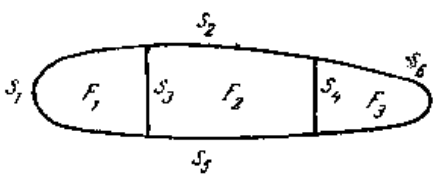


Рис. 149.

$$\left. \begin{aligned} f_1 \frac{s_1}{h_1} + (f_1 - f_2) \frac{s_2}{h_2} &= 2G\theta F_1, \\ -(f_1 - f_2) \frac{s_2}{h_2} + f_2 \left(\frac{s_2}{h_2} + \frac{s_3}{h_3} \right) + (f_2 - f_3) \frac{s_3}{h_3} &= 2G\theta F_2, \\ -(f_2 - f_3) \frac{s_3}{h_3} + f_3 \frac{s_4}{h_4} &= 2G\theta F_3. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Здесь величины $f_1 = \tau_1 h_1, f_2 = \tau_2 h_2, f_1 - f_2 = \tau_3 h_2, \dots$, называемые касательными потоками, вводятся вместо касательных напряжений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$. Вводя обозначение $s_i/h_i = r_i$, мы можем переписать эти уравнения в следующем простом виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_1 r_i \right) f_1 - r_2 f_2 &= 2G\theta F_1, \\ -r_3 f_1 + \left(\sum_2 r_i \right) f_2 - r_4 f_3 &= 2G\theta F_2, \\ -r_4 f_2 + \left(\sum_3 r_i \right) f_3 &= 2G\theta F_3, \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

где $\sum_1 r_i, \sum_2 r_i, \sum_3 r_i$ — суммы значений r_i соответственно для первой, второй и третьей ячеек. Разделив эти уравнения на коэффициенты диагональных членов и введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{2G\theta F_1}{\sum_1 r_i} = f'_1, \quad \frac{2G\theta F_2}{\sum_2 r_i} = f'_2, \quad \frac{2G\theta F_3}{\sum_3 r_i} = f'_3, \\ \frac{r_2}{\sum_1 r_i} = d_{12}, \quad \frac{r_3}{\sum_2 r_i} = d_{21}, \quad \frac{r_4}{\sum_2 r_i} = d_{23}, \quad \frac{r_4}{\sum_3 r_i} = d_{32}, \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

¹⁾ См. статью F. M. Вагоня, J. Appl. Mech., т. 9, стр. А-72, 1942.

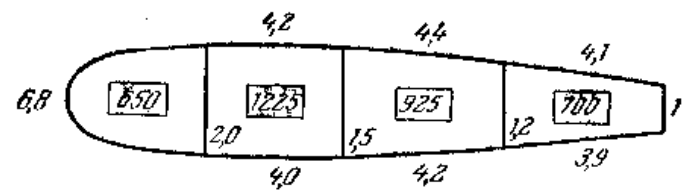
окончательно напомним уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_1 - d_{12} f_2 &= f'_1, \\ -d_{21} f_1 + f_2 - d_{23} f_3 &= f'_2, \\ -d_{32} f_2 + f_3 &= f'_3. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

К этим уравнениям мы прибавляем уравнение для вычисления крутящего момента, подобное уравнению (g):

$$M_K = 2(F_1 f_1 + F_2 f_2 + F_3 f_3). \quad (r)$$

К численному решению уравнений (q) мы приступаем, назначив численное значение для угла закручивания на единицу длины θ . Величины f'_1, f'_2 и f'_3 тогда определяются, и уравнения (q) можно решить. Для того чтобы найти соответствующее значение M_K , в уравнение (r) подставляем результирующие значения f_1, f_2 и f_3 . Для какого-либо другого желательного значения крутящего момента M_K мы должны лишь изменить значение θ, f_1, f_2 и f_3 в прямой пропорции.



$\Sigma r_i = 6,8$					
$d = 0,228$	$0,171$				
$d = 0,171$	$0,228$	$0,128$			
$f' = 3,78$	$5,36$	$5,36$	$4,19$	$4,19$	$3,52$
$1,22$	$0,64$	$0,54$	$0,72$	$0,77$	$0,5$
$0,27$	$0,21$	$0,14$	$0,16$	$0,05$	$0,13$
$0,08$	$0,05$	$0,03$	$0,05$	$0,015$	$0,0072$
$0,016$	$0,018$	$0,016$	$0,016$	0	0
$f = 5,36$	$7,07$		$5,57$		$4,18$

Рис. 150.

Применяя метод последовательных приближений к решению уравнений (q), мы замечаем, что все коэффициенты d_{ij} меньше единицы. Поэтому как первое приближение мы сохраним лишь диагональные члены в уравнениях (q) и примем f'_1, f'_2 и f'_3 за первое приближение для f_1, f_2 и f_3 . Подставляя эти первые приближения в недиагональные члены уравнений (q), мы получаем первые поправки:

$$\Delta' f_1 = d_{12} f'_2, \quad \Delta' f_2 = d_{21} f'_1 + d_{23} f'_3, \quad \Delta' f_3 = d_{32} f'_2. \quad (s)$$

Подставляя значения (s) в недиагональные члены уравнений (q), получаем вторые поправки:

$$\Delta'' f_1 = d_{12} \Delta' f_2, \quad \Delta'' f_2 = d_{21} \Delta' f_1 + d_{23} \Delta' f_3, \quad \Delta'' f_3 = d_{32} \Delta' f_2.$$

Поступая точно таким же образом, находим третьи поправки и т. д. Вычисления нужно повторять до тех пор, пока дальнейшие поправки станут весьма

малыми. Тогда, прибавляя все поправки к первым приближениям f_1 , f_2 и f_3 , получаем приближенные значения f_1 , f_2 и f_3 . Уравнение (г) даст соответствующее значение M_k , а значения касательных напряжений определятся из уравнений, подобных уравнениям (е) и (ф).

Чтобы пояснить вычисления, на рис. 150 приведен численный пример¹⁾ для четырехячеечного сечения крыла. Площадь каждой ячейки дана числом, ограниченным прямоугольником, а значения r представлены около каждой стержни сегмента. В таблице, приведенной под рисунком, значения $\sum r_i$ для каждой ячейки даны в первой строке. Во второй строке даны коэффициенты d_{ij} для стенок промежуточных ячеек. Прежде чем начать вычисления, нужно эти коэффициенты переставить, как показано, стрелками в третью строку. В следующей строке написаны первые приближения f' для касательных потоков, вычисленные при допущении, что $G\theta = 1$. Первые поправки вычисляются путем умножения каждого из значений f' на коэффициенты d , расположенные над ними с перестановкой результирующих значений в смежные ячейки, как показано стрелками. Полная поправка для внутренней ячейки состоит из двух чисел, написанных по обе стороны вертикальной линии. Эти числа мысленно складываются и умножаются на соответствующий множитель при вычислении вторых поправок. Вычисления повторяются до тех пор, пока поправки станут незначительными. Окончательные значения касательных потоков, полученные путем добавления (сложения) всех поправок к первым приближениям f' , даны в последней строке на рис. 150. Подставляя эти значения в уравнение (г), получим крутящий момент, соответствующий $G\theta = 1$.

49. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля, в которых предотвращено искажение некоторых поперечных сечений

В предыдущем обсуждении задачи о кручении двутавровых балок и швеллеров (стр. 204) предполагалось, что крутящие моменты приложены к концам стержня и что все поперечные сечения могут совершенно свободно искажаться (коробиться). Однако имеются случаи, в которых одно или несколько поперечных сечений стержня вынуждены оставаться плоскими, и возникает вопрос, как это препятствие искажению влияет на угол закручивания и на распределение напряжений. Для стержней сплошного поперечного сечения, как, например, эллипсы или прямоугольники, сопротивление искажению оказывает лишь незначительное влияние на угол закручивания²⁾ при условии, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. В случае двутавровых балок, швеллеров и других тонкостенных стержней открытого профиля препятствие искажению при кручении сопровождается изгибом полок и может оказать значительное влияние на угол закручивания.

Простой случай, в котором имеет место препятствие искажению, представляет собой двутавровая балка, скручиваемая парой сил по-

¹⁾ Этот пример взят из статьи Stanley U. Benscoter's, J. Aero-naut. Sci., т. 13, стр. 438, 1946.

²⁾ Обсуждение этого вопроса см. в Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 302, 1951; русский перевод, стр. 303, 1937.

средине и свободно лежащая¹⁾ на двух опорах (рис. 151). Вследствие симметрии поперечное сечение mn при кручении должно оставаться плоским, а поворот этого поперечного сечения относительно концевых поперечных сечений будет сопровождаться изгибом полок. Концевой крутящий момент уравнивается в любом поперечном сечении частично касательными напряжениями, возникающими от кручения, и частично касательными напряжениями, возникающими от изгиба полок²⁾. Рис. 152, а представляет половину балки, показанной на рис. 151. Среднее поперечное сечение mn остается плоским благодаря симметрии, и мы можем рассматривать его как заделанное с крутящим моментом, приложенным на другом конце. Пусть φ будет угол закручивания в каком-либо поперечном сечении балки. Тогда часть крутящего момента, M_k' , который уравнивается касательными напряжениями, вызванными кручением, определится из уравнения

$$M_k' = C \frac{d\varphi}{dx}, \quad (a)$$

в котором C — жесткость кручения стержня (см. т. I, стр. 246).

Чтобы определить часть крутящего момента M_k' , который уравнивается касательными напряжениями в полках, возникающих от изгиба, мы должны рассмотреть изгиб полки (рис. 152, в). Обозначая через h расстояние между центрами тяжести полок (рис. 152, б), найдем прогиб в каком-либо поперечном сечении верхней полки:

$$z = \frac{h\varphi}{2}, \quad (b)$$

и путем дифференцирования получим

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (c)$$

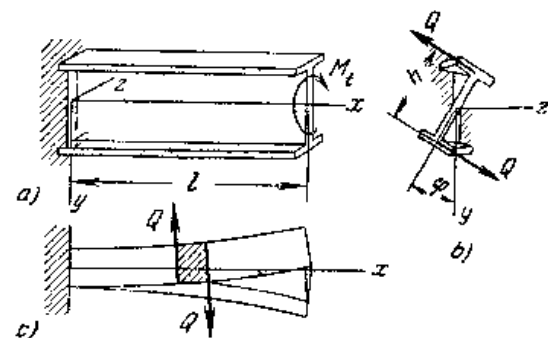


Рис. 152.

¹⁾ Простые опоры таковы, что концы балки не могут поворачиваться вокруг продольной оси, но могут свободно искривляться (коробиться).

²⁾ См. статью автора «Известия Петербургского политехнического института», 1905—1906, Z. Math. u. Phys., т. 58, стр. 361, 1910. См. также K. Huber, Диссертация, Мюнхен, 1922 и C. Weber, Z. angew. Math. u. Mech., т. 6, стр. 85, 1926. Дальнейшее рассмотрение вопроса о различных формах тонкостенных стержней дано A. Ostenfeld'ом, Lab. Baustatik Techn. Hochschule, Copenhagen, Mitt. № 6, 1931.

Обозначив через D жесткость при изгибе одной полки в плоскости xz и заметив, что z положительно в направлении, показанном на рис. 152, c , получим выражение для поперечной силы в полке от изгиба¹⁾

$$Q = \frac{dM}{dx} = D \frac{d^3z}{dx^3} = \frac{Dh}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \quad (d)$$

где M — изгибающий момент полки. Принимая за положительное направление Q такое, как показано на рис. 152, c , имеем

$$M_k^* = -Qh = -\frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \quad (e)$$

и полный крутящий момент равен

$$M_k = M_k' + M_k^* = C \frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3}. \quad (229)$$

В рассматриваемой задаче (рис. 152, c) крутящий момент M_k является постоянным по длине l балки. Концевые условия таковы²⁾:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)_{x=l} = 0,$$

и поэтому решение уравнения (229) будет

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{C} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a}}\right), \quad (f)$$

где

$$a^3 = \frac{Dh^2}{2C}. \quad (g)$$

Так как жесткость при изгибе D и жесткость при кручении C измеряются в одних и тех же единицах (кг см^2), то из выражения (g) следует, что a имеет линейную размерность и зависит от размеров балки.

Благодаря наличию второго члена в уравнении (f) угол закручивания на единицу длины изменяется по длине стержня, хотя крутящий момент остается постоянным. Кручение стержня, которое зависит от изгиба полок и определяется уравнением, подобным уравнению (229), называется *неравномерным кручением*.

Когда $d\varphi/dx$ определено, то части M_k' и M_k^* полного крутящего момента M_k можно вычислить для любого поперечного сечения из

¹⁾ Влиянием поперечной силы на кривизну изогнутой оси полки в этом выводе пренебрегается.

²⁾ Условия определяются из рассмотрения каждой полки как балки с одним заделанным и другим свободным концами.

уравнений (a) и (e). Для заделанного сечения, где $x=0$ и $d\varphi/dx=0$, мы получаем из уравнения (a), что $M_k'=0$. Следовательно, в этой точке полный момент уравновешивается моментом от поперечных сил, действующих в полках, и мы имеем $Q = -M_k/h$. На концах $x=l$, пользуясь уравнением (f), получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{C} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{a}}\right). \quad (h)$$

Если длина балки велика по сравнению с ее поперечными размерами, l велико по сравнению с a , и второй член в скобках выражения (h) становится ничтожным, то $d\varphi/dx$ приближается к значению M_k/C .

Изгибающий момент в полках находится из уравнения (d):

$$M = \frac{Dh}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3}; \quad (i)$$

подставляя же выражение (f) вместо $d\varphi/dx$ и пользуясь обозначением (g), получаем

$$M = \frac{a}{h} M_k \frac{\operatorname{sh} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}}. \quad (j)$$

Изгибающий момент в заделанном конце будет равен

$$M_{\max} = \frac{a}{h} M_k \operatorname{th} \frac{l}{a}. \quad (k)$$

Когда l в несколько раз больше a , то $\operatorname{th} h(l/a)$ приближается к единице и мы можем применить формулу

$$M_{\max} = \frac{aM_k}{h}, \quad (l)$$

т. е. наибольший изгибающий момент полки такой же, как и для консоли длиной a , нагруженной на конце силой M_k/h . Для очень короткой балки l мало по сравнению с a , $\operatorname{th} h(l/a)$ приближается к l/a , и мы имеем из выражения (k)

$$M_{\max} = \frac{M_k l}{h}. \quad (m)$$

Возьмем в качестве примера двутавровую балку с площадью поперечного сечения $61,2 \text{ см}^2$. Поперечное сечение заменяется эквивалентным поперечным сечением (рис. 153), состоящим из трех прямоугольников, имеющих те же площади поперечных сечений полок и стенки, что и действительное сечение¹⁾. Пользуясь уравнением (224), мы находим

$$C = (27,12 \cdot 0,9^3 + 2 \cdot 12,6 \cdot 1,44^3) \frac{G}{3} = 31,7 G.$$

¹⁾ Несколько лучшее приближение для C можно получить, если принять в расчет наклон полок, как пояснено на стр. 205.

Жесткость при изгибе полки D получится, если взять половину момента инерции стандартного поперечного сечения относительно вертикальной главной оси¹⁾ и умножить на E . Тогда $D = \frac{J_y}{2} E = 200 E$, и мы получаем из уравнения (g)

$$a = h \sqrt{\frac{D}{2C}} = 2,8 h. \quad (o)$$

Следовательно, если балка нагружена, как показано на рис. 151, то наибольший изгибающий момент в полке на основании формулы (l) приблизительно в три раза больше крутящего момента M_K при условии, что балка достаточно длинна, так что $\operatorname{tg} h (l/a)$ близок к единице. Например, если $l/a = 2$, так что $l \approx 5,6 h$, мы имеем $\operatorname{tg} h (l/a) = 0,96$, и ошибка в предыдущем вычислении составит 4 процента.

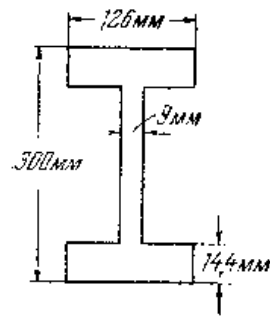


Рис. 153.

Для вычисления угла закручивания φ мы пользуемся уравнением (f). Интегрируя это уравнение и подбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\varphi = 0$ при $x = 0$, получаем

$$\varphi = \frac{M_K}{C} \left(x + \frac{a \operatorname{sh} \frac{l-x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}} - a \operatorname{tg} h \frac{l}{a} \right). \quad (p)$$

Подставляя в это уравнение $x = l$, получаем

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_K}{C} \left(l - a \operatorname{tg} h \frac{l}{a} \right). \quad (q)$$

Второй член в скобках представляет влияние изгиба полки на угол закручивания. Для длинных балок $\operatorname{tg} h (l/a) \approx 1$, и уравнение (q) получается в следующем виде:

$$(\varphi)_{x=l} = \frac{M_K}{C} (l - a). \quad (r)$$

Следовательно, влияние изгиба полки на угол закручивания эквивалентно уменьшению длины l на величину a .

Описанный выше метод для постоянного крутящего момента M_K можно также применить в том случае, когда крутящий момент изменяется по длине балки. Необходимо лишь в уравнение (229) подставить точное выражение M_K в функции x .

В предыдущем анализе кручения двутавровой балки (рис. 152) предполагалось на основании симметрии, что каждое поперечное сечение поворачивается относительно центральной оси балки. Поэтому нужно было рассматривать только изгиб полки. Видно также, что

¹⁾ Момент инерции площади поперечного сечения стенки предполагается ничтожным.

этот изгиб не препятствует простому кручению стенки, так как в местах соединения стенки с полками напряжения от изгиба в полках обращаются в нуль. В случае несимметричных поперечных сечений или поперечных сечений только с одной осью симметрии задача становится более сложной, так как не только изгиб полки, но также

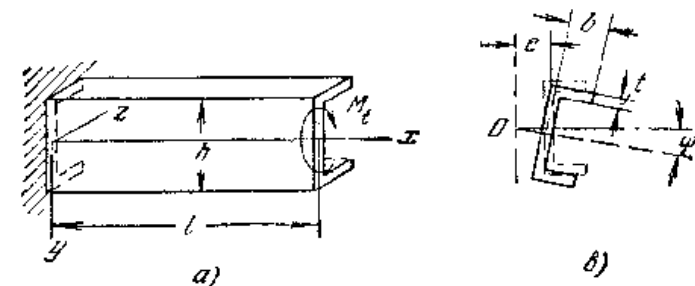


Рис. 154.

и изгиб стенки будет возникать при кручении. В качестве примера рассмотрим кручение швеллера (рис. 154). В этом случае при кручении каждое поперечное сечение поворачивается относительно центра сдвига O , который находится на горизонтальной оси симметрии поперечного сечения на расстоянии, равном (см. т. I, стр. 203)

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4J_z} \quad (s)$$

от срединной плоскости стенки. Из этого следует, что прогибы полки и стенки в их срединных плоскостях соответственно будут

$$z = \pm \frac{h}{2} \varphi \quad \text{и} \quad y = e \varphi, \quad (t)$$

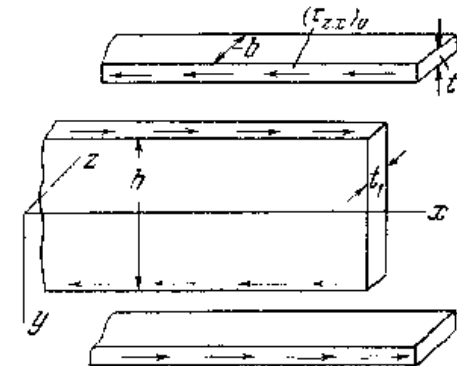


Рис. 155.

где φ есть угол закручивания, который предполагается малым. Также предполагается, что толщины полки и стенки малы, так что напряжениями, вызванными изгибом их в направлениях, перпендикулярных к их срединным плоскостям, можно пренебречь.

Взаимодействие между верхней полкой и стенкой представлено касательными напряжениями $(\tau_{zx})_0$, показанными на рис. 155. Эти напряжения вызывают изгиб и сжатие полки. Если S есть величина сжимающего усилия в полке на расстоянии x от заделанного конца, то мы имеем

$$t (\tau_{zx})_{x=0} = -\frac{dS}{dx} \quad \text{и} \quad S = t \int_x^b (\tau_{zx})_0 dx.$$

Величина усилия S теперь определится из того условия, что деформация ε_x в продольном направлении в месте сопряжения стенки и полки одинакова для обеих этих частей. Вычисляя кривизны изогнутых осей из выражений (t), находим, что условие представится уравнением¹⁾

$$\varepsilon_x = e \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{b}{2} - \frac{S}{btE}. \quad (u)$$

Теперь, пользуясь выражением (s) и замечая, что $J_z = \frac{t_1 h^3}{12} + \frac{bt_1 h^3}{2}$, получаем

$$S = \frac{Eb^3 h^4 t_1}{48 J_z} \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (v)$$

Имея это выражение для S , мы можем легко определить касательные напряжения в стенке и в полках, а также часть M_k^* крутящего момента, уравновешиваемого этими напряжениями.

Начнем с расчета касательных напряжений в стенке. Взяв два смежных поперечных сечения mn и $m_1 n_1$ (рис. 156, a) и рассмотрев обычным путем равновесие заштрихованного элемента, получим

$$\tau_{yx} t_1 dx - \frac{dS}{dx} dx + \frac{dM}{dx} \frac{S_z}{J_z} dz = 0.$$

В этом уравнении S_z — статический момент относительно оси z заштрихованного участка поперечного сечения стенки (рис. 156, b),

$J_z = \frac{t_1 h^3}{12}$ — момент инерции площади поперечного сечения стенки относительно оси z и M — изгибающий момент в стенке. Изгибающий момент M является положительным, если он вызывает растяжение в верхней грани стенки и равняется

$$M = EJ_z e \frac{d^2\varphi}{dx^2} = Sh.$$

Тогда выражение для напряжений получится в виде

$$\tau_{yx} = \frac{dS}{t_1 dx} \left(1 - \frac{S_z h}{J_z} \right).$$

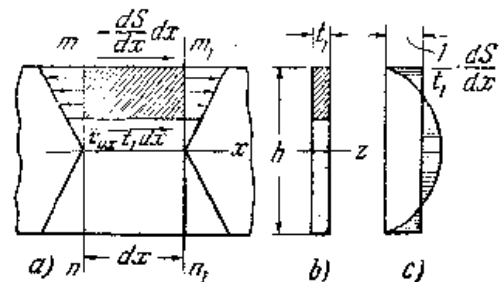


Рис. 156.

Замечая, что изменение S_z по высоте поперечного сечения следует параболическому закону, находим, что распределение касательных напряжений τ_{yx} дается заштрихованной площадью на рис. 156, c и что

¹⁾ В этом выводе влиянием поперечных сил на кривизну изогнутой оси полки пренебрегается.

равнодействующая касательных усилий в стенке обращается в нуль. Это последнее заключение можно было предвидеть, так как касательные усилия в стенке и в двух полках должны уравновесить часть M_k^* крутящего момента, а это возможно лишь в том случае, если касательное усилие в стенке обращается в нуль, а касательные усилия в двух полках образуют пару сил.

При вычислении касательных напряжений τ_{zx} в полке (рис. 157, a) замечаем, что в поперечном сечении $m_1 n_1$ действует сжимающее усилие S и изгибающий момент¹⁾

$$M = D \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{h}{2}. \quad (w)$$

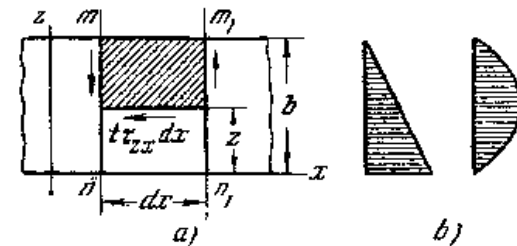


Рис. 157.

Рассматривая равновесие заштрихованного элемента между двумя смежными поперечными сечениями, получаем

$$t \tau_{zx} dx + \frac{dS}{dx} dx \frac{b-z}{b} + \frac{dM}{dx} dx \frac{S_{z1}}{J_1} = 0,$$

где S_{z1} и J_1 должны быть вычислены для полки таким же образом, как S_z и J_z для стенки. Подставляя вместо M его значение (w), находим

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{t} \frac{dS}{dx} \frac{b-z}{b} - \frac{E}{t} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{h S_{z1}}{2}.$$

Два члена правой части этого уравнения представлены на рис. 157, b заштрихованными площадями соответственно треугольника и параболического сегмента. Сумма этих двух площадей, умноженная на t , дает полную поперечную силу в полке, которая равняется²⁾

$$Q = \frac{b}{2} \frac{dS}{dx} + E \frac{htb^3}{2A} \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Тогда, подставляя из уравнения (v) значение S , получаем крутящий момент, уравновешиваемый касательными (поперечными) усилиями в полках, в следующем виде:

$$M_k^* = -Qh = -\frac{Dh^2}{2} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4J_z} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (x)$$

Полный крутящий момент равняется

$$M_k = C \frac{d\varphi}{dx} - \frac{Dh^2}{2} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4J_z} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (y)$$

¹⁾ $D = \frac{Et_1 b^3}{12}$ означает, как и ранее (стр. 214), жесткость при изгибе полки в ее плоскости.

²⁾ Положительное направление для Q показано на рис. 157, c.

Следовательно, все заключения, полученные для двутавровой балки, можно применить для швеллера, если величину a^2 , определяемую выражением (g), заменить величиной

$$a^2 = \frac{Dh^2}{2C} \left(1 + \frac{t_1 h^3}{4J_z} \right).$$

Метод, примененный при изложении кручения симметричного швеллера (рис. 154), можно приложить также к более общему случаю несимметричного корытного сечения (рис. 158). Положение центра сдвига O для этой формы было определено ранее (см. т. I, стр. 204—206). Далее, поступая по-прежнему (см. выражения (t)), выразим уравнения изогнутых осей полки и стенки в зависимости от угла закручивания φ . Продольные усилия S_1 и S_2 в полках теперь определятся из того условия, что в местах сопряжения продольная деформация ϵ_x одинакова, как для стенки, так и для полки. Когда усилия S_1 и S_2 вычислены, то распределение касательных напряжений можно найти, как и для симметричного швеллера. Затем можно показать¹⁾, что касательное усилие в стенке обращается в нуль и что касательные усилия R в двух полках

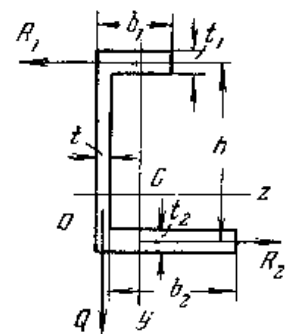


Рис. 158.

создают пару, уравновешиваемую частью M_k^* крутящего момента. Мы опять получаем для полного крутящего момента уравнение, подобное уравнениям (229) и (y); а вообще можно установить, что в случае неравномерного кручения уравнение имеет следующий вид:

$$M_k = C \frac{d\varphi}{dx} - C_1 \frac{d^3\varphi}{dx^3}. \quad (230)$$

Постоянная C_1 , называемая жесткостью при короблении, должна быть определена в каждом частном случае так, как пояснено на предыдущих примерах.

Метод, изложенный выше для неравномерного кручения стержней открытого профиля, можно также применить в случае трубчатых стержней полигонального поперечного сечения²⁾, и мы опять найдем, что полный крутящий момент состоит из двух частей: 1) части, обусловленной чистым кручением, как было показано в п. 48, и 2) части, обусловленной изгибом плоских граней трубы. Логично ожидать, что

¹⁾ Вычисления даны в статье А. Ostensfeld'a, цит. на стр. 213.

²⁾ Эта задача была рассмотрена впервые Н. Reissner'ом, Z. Flugtech. u. Motorluftschiffahrt, т. 17, стр. 384, 1926. См. также статью Th. v. Kármán'a и N. B. Christensen'a в J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 110, 1944 и статью F. Stüssi, Publ. Internat. Assoc. Bridge and Structural Engrg., т. 11, стр. 375, 1951 и т. 12, стр. 259, 1952.

в случае трубчатых стержней вторая часть крутящего момента будет иметь весьма ограниченный характер в заделанном поперечном сечении. Вычисление соответствующих напряжений по формуле для простой балки может оказаться неточным, так что желательнее произвести более тщательный анализ напряжений для этого поперечного сечения¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Консоль эллиптического сечения (рис. 159) заделана одним концом и скручивается парой сил M_k , приложенной на другом конце. Найти угол закручивания и наибольший изгибающий момент в полках.

Решение. В этом случае центр сдвига совпадает с центром тяжести C поперечного сечения (см. т. I, стр. 206) и никакого изгиба в стенке не происходит. Усилия S идентичны для обеих полок; распределение касательных напряжений показано на рис. 159, б. Равнодействующая касательных усилий в стенке обращается в нуль, а равные и противоположные касательные усилия Q в полках будут равняться

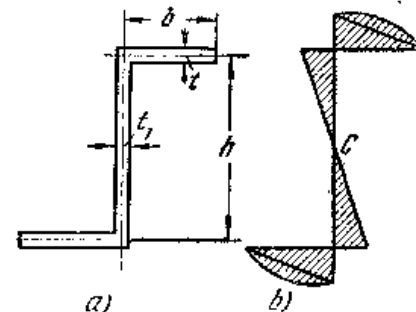


Рис. 159.

$$Q = \pm \frac{Eb^3ht}{12} \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right) \frac{d^3\varphi}{dx^3}.$$

Крутящий момент, обусловленный действием усилий Q , равняется

$$M_k^* = -Qh = -Dh^2 \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right) \frac{d^3\varphi}{dx^3},$$

где D — жесткость при изгибе одной полки. Угол закручивания и наибольший изгибающий момент в полках вычисляются по формулам (h) и (i), в которых для этого случая

$$a^2 = \frac{Dh^2}{C} \left(2 - \frac{3bt}{2bt + ht_1} \right).$$

2. Решить задачу 1, предполагая, что поперечное сечение такое, как показано на рис. 160.

Ответ. Касательные усилия в полках будут равняться

$$Q = \pm Dd \frac{d^3\varphi}{dx^3},$$

где

$$D = \frac{Et_1 b_1^3}{12}, \quad \frac{d}{h-d} = \frac{bt_2}{b_1^2 t_1}.$$

Крутящий момент от изгиба полки равняется

$$M_k^* = -Ddh \frac{d^3\varphi}{dx^3}.$$

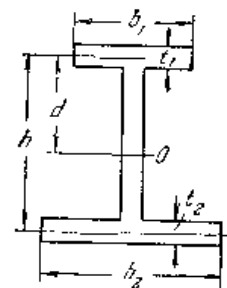


Рис. 160.

¹⁾ См. статью Th. von Kármán'a and Wei-Zang Chien'a, J. Aeronaut. Sci., т. 13, стр. 503, 1946.

Значение a , подставляемое в выражения (h) и (b), имеет вид

$$a^2 = \frac{D dh}{C}.$$

3. Решить задачу 1 для поперечных сечений, показанных на рис. 161.

Ответ. В обоих случаях центр сдвига O находится на пересечении полк. Вращение относительно этой точки не вызывает никакого изгиба

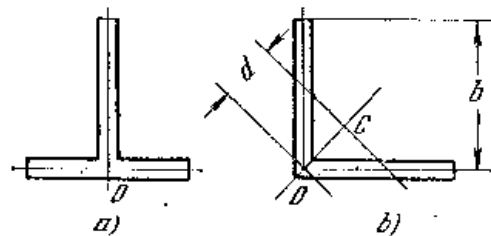


Рис. 161.

полк в их плоскостях, поэтому полный крутящий момент передается напряжениями от кручения и $M_k^0 = 0$.

50. Совместный изгиб и кручение тонкостенных стержней открытого профиля¹⁾

Рассмотрим общий случай тонкостенного стержня, находящегося под действием каких-либо поперечных нагрузок. Каждую силу можно заменить параллельной силой, проходящей через ось центров сдвига, и крутящим моментом. Таким образом, мы получим стержень, нагруженный по оси центров сдвига и подверженный действию крутящих моментов, приложенных в некоторых поперечных сечениях. Поперечные силы, приложенные к оси центров сдвига, вызывают только изгиб (см. г. 1, п. 52, стр. 206). При рассмотрении кручения мы можем воспользоваться результатами п. 49. Возьмем начало координат в конце стержня ($x=0$) и обозначим через M_k^0 крутящий момент на этом конце. Чтобы определить угол закручивания φ , воспользуемся уравнением (230). Разделив это уравнение на C_1 и введя обозначение

$$k^2 = \frac{C}{C_1},$$

получим

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_k}{C_1}, \quad (231)$$

где штрихи означают производные по x . Общее решение этого

¹⁾ См. статью автора, J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4 и 5, стр. 258, 1945; русский перевод: Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1953, стр. 502-561.

уравнения будет

$$\varphi = \frac{M_k^0 x}{C} + A + A_1 \operatorname{sh} kx + A_2 \operatorname{ch} kx, \quad (232)$$

так как в этом случае $M_k = M_k^0$. Подобное уравнение можно написать для каждого участка стержня, взятого между двумя последовательными поперечными нагрузками. Необходимо лишь заметить M_k^0 значением крутящего момента в начале этого участка. Постоянные интегрирования должны быть тогда определены из условий непрерывности в точках приложения нагрузок.

Вычисления можно значительно упростить, если вместо постоянных интегрирования A , A_1 и A_2 мы вводим величины, определяющие условия на конце $x=0$ стержня¹⁾. Дифференцируя уравнение (232) и подставляя $x=0$, мы получаем

$$\varphi_0 = A + A_2, \quad \varphi_0' = \frac{M_k^0}{C} + kA_1, \quad \varphi_0'' = k^2 A_2,$$

где нуль указывает на то, что величины относятся к концу $x=0$ стержня. Решая эти уравнения относительно постоянных A , A_1 и A_2 и подставляя эти значения в уравнение (232), получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0' \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi_0'' (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^0}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right). \quad (233)$$

В этом выражении угол закручивания φ для какого-либо поперечного сечения на первом участке стержня выражен в зависимости от величин φ_0 , φ_0' , φ_0'' и M_k^0 на конце $x=0$. Дифференцируя уравнение (233), находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \varphi_0' \operatorname{ch} kx + \frac{\varphi_0''}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{M_k^0}{C} (1 - \operatorname{ch} kx), \\ \varphi'' &= k \varphi_0' \operatorname{sh} kx + \varphi_0'' \operatorname{ch} kx - \frac{k M_k^0}{C} \operatorname{sh} kx. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Уравнения (233) и (234) применимы в пределах между $x=0$ и $x=a$, где a определяет положение первой поперечной нагрузки.

При рассмотрении второго участка стержня ($x > a$) мы должны принять в расчет крутящий момент M_k^1 , приложенный в поперечном сечении $x=a$. Выражение для угла закручивания во втором участке бруса теперь получится путем добавления угла закручивания, вызванного

¹⁾ Этот метод был разработан А. Н. Крыловым в связи с рассмотрением изгиба балок, лежащих на упругом основании. См. его книгу «Расчет балок на упругом основании», АН СССР, Ленинград, 1931.

M'_k , к уравнению (233). Таким образом, мы получим для $x > a$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi'_0 \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi''_0 (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M'_k}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{M'_k}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right]. \quad (235)$$

Последний член правой части представляет собой угол, вызываемый M'_k . Он получается из последнего члена уравнения (233) путем подстановки M'_k вместо M_k и $x - a$ вместо x , так как расстояние M'_k от рассматриваемого поперечного сечения равняется $x - a$.

Подобным образом мы можем поступить с третьим участком стержня и так далее до последнего участка. Выражения для φ во всех участках стержня содержат одни и те же постоянные φ_0 , φ'_0 , φ''_0 и M'_k . Все эти постоянные можно теперь определить из условий на двух концах стержня.

Чтобы пояснить метод, рассмотрим несколько простых примеров. Мы начнем со случая, в котором стержень скручивается крутящими моментами, приложенными на концах, и в то же самое время концы оверты так, что они могут вращаться, но коробление их совершенно исключено. Так как в продольном направлении не приложены силы, то уравнение (233) можно применить по всей длине стержня. Предполагая, что конец $x=0$ неподвижен, и замечая, что коробление исключено, мы должны в уравнение (233) подставить $\varphi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0$, что даст

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{k^2} \varphi''_0 (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M'_k}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right), \\ \varphi' &= \frac{1}{k} \varphi''_0 \operatorname{sh} kx + \frac{M'_k}{C} (1 - \operatorname{ch} kx). \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

Так как коробление на другом конце ($x=l$) стержня также устранено, то мы имеем

$$\varphi'_l = \frac{1}{k} \varphi''_0 \operatorname{sh} kl + \frac{M'_k}{C} (1 - \operatorname{ch} kl) = 0,$$

откуда

$$\varphi''_0 = - \frac{kM'_k}{C} \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl}.$$

Подставляя это в первое из уравнений (236), получаем угол закручивания

$$\varphi = \frac{M'_k}{kC} \left[\frac{(\operatorname{ch} kl - 1)(\operatorname{ch} kx - 1)}{\operatorname{sh} kl} + kx - \operatorname{sh} kx \right].$$

Взяв $x=l$, мы получим поворот конца $x=l$ стержня

$$\varphi_l = \frac{M'_k l}{C} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} kl/2}{kl/2} \right).$$

Второй член в скобках оценивает влияние концевое сопротивление короблению на величину угла закручивания.

В качестве второго примера рассмотрим случай, показанный на рис. 162. Стежень, овертый на концах, эксцентрично нагружен на расстоянии a от

двух концов. Обозначая через e расстояние груза от оси центров тяжести, мы сводим задачу к задаче на простой изгиб стержня нагрузкой P в сочетании с кручением, вызываемым крутящим моментом Pe . Предположим сначала, что концы стержня не могут вращаться относительно оси x , но могут свободно коробиться. В таком случае условия на концах будут $\varphi = \varphi' = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Для участка стержня от $x=0$ до $x=a$ мы воспользуемся уравнением (233). Подставив в это уравнение $\varphi_0 = \varphi'_0 = 0$, получим

$$\varphi = \frac{1}{k} \varphi'_0 \operatorname{sh} kx + \frac{M'_k}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right).$$

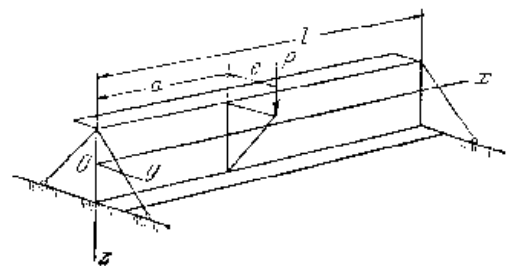


Рис. 162.

Для правого участка стержня ($x > a$) воспользуемся уравнением (235), которое при $\varphi_0 = \varphi'_0 = 0$ и $M'_k = Pe$ дает

$$\varphi = \frac{1}{k} \varphi'_0 \operatorname{sh} kx + \frac{M'_k}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{Pe}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right].$$

Дифференцируя, мы находим

$$\varphi' = k\varphi'_0 \operatorname{sh} kx - \frac{kM'_k}{C} \operatorname{sh} kx - \frac{kPe}{C} \operatorname{sh} k(x-a).$$

Замечая, что на конце $x=l$ условия будут $\varphi_l = \varphi'_l = 0$, получаем следующие уравнения для вычисления постоянных φ'_0 и M'_k :

$$\varphi'_0 \operatorname{sh} kl + \frac{M'_k}{C} (kl - \operatorname{sh} kl) = - \frac{Pe}{C} [kl - ka - \operatorname{sh} k(l-a)],$$

$$\varphi'_0 \operatorname{sh} kl - \frac{M'_k}{C} \operatorname{sh} kl = \frac{Pe}{C} \operatorname{sh} k(l-a).$$

Решая эти уравнения, получаем

$$M'_k = - Pe \frac{l-a}{l},$$

$$\varphi'_0 = \frac{Pe}{C} \left[\frac{\operatorname{sh} k(l-a)}{\operatorname{sh} kl} - \frac{l-a}{l} \right].$$

Подставляя эти значения в выражения для φ , мы получаем углы закручивания для обоих участков стержня.

Если концы стержня на рис. 162 зашпательны и не могут коробиться, то условия на концах будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=l.$$

Подставляя $\varphi_0 = \varphi'_0 = 0$ в уравнение (235), получаем при $x > a$

$$\varphi = \frac{1}{k^2} \varphi''_0 (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M'_k}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{Pe}{C} \left[x - a - \frac{\operatorname{sh} k(x-a)}{k} \right].$$

Применяя это уравнение для конца $x=l$, получаем следующие уравнения для вычисления постоянных φ_0^u и M_k^u :

$$\varphi_0^u (\operatorname{ch} kl - 1) + \frac{kM_k^u}{C} (kl - \operatorname{sh} kl) = -\frac{kPe}{C} [kl - ka - \operatorname{sh} k(l-a)];$$

$$\varphi_0^u \operatorname{sh} kl + \frac{kM_k^u}{C} (1 - \operatorname{ch} kl) = -\frac{kPe}{C} [1 - \operatorname{ch} k(l-a)].$$

Из этих уравнений можно вычислить постоянные φ_0^u и M_k^u в каждом частном случае. Подставляя их в выражения для φ , мы опять находим полное решение задачи. Имея решение для одной сосредоточенной силы, как показано на рис. 162, мы можем найти решение для любого числа сосредоточенных сил, применяя метод наложения.

Случай распределенной нагрузки также решается без затруднения. В качестве примера рассмотрим опять стержень, показанный на рис. 162, и предположим, что вместо силы P имеем распределенную нагрузку постоянной интенсивности q , приложенную по линии, параллельной оси x на расстоянии e от оси центров сдвига. Тогда крутящим моментом в произвольном поперечном сечении будет

$$M_k = M_k^u + qex.$$

Подставляя это значение в уравнение (230) и решая по-прежнему, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{k} \varphi_0^u \operatorname{sh} kx + \frac{1}{k^2} \varphi_0^u (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^u}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Если оба конца стержня жестко защемлены, то условия на концах будут $\varphi = \varphi' = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Тогда, подставляя $\varphi_0 = \varphi_0^u = 0$ в выше приведенное выражение для φ , получаем

$$\varphi = \frac{1}{k^2} \varphi_0^u (\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_k^u}{C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Применяя это уравнение для конца $x=l$ и замечая, что из условий симметрии $M_k^u = -qel/2$, получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{k^2} \varphi_0^u (\operatorname{ch} kl - 1) - \frac{qel}{2C} \left(l - \frac{\operatorname{sh} kl}{k} \right) + \frac{qel^2}{2C} = 0,$$

откуда

$$\varphi_0^u = -\frac{qekl}{2C} \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl - 1}.$$

Подставляя это значение в выражение для φ , находим

$$\varphi = -\frac{qel}{2kC} \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl - 1} (\operatorname{ch} kx - 1) - \frac{qel}{2C} \left(x - \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \right) + \frac{qex^2}{2C}.$$

Это выражение можно упростить и привести к следующему виду:

$$\varphi = \frac{qel}{kC} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{kx}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \operatorname{sh} \frac{k(l-x)}{2} - \frac{kx(l-x)}{2l} \right].$$

Из этих примеров видно, что решение уравнения (230) можно легко получить в любом частном случае.

51. Крутильная форма потери устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля¹⁾

Известно, что тонкостенный стержень под действием равномерного осевого сжатия иногда может потерять устойчивость в крутильной форме, в то время как его ось остается прямой. Рис. 163 показывает пример такого чистого выпучивания от кручения в случае стержня, имеющего четыре одинаковых полки. Волокно, совпадающее с осью, остается прямым при этом выпучивании, и момент M_z сжимающих сил, приложенных на конце, обращается в нуль для каждого поперечного сечения стержня. Чтобы определить крутящий момент, вызывающий кручение, указанное на рисунке, нужно рассмотреть перемещение полки при выпучивании.

Метод, который должен быть применен в последующем расчете, сначала поясним на простом случае выпучивания стержня (рис. 164, а). Первоначально стержень является прямым и на него действует только центрально приложенная сила P . Предположим теперь, что сила P достигла своего критического значения, так что стержень имеет слегка изогнутую

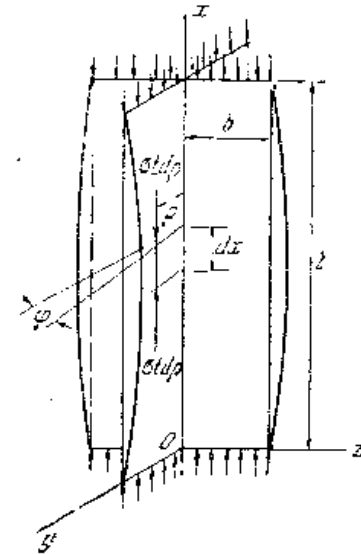


Рис. 163.

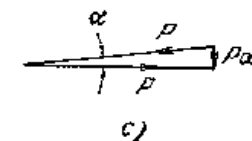
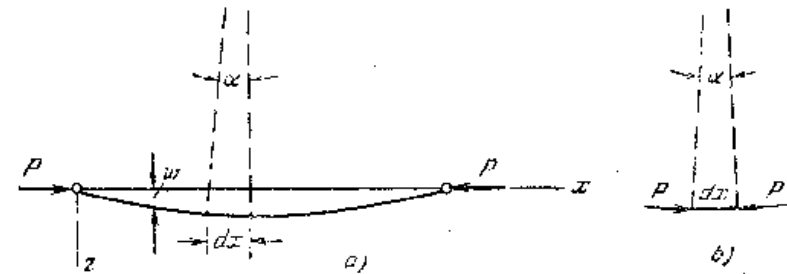


Рис. 164.

форму равновесия. Благодаря этому изгибу напряжения изгиба будут

¹⁾ См. статью автора, J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4 и 5, стр. 263, 1945.

накладываться на первоначально равномерно распределенные сжимающие напряжения. В то же время начальные напряжения будут действовать на слегка повернутые поперечные сечения, как показано на рис. 164, б. Каждый элемент изогнутого стержня между двумя смежными поперечными сечениями находится в равновесии, и мы можем считать, что напряжения изгиба, возникающие при выпучивании стержня, находятся в равновесии с первоначально сжимающими напряжениями, действующими на слегка повернутые поперечные сечения. Угол между двумя последовательными поперечными сечениями после изгиба (рис. 164, б) будет $\alpha = -\frac{d^2\omega}{dx^2} dx$, где ω — прогиб стержня в направлении z . Поэтому мы заключаем, что действие сжимающих сил P на повернутые поперечные сечения стержня эквивалентны действию на каждый элемент стержня поперечной нагрузки (рис. 164, в), равной $-P \frac{d^2\omega}{dx^2} dx$. Отсюда ясно, что изогнутую ось стержня и соответствующие напряжения изгиба можно найти, предполагая, что стержень нагружен фиктивной нагрузкой интенсивности $-P d^2\omega/dx^2$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси в этом случае будет

$$EI_y \frac{d^4\omega}{dx^4} = -P \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Из этого уравнения можно получить обычным путем известное критическое значение сжимающей силы $P_{кр}$.

Возвращаясь теперь к задаче о крутильной форме потери устойчивости, показанной на рис. 163, мы можем установить, что в критическом состоянии выпученная форма равновесия поддерживается продольными сжимающими напряжениями, действующими на повернутые поперечные сечения волокон. Предполагая, что толщина t полок мала, и рассматривая полоску поперечного сечения $t dp$ на расстоянии p от оси, мы видим, что вследствие выпучивания прогиб ее равенся $\omega = p\varphi$. Взяв один элемент этой полоски между двумя последовательными поперечными сечениями, находящимися на расстоянии dx одно от другого, и рассмотрим действие первоначального сжимающего усилия $\sigma t dp$ на слегка повернутые поперечные сечения полоски (рис. 163), мы получим поперечную силу

$$-(\sigma t dp) \frac{d^2\omega}{dx^2} dx = -(\sigma t dp) p \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx.$$

Момент этой силы относительно оси x будет равенся

$$- \sigma \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx (t p^2 dp).$$

Суммируя эти моменты и распространя суммирование на все поперечное сечение, мы получаем крутящий момент, действующий на эле-

мент выпученного при кручении стержня, заключенный между двумя последовательными поперечными сечениями. Пользуясь обозначением m_x для крутящего момента, приходящегося на единицу длины стержня, получим

$$m_x = -4\sigma \frac{d^2\varphi}{dx^2} \int_0^b t p^2 dp = -\sigma \frac{d^2\varphi}{dx^2} J_0, \quad (a)$$

где J_0 — полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня относительно центра сдвига, совпадающего в этом случае с центром тяжести площади поперечного сечения. Для того чтобы вывести теперь уравнение для выпученного стержня, воспользуемся уравнением (230). Дифференцируя это уравнение по x и замечая, что $m_x = -\frac{dM_k}{dx}$, находим

$$C_1 \varphi''' - C \varphi'' = m_x. \quad (237)$$

Подставляя вместо m_x его значение, даваемое уравнением (а), получаем

$$C_1 \varphi''' - (C - \sigma J_0) \varphi'' = 0. \quad (238)$$

Из этого уравнения теперь будет получено критическое значение сжимающего напряжения σ .

Для случая, показанного на рис. 163, средние линии всех полок пересекаются в поперечном сечении в одной точке, и, следовательно, жесткость при короблении C_1 обращается в нуль; поэтому уравнение (238) получается в следующем виде:

$$(C - \sigma J_0) \varphi'' = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, если допустить, что величина в скобках обращается в нуль, что дает

$$\sigma_{кр} = \frac{C}{J_0} = \frac{\frac{4}{3} h t^3 G}{\frac{4}{3} t b^3} = G \frac{t^2}{b^2}. \quad (239)$$

Формула (239) указывает на то, что критическое значение сжимающего напряжения не зависит от длины стержня и от формы выпучивания, определяемой углом φ . Такой результат получается потому, что при выводе уравнения (230) пренебрегалось каким бы то ни было сопротивлением полок изгибу в направлении, перпендикулярном плоскости попки. Для того чтобы такой изгиб принять в расчет, мы должны рассматривать каждую полку как равномерно сжатую пластинку, свободно опертую тремя краями и могущую совершенно свободно выпучиваться по четвертому краю. Такое более точное

исследование показывает, что критическое напряжение будет равняться¹⁾

$$\sigma_{кр} = \left(0,456 + \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{\pi^2}{6(1-\mu)} \frac{Gt^2}{b^2}.$$

Второй член в скобках дает влияние длины стержня на критическое напряжение. Для стержней значительной длины этим членом можно пренебречь. Тогда мы получим

$$\sigma_{кр} = \frac{0,75}{1-\mu} \frac{Gt^2}{b^2}.$$

При $\mu = 0,3$ это значение больше значения, вычисленного выше (уравнение (239)), приблизительно на 7%.

Выражение (238) сохраняет свою силу также в случаях, когда C_1 не обращается в нуль, оно справедливо и для несимметричных поперечных сечений при условии, что ось стержня остается прямой при выпучивании. Это требует, как мы увидим в следующем параграфе, чтобы ось центров сдвига и ось центров тяжести совпадали, как в случае ветового сечения. Во всех таких случаях критическое сжимающее напряжение получается из решения уравнения (238). Ввиду обозначение

$$k^2 = \frac{\sigma J_0}{C_1} \frac{G}{C_1}, \quad (b)$$

мы находим, что этим решением будет

$$\varphi = A \sin kx + A_1 \cos kx + A_2 x + A_3. \quad (240)$$

Если концы сжатого стержня не могут поворачиваться, но могут свободно коробиться, мы имеем следующие условия на концах:

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

откуда следует

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \quad \text{и} \quad kl = n\pi.$$

Подставляя это значение k в выражение (b), получаем

$$\sigma J_0 - C = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_1.$$

Наименьшее значение σ , удовлетворяющее этому условию, равняется²⁾

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{\pi^2}{l^2} C_1 \right). \quad (241)$$

¹⁾ Это решение было получено автором, см. Известия Киевского политехнического института, 1907 и Z. Math. u. Phys., т. 58, стр. 337, 1910.

²⁾ Это решение было получено Н. Wagner'ом, 25th Anniversary Publication, Technische Hochschule, Danzig, стр. 329, 1929.

Если концы стержня заделаны и не могут коробиться, условия на концах будут

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x = l.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, мы должны принять

$$A_1 = -A_3, \quad A = A_2 = 0 \quad \text{и} \quad kl = 2n\pi.$$

Наименьшее критическое сжимающее напряжение в этом случае будет

$$\sigma_{кр} = \frac{1}{J_0} \left(C + \frac{4\pi^2}{l^2} C_1 \right).$$

52. Потеря устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля от одновременного действия изгиба и кручения¹⁾

Рассмотрим теперь общий случай потери устойчивости, когда под действием центрального сжатия имеет место не только кручение, но также и изгиб оси сжатого стержня. Предположим, что y и z являются главными центральными осями поперечного сечения стержня до выпучивания (рис. 165), и y_0, z_0 — координаты центра сдвига O . Перемещения оси центров сдвига в направлениях y и z при выпучивании обозначим через v и w соответственно, а через φ — угол поворота произвольного поперечного сечения относительно оси центров сдвига. На рис. 165 точки C' и O' представляют отклоненные положения центра тяжести C и центра сдвига O . Тогда перемещения центральной оси при выпучивании будут равны

$$v + z_0 \varphi \quad \text{и} \quad w - y_0 \varphi.$$

Предполагая, что сила P действует на концах стержня по оси x , в случае свободно опертого стержня находим, что изгибающие моменты относительно главных осей в произвольном поперечном сечении будут

$$M_y = P(w - y_0 \varphi), \quad M_z = -P(v + z_0 \varphi).$$

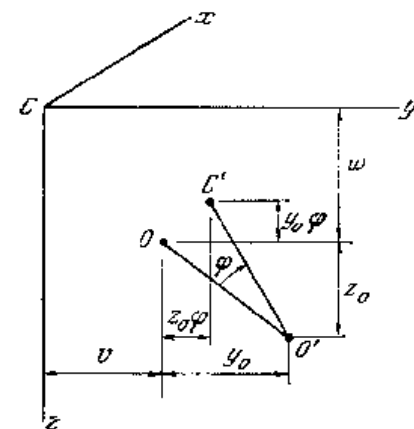


Рис. 165.

¹⁾ Продольный изгиб при кручении был рассмотрен Н. Wagner'ом, см. на стр. 230. См. также Н. Wagner and Pretschner, Luftfahrtforsch., т. 11, стр. 174, 1934; R. Carrus, там же, т. 14, стр. 441, 1937. Английский перевод последней статьи дан в Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Mem., № 851, 1938. См. также статью автора в J. Franklin Inst., т. 239, № 3, 4, 5, стр. 201, 1945. Русский перевод, Устойчивость упругих систем, стр. 502—561,

Дифференциальными уравнениями упругой кривой для оси центров сдвига будут

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{d^2 v}{dx^2} &= -P(v - z_0 \varphi), \\ EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= -P(w - y_0 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

В дополнение к изгибу стержня, описанному уравнениями (242), будут иметь место деформации кручения. Чтобы написать уравнение для угла закручивания φ , поступим так, как в п. 51. Возьмем полоску поперечного сечения $t ds^1$, определяемую координатами y и z в плоскости поперечного сечения. Составляющие ее смещения в направлениях y и z при выпучивании будут

$$v - (z_0 - z) \varphi \quad \text{и} \quad w - (y_0 - y) \varphi.$$

Взяв вторые производные этих выражений по x и рассмотрев элемент dx волокна, найдем по-прежнему, что сжимающие усилия $\sigma t ds$, действующие на слегка повернутые концы элемента dx , дают следующие усилия в направлениях y и z :

$$\begin{aligned} & - \sigma t ds \frac{d^2}{dx^2} [v - (z_0 - z) \varphi] dx, \\ & - \sigma t ds \frac{d^2}{dx^2} [w - (y_0 - y) \varphi] dx. \end{aligned}$$

Опять обозначая черточками производные по x и взяв моменты указанных выше усилий относительно оси центров сдвига, получим (как долю одной полоски) следующий крутящий момент, приходящийся на единицу длины стержня:

$$dm_x = - \sigma t ds [v' - (z_0 - z) \varphi'] (z_0 - z) + \\ + \sigma t ds [w' - (y_0 - y) \varphi'] (y_0 - y)$$

Интегрируя по всей площади поперечного сечения и замечая, что

$$\begin{aligned} \sigma \int_F t ds &= P, \quad \int_F z t ds = 0, \quad \int_F y t ds = 0, \\ \int_F z^2 t ds &= J_z, \quad \int_F y^2 t ds = J_y. \end{aligned}$$

1955; J. N. Goodier, Cornell Univ. Eng. Exp. Sta. Bull., № 27, 1941 и № 28, 1942; и книгу В. З. Власова «Тонкостенные упругие стержни», Москва, 1940. Относительно экспериментов на выпучивание при кручении см. статью A. S. Niles, Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 733, 1939.

¹⁾ Величина ds есть элемент длины по средней линии поперечного сечения.

получаем

$$m_x = (y_0 w'' - z_0 v'') P - r_0^2 P \varphi'', \quad (a)$$

где

$$r_0^2 = y_0^2 + z_0^2 + \frac{J_y - J_z}{P}.$$

Здесь r_0 — полярный радиус инерции площади поперечного сечения относительно центра сдвига. Подставляя вычисленное значение m_x (уравнение (a)) в уравнение (237), получаем

$$C_1 \varphi''' - (C - r_0^2 P) \varphi'' - P(y_0 w'' - z_0 v'') = 0. \quad (243)$$

Это уравнение совместно с уравнениями (242) используем теперь для определения критического значения сжимающей силы P^1 .

Видно, что угол поворота φ входит во все три уравнения, указывая на то, что в общем случае выпучивание при кручении сопровождается изгибом оси, и мы имеем сочетание крутильной и изгибной форм потери устойчивости. В частном случае, когда $y_0 = z_0 = 0$, т. е. когда ось центров сдвига совпадает с центральной осью, каждое из уравнений (242) и (243) содержит только одну неизвестную и может быть решено отдельно. Тогда уравнения (242) дают два значения критической нагрузки, соответствующие потере устойчивости в двух главных плоскостях, как дается теорией Эйлера, а уравнение (243) дает критическую нагрузку для чисто крутильного выпучивания, уже рассмотренного в п. 51. Из этих трех значений критической нагрузки естественно принять в расчет для практических приложений наименьшее значение.

Возвращаясь к общему случаю, предположим, что концы сжатого стержня не могут поворачиваться относительно оси x (рис. 163), но они свободно могут коробиться и поворачиваться относительно осей y и z (свободно опертые концы). В таком случае условия на концах будут

$$\left. \begin{aligned} v = w = \varphi = 0, \\ v' = w' = \varphi' = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

Все эти условия будут удовлетворяться, если взять решения уравнений (242) и (243) в виде

$$v = A_1 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w = A_2 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (244)$$

¹⁾ Система уравнений, эквивалентная уравнениям (242) и (243), была впервые получена Робертом Каррусом; см. Jahrb. deut. Luftfahrtforsch., 1937 и Luftfahrtforsch., т. 14, стр. 444, 1938.

Подставляя эти выражения в уравнения (242) и (243), получаем уравнения для вычисления постоянных A_1 , A_2 и A_3 :

$$\left. \begin{aligned} (P - EJ_z \frac{\pi^2}{l^2}) A_1 - Pz_0 A_3 &= 0, \\ (P - EJ_y \frac{\pi^2}{l^2}) A_2 - Py_0 A_3 &= 0, \\ Pz_0 A_1 - Py_0 A_2 + \left(-C_1 \frac{\pi^2}{l^2} - C + r_0^2 P \right) A_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Эти уравнения удовлетворяются, если взять $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, что соответствует прямолинейной форме равновесия сжатого стержня. Чтобы иметь выпученную форму равновесия, уравнения (245) должны дать для A_1 , A_2 и A_3 решения, отличные от нуля, что возможно лишь в том случае, если детерминант уравнений (245) обращается в нуль. Для простоты записи введем здесь обозначения

$$P_1 = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}, \quad P_2 = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad P_3 = \frac{1}{r_0^2} \left(C + C_1 \frac{\pi^2}{l^2} \right), \quad (246)$$

в которых P_1 и P_2 — эйлеровы нагрузки для продольного изгиба в двух главных плоскостях, а P_3 означает критическую нагрузку для чисто крутильного выпучивания, определяемую формулой (241). Тогда приравняв нулю детерминант уравнений (245), получаем

$$\begin{vmatrix} P - P_1 & 0 & z_0 P \\ 0 & P - P_2 & -y_0 P \\ z_0 P & -y_0 P & r_0^2 (P - P_3) \end{vmatrix} = 0,$$

что после раскрытия дает следующее кубическое уравнение для вычисления критических значений силы P :

$$\begin{aligned} (-r_0^2 + y_0^2 + z_0^2) P^3 + [(P_1 + P_2 + P_3) r_0^2 - y_0^2 P_1 - z_0^2 P_2] P^2 - \\ - r_0^2 (P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_1 P_3) P + P_1 P_2 P_3 r_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (247)$$

Это уравнение позволяет сделать одно важное заключение. Предполагая, что $P_1 < P_3$, т. е. что меньшая эйлерова нагрузка соответствует изгибу в плоскости xu , исследуем знак левой части уравнения (247) для различных значений P . Если P весьма мало, то мы можем пренебречь всеми членами, содержащими P , и левая часть уравнения сводится к $P_1 P_2 P_3 r_0^2$, которое положительно. Если P принимает значение P_1 , то левая часть уравнения (247) сводится к $z_0^2 P_1^2 (P_1 - P_2)$, которое отрицательно, так как $P_1 < P_2$. Это указывает на то, что уравнение (247) имеет корень меньший чем P_1 . Поэтому мы заключаем, что когда рассматривается возможность кручения при выпучивании, мы всегда получаем критическую нагрузку меньшую эйлерову.

Чтобы найти критическую нагрузку в любом частном случае, мы вычисляем, используя обозначения (246), численные значения коэффициентов в уравнении (247) и решаем это кубическое уравнение¹⁾. Таким образом, мы получаем три значения для P , из которых будет принято для практических приложений наименьшее. Подставляя критические значения в уравнение (245), мы находим для каждой возможной критической формы отношения $A_1 : A_3$ и $A_2 : A_3$. Эти отношения, устанавливающие зависимость между вращением и переносом поперечных сечений, определяют для каждой критической формы положение оси центров сдвига и вращение вокруг этой оси.

Если стержень имеет весьма тонкие стенки и малую длину l , P_3 может получиться меньшим, чем P_1 и P_2 . В таком случае наименьший корень уравнения (247) приближается к значению P_3 . Подставляя это значение в уравнения (245), находим, что A_1 и A_2 малы по сравнению с перемещениями от вращения, что указывает на то, что форма потери устойчивости приближается к чисто крутильной, рассмотренной в п. 51. В случае толстой стенки и большой длины l обычно P_3 больше, чем P_1 и P_2 , и наименьший корень уравнения (247) приближается к значению P_1 . Влияние кручения на критическую нагрузку мало в этом случае, и обычная формула для расчета колонн дает удовлетворительные результаты.

Если поперечное сечение имеет ось симметрии, вычисление $P_{кр}$ упрощается. Пусть ось y будет осью симметрии; тогда $z_0 = 0$ и член, содержащий z в первом из уравнений (242), обращается в нуль. Выпучивание стержня в плоскости симметрии не зависит от кручения, и соответствующая критическая нагрузка дается формулой Эйлера. Мы должны рассмотреть лишь изгиб, перпендикулярный плоскости симметрии, и кручение. Соответствующие уравнения будут

$$\begin{aligned} EJ_y w'' &= -P(w - y_0 \varphi), \\ C_1 \varphi'''' - (C - r_0^2 P) \varphi'' &= P y_0 w''. \end{aligned}$$

Поступая по-прежнему и пользуясь уравнением (244), получаем для вычисления критической нагрузки

$$\begin{vmatrix} P - P_1 & -y_0 P \\ -y_0 P & r_0^2 (P - P_3) \end{vmatrix} = 0,$$

что дает

$$r_0^2 (P - P_2) (P - P_3) - y_0^2 P^2 = 0. \quad (248)$$

Это квадратное уравнение дает два решения. Вместе с эйлеровой нагрузкой для продольного изгиба в плоскости симметрии они определяют три критических значения для P , из которых для практических приложений должно быть принято наименьшее. Рассматривая левую

¹⁾ Это решение можно значительно упростить при помощи номограммы, показанной в статье Карри-са, цит. на стр. 233.

часть уравнения (248), мы видим, что для очень малых значений P эта часть сводится к значению $r_0^2 P_2 P_3$, которое является положительным. Мы видим также, что она является отрицательной для $P = P_2$ и $P = P_3$, так как обращается в $-y_0^2 P^2$. Она отрицательна также для всех значений P между $P = P_2$ и $P = P_3$, так как первый член становится отрицательным, а второй — всегда отрицателен. Из этих рассуждений мы заключаем, что один корень уравнения (248) меньше чем P_2 или P_3 , в то время как другой — больше любого из них. Меньший из этих корней, или Эйлерова нагрузка, для продольного изгиба в плоскости симметрии дает требуемую критическую нагрузку.

Все приведенные выводы основываются на уравнениях (244). Не осложняя вопроса, мы можем принять решение в более общем виде и предположить

$$v = A_1 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad w = A_2 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi = A_3 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (249)$$

что соответствует допущению, что при потере устойчивости стержень разламывается на n полуволн. Наши предыдущие заключения будут также справедливы и в этом случае; мы должны только подставить в выражения (246) значения $n^2 \pi^2 / l^2$ вместо π^2 / l^2 . Соответствующие критические значения нагрузки, естественно, будут большими, чем получаемые при выпучивании в одну полуволну, и будут представлять практический интерес лишь в том случае, если стержень имеет промежуточные равноотстоящие боковые опоры.

Если концы стержня заделаны, то условия на концах будут

$$\left. \begin{aligned} v = w = \varphi = 0, \\ v' = w' = \varphi' = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Так как при выпучивании появятся моменты на концах, то мы будем иметь вместо уравнений (242) следующие:

$$\left. \begin{aligned} EJ_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -P(v + z_0 \varphi) + EJ_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{x=0} \\ EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -P(w - y_0 \varphi) + EJ_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Эти уравнения совместно с уравнением (243)¹⁾ определяют формы выпучивания стержня и соответствующие критические нагрузки. Все эти уравнения и условия на концах будут удовлетворены, если принять

$$\left. \begin{aligned} v = A_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad w = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \\ \varphi = A_3 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right). \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

¹⁾ Уравнение (243) было выведено из рассмотрения элемента стержня между двумя смежными поперечными сечениями и не учитывает влияния изменения условий на концах.

Подставляя эти выражения в уравнения (243) и (250), получим то же уравнение (247) для вычисления критических нагрузок; необходимо лишь в обозначениях (246) воспользоваться величиной $4\pi^2/l^2$ вместо π^2/l^2 .

53. Продольные нормальные напряжения в скручиваемых стержнях

При рассмотрении кручения круглых валов (т. I, стр. 238) предполагалось, что расстояние между любыми двумя поперечными сечениями вала при кручении остается неизменным. Теперь будет показано, что это допущение весьма точно для малых деформаций, как это наблюдается в стальных валах. Но для таких материалов, как каучук, наибольшая деформация сдвига при кручении может быть значительной. Тогда изменение расстояний между поперечными сечениями вала при кручении нужно принять во внимание, если мы желаем найти точные значения напряжений. Такое заключение справедливо также для стальных скручиваемых стержней узкого прямоугольного поперечного сечения или тонкостенных поперечных сечений, какие показаны на рис. 144.

Начнем рассмотрение со случая сплошного круглого вала и предположим сначала, что расстояние между двумя последовательными поперечными сечениями (рис. 166) остается неизменным при кручении. Если γ — деформация сдвига на поверхности вала, то удлинение продольного волокна ac получится из треугольника ac_1 в следующем виде:

$$ac = \frac{ac_1}{\cos \gamma} = ac_1 \left(1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right).$$

Выразив γ через угол закручивания на единицу длины, получим

$$ac = ac_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta d}{2} \right)^2 \right],$$

относительное же удлинение волокна ac будет

$$\epsilon_{\max} = \frac{ac - ac_1}{ac_1} = \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{1}{8} \theta^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}. \quad (a)$$

Соответствующее растягивающее напряжение равняется

$$\sigma_{\max} = \epsilon_{\max} \cdot E = \frac{E}{2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}.$$

Для любого другого волокна, находящегося на расстоянии r от оси вала, относительный сдвиг меньше γ в отношении $r : d/2$, и растягивающее напряжение равно

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{2r}{d} \right)^2 = E \frac{2r^2}{d^2} \frac{\tau_{\max}^2}{G^2}. \quad (b)$$

Предположение, что расстояние между поперечными сечениями остается неизменным при кручении, приводит нас, следовательно, к заключению, что в концах должна быть приложена продольная сила, вызывающая растягивающее напряжение (уравнение (b)), чтобы сохранить длину неизменной. Если такая сила не приложена, то скручивание при чистом кручении будет

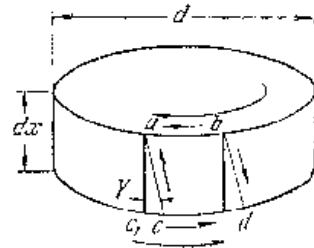


Рис. 166.

сопровождаться укорочением вала. Пусть ϵ_0 будет соответствующее относительное укорочение. Тогда вместо формулы (b) получим

$$\sigma = \frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} - \epsilon_0 E. \quad (c)$$

Величина ϵ_0 определится из того условия, что продольная сила, соответствующая распределению напряжений по уравнению (c), должна быть равна нулю. Разделив поперечное сечение на элементарные кольца и просуммировав усилия, соответствующие напряжениям (c), получим¹⁾

$$\int_0^{d/2} 2\pi r \sigma dr = 2\pi \int_0^{d/2} \left(\frac{2r^2}{d^2} \frac{E\tau_{\max}^2}{G^2} - \epsilon_0 E \right) r dr = \frac{\pi d^2 E}{4} \left(\frac{\tau_{\max}^2}{4G^2} - \epsilon_0 \right) = 0,$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{\tau_{\max}^2}{4G^2},$$

и распределение напряжений на основании уравнения (c) получится в виде

$$\sigma = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2} \left(\frac{8r^2}{d^2} - 1 \right). \quad (252)$$

Наибольшее напряжение имеет место на наружной поверхности, где $r = d/2$, и мы получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{4G^2}. \quad (253)$$

В центре поперечного сечения мы получаем сжимающее напряжение той же величины.

Интересно отметить, что напряжение σ пропорционально τ_{\max}^2 ; следовательно, значение этого напряжения растет с ростом τ_{\max} , т. е. с увеличением угла закручивания. Для такого материала, как сталь, τ_{\max} всегда очень мало по сравнению с G , и величина σ_{\max} поэтому мала по сравнению с τ_{\max} и ею можно пренебречь. Но для материала, подобного каучуку, τ_{\max} может быть того же порядка, что и G ; следовательно, σ_{\max} уже не будет мало по сравнению с τ_{\max} и должно быть принято в расчет.

Первое исследование осевой деформации от кручения круглого вала было сделано Томасом Юнгом²⁾. Он показал, что благодаря растяжению наклонных волокон, как, например, волокно *ac* на рис. 166, будет наблюдаться дополнительное сопротивление вала кручению, пропорциональное θ^2 .

Если вместо круглого поперечного сечения мы имеем узкое прямоугольное сечение, то можно показать³⁾, что даже для таких материалов, как сталь, напряжение σ может получиться того же порядка величины, что τ_{\max} . Если длинная сторона b поперечного сечения велика по сравнению с корот-

¹⁾ Предполагается, что косинусы углов между волокнами и осью стержня можно принять равными единице.

²⁾ См. Thomas Young, A Course of Lectures on Natural Philosophy, etc., London, 1807.

³⁾ См. статью Вискилеу, Phil. Mag., стр. 778, 1914; см. также С. Вебер, инг. на стр. 213, и также его статью в Festschrift zum Geburtstage August Föppl, Berlin, 1924.

кой стороной c , то наибольшее удлинение наиболее удаленного волокна вследствие только кручения получается из уравнения (a) путем подстановки b вместо d :

$$\epsilon_{\max} = \frac{b^2}{8} \theta^2.$$

Для любого волокна, находящегося на расстоянии y от оси, удлинение меньше чем ϵ_{\max} в отношении $(2y/b)^2$. Складывая это удлинение с продольным относительным укорочением ϵ_0 , получаем

$$\epsilon = \frac{b^2}{8} \theta^2 \left(\frac{2y}{b} \right)^2 - \epsilon_0 = \frac{\theta^2 y^2}{2} - \epsilon_0.$$

Соответствующее растягивающее напряжение будет равняться

$$\sigma = E \left(\frac{\theta^2 y^2}{2} - \epsilon_0 \right). \quad (d)$$

Постоянная ϵ_0 определяется по-прежнему из того условия, что растягивающая продольная сила равна нулю; следовательно,

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \sigma dy = cE \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{\theta^2}{2} y^2 - \epsilon_0 \right) dy = cE \left(\frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12} - \epsilon_0 b \right) = 0,$$

откуда

$$\epsilon_0 = \frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12},$$

и мы получаем из выражения (d)

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right). \quad (e)$$

Наибольшее растягивающее напряжение для наиболее удаленного волокна ($y = b/2$) равняется

$$\sigma_{\max} = \frac{E\theta^2 b^2}{12}. \quad (f)$$

Наибольшее сжимающее напряжение в центре ($y = 0$) равно

$$\sigma_{\min} = -\frac{E\theta^2 b^2}{24}. \quad (g)$$

Чтобы сравнить эти продольные напряжения с τ_{\max} , можно воспользоваться формулами (221) и (222). Для узкого прямоугольного сечения из них мы получаем

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{cG}. \quad (h)$$

Подставляя это значение в формулы (f) и (g), находим

$$\sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{12G^2} \frac{b^2}{c^2}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{E\tau_{\max}^2}{24G^2} \frac{b^2}{c^2}. \quad (254)$$

Видно, что когда b/c велико, напряжения σ_{\max} и σ_{\min} могут быть не малы по сравнению с τ_{\max} . Распределение напряжений (см. уравнение (e))

показано¹⁾ на рис. 167. Эти напряжения имеют направление продольных волокон скрученной полоски и направлены к оси полоски под углом θ . Их проекция на плоскость, перпендикулярную оси стержня, будут

$$\sigma \cdot b_y = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^4}{12} \right). \quad (i)$$

Составляющая (i) напряжения σ для элемента cdy поперечного сечения даст момент относительно оси стержня, равный

$$\frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^4}{12} \right) cy dy.$$

Следовательно, равнодействующий крутящий момент этих напряжений равен

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2 y^4}{12} \right) cy dy = \frac{Ecb^3}{360} \theta^3.$$

Складывая этот крутящий момент с крутящим моментом от касательных напряжений (формула (221), стр. 201), получаем следующее выражение для полного крутящего момента:

$$M_k = \frac{1}{3} bc^3 G \theta + \frac{1}{360} Ecb^3 \theta^3 = \frac{1}{3} bc^3 G \theta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^2}{c^2} \theta^2 \right). \quad (255)$$

Можно видеть, что в случае узкого, прямоугольного поперечного сечения и сравнительно больших углов закручивания напряжение σ может поглотить значительную часть крутящего момента, так как эта часть, представленная вторым членом в уравнении (255), пропорциональна θ^3 , в то время как часть момента от касательных напряжений τ пропорциональна θ . Когда величина крутящего момента дана, соответствующий угол закручивания можно найти из уравнения (255). Тогда наибольшее касательное напряжение τ_{\max} определится по формуле (6), а σ_{\max} и σ_{\min} — из формул (254).

В качестве примера возьмем стержень узкого прямоугольного поперечного сечения со следующими размерами: $b = 10$ см, $c = 0,125$ см, $E/G = 2,6$, $G = 7,7 \cdot 10^7$ кг/см² и $M_k = 1,3bc^3 \cdot 1000 = 52$ кг·см. Если нормальными напряжениями σ пренебречь, то формула (222) дает $\tau_{\max} = 1000$ кг/см², а (221) —

$$\theta = \frac{\tau_{\max}}{cG} = 0,0104 \text{ см}^{-1}.$$

Приглашая во внимание продольные напряжения, мы должны воспользоваться уравнением (255). Из него после деления на $\frac{1}{3} bc^3 G$ получим

$$0,0104 = \theta \left(1 + 13870 \theta^2 \right),$$

откуда $\theta = 0,00656 \text{ см}^{-1}$. Тогда из формул (i) и (254) имеем

$$\tau_{\max} = cG\theta = 620 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_{\max} = \frac{E\tau_{\max}^2}{12G^2} \frac{b^2}{c^2} = 700 \text{ кг/см}^2.$$

¹⁾ Это распределение напряжений имеет место на некотором расстоянии от концов стержня. Вблизи концов имеется более сложное распределение напряжений, чем данное уравнением (e). Оно таково, что исключает совершенно нормальные напряжения на концах. Такое же распределение напряжений рассмотрено в книге Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 167-1951; в русском переводе, стр. 304, 1937.

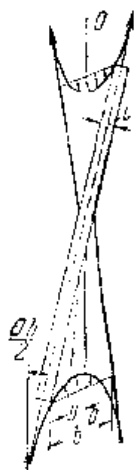


Рис. 167.

Можно видеть, что при большом угле закручивания тонкой металлической полоски, как в этом примере, нормальные напряжения σ будут того же порядка, что и касательные напряжения τ , и ими нельзя пренебречь при вычислении угла закручивания. Из приведенного обсуждения можно также заключить, что равномерное продольное растяжение будет иметь известное влияние на угол закручивания тонкой прямоугольной полоски. Предположим, например, что равномерное продольное растягивающее напряжение σ_0 приложено к полоске, которую только что мы рассматривали. В таком случае уравнение для вычисления ϵ_b будет

$$cE \left(\frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12} - \epsilon_b \theta \right) = \sigma_0 bc,$$

и мы получаем

$$\epsilon_b = \frac{\theta^2}{2} \frac{b^2}{12} - \frac{\sigma_0}{E}.$$

Тогда выражение для продольного напряжения получится в таком виде:

$$\sigma = \frac{E\theta^2}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{12} \right) + \sigma_0,$$

а соответствующий крутящий момент будет

$$\int_{-b/2}^{+b/2} \sigma cy dy = \frac{Ecb^3}{360} \theta^3 + \frac{\sigma_0 b^2 c}{12}.$$

Тогда вместо уравнения (255) для полного крутящего момента получим

$$M_k = \frac{1}{3} bc^3 G \theta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^2}{c^2} \theta^2 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{G} \frac{b^2}{c^2} \right). \quad (256)$$

Видно, что когда b/c — большое число, т. е. в случае тонкой полоски, растягивающее напряжение может значительно уменьшать угол закручивания θ .

54. Цилиндрическая пружина с большим шагом витка

В предыдущем изложении задачи о витковых пружинах (т. I, стр. 246) предполагалось, что угол α между витками и плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, был весьма мал. Пренебрегая влиянием угла, мы получали, что деформация сводится лишь к кручению проволоки. В пружинах с большим шагом витка угол α уже не является малым, и деформация, вызванная осевыми грузами P , состоит из деформаций кручения и изгиба (рис. 168). В произвольной точке A касательная к витковой осевой линии пружины не перпендикулярна силе P , и поэтому эта сила вызывает в поперечном сечении A изгибающий момент относительно оси n , и крутящий момент. Силу P разлагаем на две составляющие: $P \cos \alpha$, перпендикулярную к касательной в точке A , и $P \sin \alpha$, параллельную касательной в точке A . В поперечном сечении A составляющая $P \cos \alpha$ вызывает крутящий момент, равный

$$M_k = PR \cos \alpha, \quad (a)$$

где R — радиус витковой линии, составляющая $P \sin \alpha$ вызывает изгибающий момент

$$M = PR \sin \alpha. \quad (b)$$

Максимальное главное напряжение (см. т. I, стр. 232) равно

$$\sigma_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + M_k^2}) = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha), \quad (257)$$

где d — диаметр проволоки. Максимальным касательным напряжением является ¹⁾

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_k^2} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (258)$$

Рассмотрим теперь деформацию пружины в предположении, что она закреплена верхним концом и нагружена осевой нагрузкой в нижнем конце. Элемент ds между двумя смежными поперечными сечениями в точке A закручивается крутящим моментом M_k на угол, равный

$$d\varphi = \frac{PR \cos \alpha}{GJ_p} ds. \quad (c)$$

Как результат этого кручения нижняя часть пружины поворачивается вокруг касательной, проведенной у точки A , на угол $d\varphi$. Этот малый поворот представлен на рис. 168 вектором n , отложенным по касательной. Положительное направление вектора таково, что между направлением вектора и направлением вращения существует та же зависимость, что и между перемещением и вращением винта с правой нарезкой. Малый поворот n может быть разложен на две составляющие: 1) поворот $n \cos \alpha$ вокруг горизонтальной оси и 2) поворот $n \sin \alpha$ вокруг вертикальной оси. Последний не вызывает никакого понижения конца пружины и поэтому здесь не рассматривается. Снижение конца B вследствие поворота на $n \cos \alpha$ оценивается так же, как и для пружины с малым шагом витка. В результате этого точка B перемещается в B_1 (рис. 168), и мы имеем $\overline{BB_1} = \overline{AB} n \cos \alpha$. Вертикальная составляющая этого перемещения равна

$$\overline{BB_2} = \overline{BB_1} \frac{R}{AB} = Rn \cos \alpha. \quad (d)$$

Полное опускание конца B вследствие кручения равно сумме элементарных снижений, определенных выражением (d) или

$$\delta_1 = \int_B^C Rn \cos \alpha, \quad (e)$$

где суммирование принято по всей длине пружины от нижнего конца B до верхнего закрепленного конца C .

¹⁾ Если диаметр d проволоки не очень мал по сравнению с диаметром $2R$ винтовой линии, то это значение нужно умножить на поправочный коэффициент, который при $\alpha < 20^\circ$ можно принять таким же, как для пружин с малым шагом витка (т. 1, стр. 247). Дальнейшее изложение этого вопроса дано О. Гёбнером, Z. Ver. den. Ing., т. 76, стр. 269, 1932. См. также Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 391, 1951.

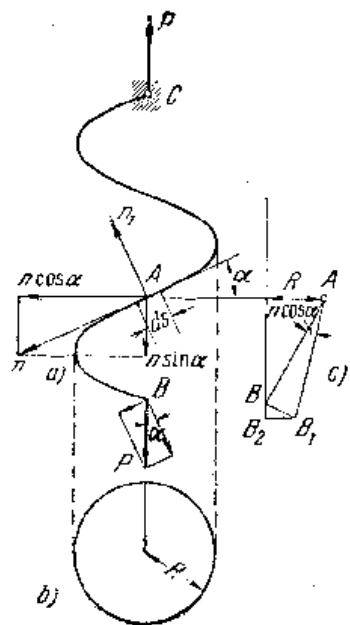


Рис. 168.

Опускание вследствие изгиба можно вычислить таким же способом. Угловое перемещение благодаря изгибу элемента ds моментом M (выражение (b)) равняется

$$d\varphi_1 = \frac{PR \sin \alpha}{EJ} ds. \quad (f)$$

Соответствующее вращение нижней части пружины показано на рис. 168 вектором n_1 . Таким же образом, как и выше, можно показать, что только его горизонтальная составляющая $n_1 \sin \alpha$ вызывает вертикальное перемещение конца B и что величина этого перемещения равна

$$\delta_2 = \int_B^C Rn_1 \sin \alpha. \quad (g)$$

Складывая выражения (e) и (g), получаем полное опускание конца B

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = R \int_B^C (n \cos \alpha + n_1 \sin \alpha).$$

Подставляя выражение (c) вместо n и выражение (f) вместо n_1 , получаем

$$\delta = PR^2 \int_B^C \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right) ds$$

или, замечая, что выражение в скобках постоянно, и обозначая длину проволоки пружины через s , имеем

$$\delta = PR^2 s \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (259)$$

Если диаметр d проволоки не мал по сравнению с $2R$, то жесткость при кручении GJ_p в уравнении (259) должна быть умножена на поправочный коэффициент

$$\beta = 1 + \frac{3 \left(\frac{d}{2R} \right)^3}{16 \left[1 - \left(\frac{d}{2R} \right)^2 \right]}.$$

Этот же коэффициент можно использовать для пружины с квадратным поперечным сечением ¹⁾.

Уравнения (257), (258) и (259) дают полное решение задачи о винтовой пружине с большим шагом витка, подверженной действию осевой силы ²⁾.

Растяжение пружины сопровождается поворотом конца B относительно вертикальной оси винтовой линии. Для того чтобы определить этот поворот, рассмотрим опять деформацию элемента ds на рис. 168, а. Благодаря кручению этого элемента будет происходить вращение нижней части пружины на угол ³⁾

$$n \sin \alpha = \frac{M_k ds}{GJ_p} \sin \alpha.$$

¹⁾ О. Гёбнер, цит. на стр. 242.

²⁾ Теория винтовых пружин была разработана Сен-Венаном; см. Compt. rend., т. 17, стр. 1020, 1843. Ряд частных случаев был рассмотрен Thompson and Taitom, Nat. Phil., ч. 2, стр. 139; I. Perry, Applied Mechanics, New York, стр. 613, 1907; G. W. Shcager, Engineering, т. 93, стр. 206, 1912.

³⁾ Предполагается круговое поперечное сечение проволоки.

Изгиб элемента вызывает угловое перемещение α , (рис. 168, *a*), и результирующий поворот нижней части пружины относительно вертикальной оси будет

$$-\alpha, \cos \alpha = -\frac{M ds}{EJ} \cos \alpha.$$

Следовательно, полный поворот вокруг оси винтовой линии нижней части пружины вследствие деформации элемента ds будет

$$ds \left(\frac{M_k \sin \alpha}{GJ_p} - \frac{M \cos \alpha}{EJ} \right). \quad (b)$$

Сумма этих элементарных поворотов равняется полному углу вращения φ конца B относительно закрепленного конца C пружины:

$$\varphi = s \left(\frac{M_k \sin \alpha}{GJ_p} - \frac{M \cos \alpha}{EJ} \right) = sPR \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ} \right), \quad (260)$$

где s есть полная длина проволоки. В случае других форм поперечного сечения проволоки в формулу (260) нужно подставить соответствующее значение жесткости при кручении C вместо GJ_p .

Осевое кручение. Пусть вектор \overline{AD} представляет крутящий момент M_z , приложенный на конце B пружины (рис. 169). Изгибающий и крутящий моменты, действующие на элемент ds в точке A , будут

$$M = M_z \cos \alpha, \quad M_k = M_z \sin \alpha.$$

Поворот конца B пружины вокруг оси z вследствие деформации элемента ds равен

$$ds \left(\frac{M_k}{GJ_p} \sin \alpha + \frac{M}{EJ} \cos \alpha \right) = M_z ds \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (i)$$

Полный поворот конца B относительно оси z , вызываемый крутящим моментом M_z , равняется

$$\varphi_1 = sM_z \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GJ_p} + \frac{\cos^2 \alpha}{EJ} \right). \quad (261)$$

Так как растягивающая сила P вызывает поворот φ конца B пружины, то из теоремы о взаимности перемещений (см. т. I, стр. 296) можно заключить, что крутящий момент M_z будет вызывать удлинение пружины. Величина δ этого удлинения получается из уравнения

$$P\delta = M_z \varphi,$$

откуда

$$\delta = \frac{M_z}{P} \varphi = M_z sP \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GJ_p} - \frac{1}{EJ} \right). \quad (262)$$

Изгиб в продольной плоскости. Иногда необходимо рассмотреть чистый изгиб винтовой пружины в ее продольной плоскости (рис. 170). Пусть M_b , представленный вектором \overline{AB} (рис. 170, *b*), будет величина изгибающего момента в плоскости уг. Рассматривая элемент ds пружины в точке A , определяемой углом θ , разложим вектор \overline{AB} на две составляющие: $\overline{AC} = M_b \cos \theta$ и $\overline{AD} = M_b \sin \theta$.

Первая составляющая представляет пару сил, которая находится в плоскости, касательной к цилиндрической поверхности радиуса R , и вызывает изгиб проволоки в этой плоскости. Вторая составляющая



Рис. 169.

представляет пару, действующую в продольной плоскости пружины, и может быть разложена на крутящий момент $M_b \sin \theta \cos \alpha$ и изгибающий момент в плоскости витка $M_b \sin \theta \sin \alpha$. Следовательно, элемент ds испытывает изгиб под действием равнодействующего изгибающего момента, равного

$$\sqrt{M_b^2 \cos^2 \theta + M_b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha}, \quad (f)$$

и кручение под действием крутящего момента, равного $M_b \sin \theta \cos \alpha$. Энергия

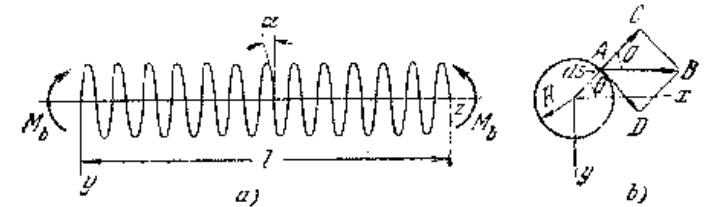


Рис. 170.

деформации элемента, в предположении кругового поперечного сечения проволоки, равняется

$$dU = ds \left[\frac{M_b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \alpha)}{2EJ} + \frac{M_b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right]. \quad (k)$$

Подставляя $ds = R d\theta / \cos \alpha$ и интегрируя от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi n$, где n — число витков, получаем

$$U = \frac{\pi n R}{\cos \alpha} \left[\frac{M_b^2 (1 + \sin^2 \alpha)}{2EJ} + \frac{M_b^2 \cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right]. \quad (l)$$

Угловое перемещение одного конца пружины относительно другого равно l/ρ , где l — длина пружины (рис. 170, *a*) и ρ — радиус кривизны упругой кривой оси пружины. Длина l определяется из выражения

$$l = s \sin \alpha = \frac{2\pi R n}{\cos \alpha} \sin \alpha.$$

Приравняв работу, совершенную изгибающими моментами M_b , энергии деформации (уравнение (l)), получаем

$$\frac{M_b l}{2 \rho} = U,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = M_b \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GJ_p} \right). \quad (263)$$

Следовательно, величина

$$B = \frac{\sin \alpha}{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2EJ} + \frac{\cos^2 \alpha}{2GJ_p}} \quad (m)$$

должна быть принята за жесткость изгиба в случае осевого изгиба винтовой пружины с проволокой кругового поперечного сечения. Если угол α мал, то мы можем допустить с достаточной точностью, что $\sin^2 \alpha = 0$ и $\cos^2 \alpha = 1$. Но так как $\sin \alpha = l/s$, жесткость изгиба винтовой пружины можно

представить формулой

$$B = \frac{2EJ}{s} \frac{1}{1 + \frac{E}{2G}}. \quad (264)$$

При рассмотрении изгиба витковой пружины поперечной нагрузкой (рис. 171) надо принять во внимание не только прогиб, вызываемый изгибающим моментом, но также и прогиб, вызываемый поперечной силой. Предполагая, что конец O пружины заделан в угол α мал, мы найдем перемещение δ_1 верхнего конца A пружины под действием изгибающего момента по обычной формуле для консоли, с подстановкой значения (264) вместо жесткости изгиба. Следовательно,

$$\delta_1 = \frac{Pl^3}{3} \frac{s}{2EJ} \left(1 + \frac{E}{2G}\right). \quad (n)$$

Для выяснения влияния поперечной силы на прогиб рассмотрим искажение одного витка в его плоскости¹⁾, вызванное поперечной силой Q (рис. 172).

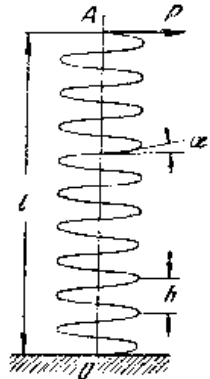


Рис. 171.

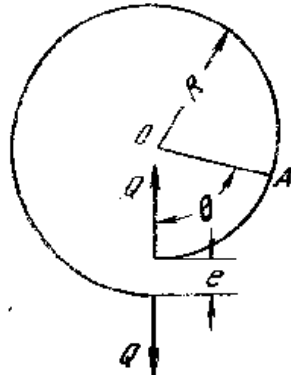


Рис. 172.

Изгибающий момент, возникающий от Q в какой-либо точке A , равен $QR \sin \theta$, а соответствующая энергия деформации одного витка будет равна

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{M^2 R d\theta}{2EJ} = \frac{Q^2 R^3 \pi}{2EJ}.$$

Относительное перемещение e тогда будет

$$e = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\pi QR^3}{EJ}.$$

Разделив это перемещение на шаг h пружины, получаем дополнительный угол наклона γ изогнутой оси благодаря действию поперечной силы

$$\gamma = \frac{e}{h} = \frac{\pi QR^3 n}{EJ}. \quad (o)$$

Формулы, выведенные ранее (см. т. I, н. 39) для прогиба сплошных балок, производимого сдвигом, можно применить к расчету поперечного переме-

щения витковых пружин. Необходимо лишь подставить угол наклона, данный выражением вместо ранее принятого выражения $\alpha Q/FG$. В случае, показанном на рис. 171, поперечная сила постоянна по длине l и равна P , следовательно, прогиб вследствие сдвига равен

$$\delta_2 = \gamma l = \frac{\pi n P R^3}{EJ}. \quad (p)$$

Складывая выражения (n) и (p) и принимая $s = 2\pi Rn$, получаем

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi n P l^2 R}{3EJ} \left(1 + \frac{E}{2G} + \frac{3R^2}{l^2}\right). \quad (265)$$

Последний член в скобках представляет влияние сдвига. Им можно пренебречь, если радиус R пружины мал по сравнению с длиной l ⁴⁾.

⁴⁾ Поперечное выпучивание витковых пружин под действием осевого сжатия рассмотрено в книге: Timoshenko, Theory of Elastic Stability, стр. 165, 1936; русский перевод, 1946, 1955. Там же приведена библиография по этому вопросу.

¹⁾ При этом рассуждении предполагается, что угол α мал.

в котором θ есть угол между осью x и радиусом OA , r — расстояние точки A от O и $k = 1 / \left(a + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$ — коэффициент, зависящий от угла 2α клина.

Распределение нормальных напряжений σ_x по какому-либо поперечному сечению mn , перпендикулярному оси симметрии клина, является неравномерным. Пользуясь уравнением (17) т. I, стр. 41, и подставляя $r = \frac{a}{\cos \theta}$ в формулу (а), находим

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = \frac{kP \cos^4 \theta}{\rho h} \quad (b)$$

Это показывает, что нормальное напряжение является наибольшим в центре поперечного сечения ($\theta = 0$) и наименьшим при $\theta = \alpha$. Разность между наибольшим и наименьшим напряжениями увеличивается с увеличением угла α . При $\alpha = 10^\circ$ эта разность составляет около $60/100$ от среднего напряжения, получаемого путем деления нагрузки P на площадь поперечного сечения mn . Аналогичные заключения можно также вывести для конического стержня. Можно показать, что распределение нормальных напряжений по поперечному сечению приближается к равномерному, если угол конуса уменьшается.

Эти рассуждения показывают, что предположение о равномерном распределении нормальных напряжений по поперечному сечению призматического стержня дает удовлетворительные результаты, если изменение поперечного сечения по длине стержня происходит не резко. Однако условия будут совершенно отличны, когда имеются резкие изменения в поперечном сечении. В таких местах распределение напряжений весьма далеко от равномерного, и результаты, полученные при допущении равномерного распределения напряжений, совершенно неправильны. В следующих параграфах будет рассмотрено несколько примеров резкого изменения поперечного сечения.

56. Напряжения в пластинке с круглым отверстием

Если в пластинке, подвергнутой действию равномерно растягивающих напряжений σ , сделано малое круглое отверстие¹⁾, то в точках m (рис. 174, а) имеет место высокая концентрация напряжений. Точная теория²⁾ показывает, что растягивающее напряжение в этих точках равняется 3σ . Теория также показывает, что эта концентрация носит чисто местный характер и ограничивается непосредственной близостью к отверстию. Если начертить концентрический круг с отверстием и при этом сравнительно большого радиуса c , как показано на рис. 174, а пунктиром, можно предположить, что на напряженное состояние по окружности этого круга наличие отверстия не оказывает существенного влияния. Пусть рис. 174, б представляет круглое кольцо, вырезанное из пластинки круглой цилиндрической поверхностью радиуса c . В каждой точке наружной поверхности этого кольца мы приложим вертикально направленные напряжения величиной $\sigma \cdot \sin \varphi$, равные напряжению на соответствующей элементарной площадке dF пластинки (см. уравнение (16) т. I, стр. 40). Тогда напряжения в кольце будут приблизительно

ГЛАВА VIII

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

55. Концентрация напряжений в растянутых или сжатых элементах

При изучении простого растяжения или сжатия предполагалось, что стержень был призматической формы. Тогда для центрально приложенных сил напряжения будут равномерно распределены по поперечному сечению. Равномерное распределение напряжений предполагалось также в случае стержня переменного поперечного сечения (см. рис. 14 т. I, стр. 24), но это есть приближение, которое дает удовлетворительные результаты лишь в том случае, когда изменение поперечного сечения происходит постепенно. Резкие изменения поперечного сечения вызывают большие неправильности в распределении напряжений. Эти неправильности имеют особенно важное значение при проектировании машинных частей, подверженных действию переменных внешних сил и знакопеременных напряжений. Неправильности в распределении напряжений сводятся к тому, что в некоторых точках напряжения значительно выше среднего значения и под действием знакопеременных напряжений возможно образование все возрастающих трещин. Большинство поломок машинных частей во время работы можно приписать таким прогрессирующим трещинам.

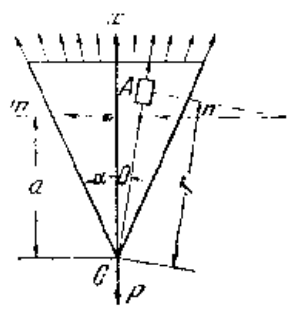


Рис. 173.

Для иллюстрации распределения напряжений в стержне переменного поперечного сечения, находящегося под действием растягивающих сил, рассмотрим симметричный клин постоянной толщины h , нагруженный, как показано на рис. 173. Точное решение показывает (см. сноску 2) стр. 249), что здесь будет простое радиальное распределение напряжений. Элемент в радиальном направлении в какой-либо точке A находится в условиях простого

радиального растяжения. Величина этого радиального растягивающего напряжения дается уравнением

¹⁾ Диаметр отверстия меньше, скажем, 1/5 ширины пластинки.
²⁾ Эта теория была предложена Кітс-Сі'ом, Z. Ver. deut. Ing., 1898. См. также Тимошенко and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 78, 1951; Русский перевод, 1937, стр. 107.

также же, как в части пластинки, ограниченной окружностью радиуса c (рис. 174, а). Таким образом, задача о распределении напряжений

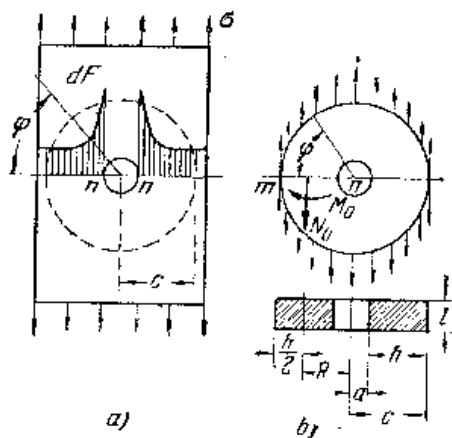


Рис. 174.

вблизи отверстия в пластинке сводится к задаче о круглом кольце прямоугольного поперечного сечения, подверженном действию вертикальной нагрузки интенсивности $\tau \sin \varphi$, непрерывно распределенной по его внешнему контуру¹⁾. Эта задача может быть решена методом, изложенным в т. I, стр. 319. Рассматривая один квадрант кольца, сводим напряжения, действующие по поперечному сечению mn , к продольной растягивающей силе N_0 , приложенной в центре тяжести поперечного сечения, и к изгибающей паре M_0 . Продольная сила может быть определена из уравнения статики и равняется

$$N_0 = \pi c. \quad (a)$$

Момент M_0 является статически неопределимой величиной и вычисляется при помощи теоремы о наименьшей работе. Для вычисления

потенциальной энергии применяется выражение (228) т. I, стр. 322, для которого продольная сила и изгибающий момент в произвольном поперечном сечении кольца, определяемом углом φ (рис. 174, б), будут $N = \pi c \cos^2 \varphi$;

$$M = M_0 + \pi c \left(1 - \cos \varphi\right) \left[\frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) + \frac{h}{2} \cos \varphi \right] - \pi c \left(c - \frac{h}{2}\right) (1 - \cos \varphi). \quad (b)$$

Здесь h — высота прямоугольного поперечного сечения. Тогда

$$\frac{dU}{dM_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{M d\varphi}{FEe} - \int_0^{\pi/2} \frac{N d\varphi}{FE} = 0,$$

откуда после интегрирования получаем

$$M_0 = \frac{2\pi c^2}{\pi} \left[1 - \frac{3}{8} \pi - \frac{h}{2c} \left(1 - \frac{1}{4} \pi\right) + \frac{e\pi}{4c} + \frac{R}{2c} (\pi - 2) \right]. \quad (c)$$

Здесь по-прежнему R — радиус осевой линии и e — расстояние нейтральной оси от центра тяжести поперечного сечения.

Напряжение в точке n поперечного сечения mn кольца состоит из двух частей: 1) растягивающего напряжения, вызываемого продольной силой N_0 и равного

$$\sigma_1 = \frac{N_0}{h} = \frac{\pi c}{h}, \quad (d)$$

и 2) напряжения от изгиба, вызываемого M_0 , которое на основании формулы (212) т. I, стр. 308, равняется

$$\sigma_2 = \frac{M_0 \left(\frac{h}{2} - e\right)}{F e a} = \frac{M_0}{2 e a} \left(1 - \frac{2e}{h}\right), \quad (e)$$

где a — радиус отверстия.

¹⁾ Толщина пластинки предполагается равной единице.

Расстояние e вычисляется (см. т. I, п. 79, стр. 311) для различных значений отношения c/a , и тогда величины σ_1 и σ_2 определяются из формул (d) и (e). Наибольшее напряжение равняется

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Результаты этих вычислений приведены в табл. 18.

Таблица 18

Значения местных напряжений в пластинке у круглого отверстия

c/a	3	4	5	6	8	10
$2e/h$	0,1796	0,2238	0,2574	0,2838	0,3239	0,3536
σ_1/σ	1,50	1,33	1,25	1,20	1,14	1,11
σ_2/σ	2,33	1,93	1,83	1,83	1,95	2,19
σ_{\max}/τ	3,83	3,26	3,08	3,03	3,09	3,30

Сравнение цифр последней строки табл. 18 с точным решением $\sigma_{\max} = 3\tau$ для очень малого отверстия показывает, что при $5 < c/a < 8$ результаты приближенного вычисления хорошо согласуются с точным решением. Когда $c/a < 5$, отверстие нельзя рассматривать очень малым, и оно имеет заметное влияние на распределение напряжений по кругу радиуса c (рис. 174, а), в котором наше допущение относительно распределения сил по внешнему контуру кольца (рис. 174, б) не является вполне точным. Отклонение от точной теории для $c/a > 8$ объясняется недостаточной точностью элементарной теории кривых брусков для случая, когда внутренний радиус очень мал по сравнению с наружным. Взяв какую-либо точку в поперечном сечении mn (рис. 174, б) на расстоянии r от центра отверстия, найдем из точной теории, что нормальное напряжение в этой точке равняется

$$\frac{\sigma}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right), \quad (f)$$

где τ есть равномерное растягивающее напряжение, приложенное к концам пластинки. Это распределение напряжений показано на рис. 174, а заштрихованными площадями. Видно, что концентрация напряжений в этом случае имеет сугубо местный характер. В точках n , т. е. при $r = a$, мы имеем $\sigma_{\max} = 3\tau$. Напряжения быстро уменьшаются, когда расстояние от этой перенапряженной точки увеличивается; на расстоянии от края отверстия, равном радиусу отверстия, т. е. при $r = 2a$, мы получаем из уравнения (f) нормальное напряжение, равное $1 \frac{7}{32} \sigma$. Напряжение также быстро уменьшается с увеличением угла φ (рис. 174, б); и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. для сечения, параллельного приложенным растягивающим напряжениям τ , мы находим на краю отверстия сжимающее напряжение в окружном направлении, равное растягивающему напряжению τ , приложенному на концах пластинки.

Если вместо растяжения мы имеем сжатие пластинки (рис. 175, а), то должны лишь изменить знак напряжений, полученных в предыдущем изложении, и мы заключаем, что в точках n будет сжимающее напряжение величиной 3τ , а в точках m — растягивающее напряжение величиной τ . В случае хрупкого материала, как, например, стекло, которое очень прочно при

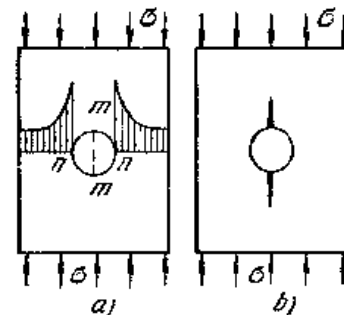


Рис. 175.

сжатии и слабо при растяжении, трещины обычно начинаются в точках m , как показано на рис. 176, б.

Имея напряжения для простого растяжения и сжатия и пользуясь методом наложения, мы легко получим концентрацию напряжений для случая *сложного растяжения или сжатия* в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Например, в случае, показанном на рис. 176, мы найдем, что

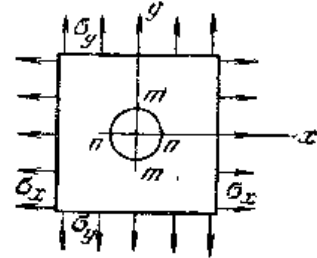


Рис. 176.



Рис. 177.

тангенциальное напряжение в точках n равняется $3\sigma_y - \sigma_x$, а в точках m напряжение равняется $3\sigma_x - \sigma_y$. В частном случае чистого сдвига мы имеем $\sigma_x = -\sigma_y = \tau$ и получаем для точек n напряжение -4τ , а для точек m напряжение $+4\tau$; таким образом, в этом случае наибольшее напряжение в четыре раза больше напряжений, приложенных по краям пластинки. Такое условное большое значение концентрации напряжений получается при кручении тонкостенной круглой трубы с малым круглым отверстием (рис. 177). Если приложенный крутящий момент имеет направление, указанное на рисунке, то наибольшее растягивающее напряжение, которое в четыре раза больше касательных напряжений, приложенных на конце, вызывается на краю отверстия в точках, отмеченных знаком плюс. В точках, отмеченных знаком минус, возникает сжимающее напряжение такой же величины.

Приближенный метод, описанный выше для вычисления напряжений у круглого отверстия, можно также применить для случая отверстия с ребордой (рис. 178). Результаты этого вычисления¹⁾ при $\frac{b}{t_1} = 11$, $\frac{t}{2a} = 0,01$ дают следующие значения отношений σ_{\max}/σ для различных значений a/a :

$a/a = 4$	5	6
$\sigma_{\max}/\sigma = 2,56$	2,53	2,56

В рассматриваемой области отношение σ_{\max}/σ изменяется, но незначительно, с изменением a/a , так что дальнейшие вычисления будут проделаны только для случая $a/a = 5$. Влияние площади поперечного сечения реборды на σ_{\max} можно изучить путем изменения размера b реборды. Если $F_2 = 2t_1 a$ означает уменьшение поперечного сечения пластинки вследствие наличия отверстия и $F_2 = (b - t_1) t$ означает площадь поперечного сечения реборды, то отношение σ_{\max}/σ для некоторых значений отношения F_2/F_1 дано ниже:

$F_2/F_1 = 0,10$	0,20	0,30	0,40	0,50
$\sigma_{\max}/\sigma = 2,53$	2,17	1,90	1,69	1,53

¹⁾ Рассмотрение этой задачи дано в статье автора, J. Franklin Inst., т. 197, стр. 505, 1924. Предполагается, что все поперечное сечение реборды является полезным. О дальнейшем исследовании задач см. L. Beskijn, J. Appl. Mech., т. II, стр. 140, 1944. См. также C. Guilleu, Air Ministry Repts. and Mem. (London) № 1831, 1938.

Приведенные числовые данные можно применить также в случае других форм поперечного сечения реборды при условии, что размер t реборды в радиальном направлении можно рассматривать малым по сравнению с радиусом a отверстия. Возьмем, например, широкоугольную пластинку, подверженную растяжению, толщиной 10 мм, с круглым отверстием диаметром 1 м. Пусть край отверстия усилен двумя уголками $100 \times 100 \times 10$ мм. В таком случае $F_2/F_1 = 0,40$, и вышеприведенная таблица дает $\sigma_{\max}/\sigma = 1,69$.

57. Другие случаи концентрации напряжений в растянутых элементах

Имеется лишь немного случаев, в которых, как в случае круглого отверстия, задача о концентрации напряжений строго теоретически решена¹⁾. В большинстве случаев сведения относительно наибольших напряжений в точках резкого изменения поперечного сечения получаются из опытов²⁾. В дальнейшем изложении представлены лишь некоторые окончательные результаты теоретических и экспериментальных исследований, которые могут иметь практическое значение³⁾.

В случае малого *эллиптического отверстия* в пластинке⁴⁾ (рис. 179, а) наибольшее напряжение будет на концах горизонтальной оси отверстия; оно определится формулой

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (a)$$

где σ — растягивающее напряжение, приложенное на концах пластинки. Это напряжение увеличивается с возрастанием отношения a/b , так что очень узкое отверстие, перпендикулярное к направлению растяжения, вызывает большую концентрацию напряжений. Этим объясняется, почему трещины, перпендикулярные к направлению приложенных сил, имеют тенденцию к распространению. Это распространение может быть остановлено путем высверливания отверстий на концах трещины для того, чтобы устранить острые углы, которые вызывают высокую концентрацию напряжений.

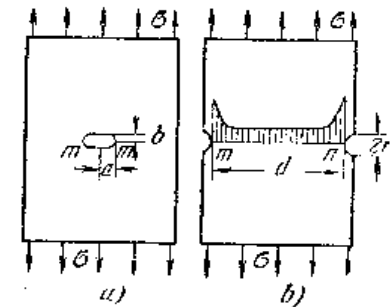


Рис. 179.

¹⁾ Теоретические решения задач о концентрации напряжений для отверстий различной формы даны в книге Г. Н. Савина «Концентрация напряжений у отверстий», 1951.

²⁾ Различные экспериментальные методы для определения наибольших напряжений описаны в шп. 61 и 62. См. также E. Leffig, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen, 1934.

³⁾ Весьма полное собрание сведений относительно концентрации напряжений дано в книге R. E. Peterson, Stress Concentration Design Factors, 1953.

⁴⁾ См. Г. Колосов, Диссертация, 1910, Петербург; см. также C. E. Inglis, Engineering, т. 95, стр. 415, 1913 и Trans. Inst. Naval Architects, 1913.

Малые полукруглые выточки¹⁾ в пластинке, подверженной растяжению (рис. 179, б), также вызывают высокую концентрацию напряжений. Опыты²⁾ показывают, что в точках *m* и *n* напряжения

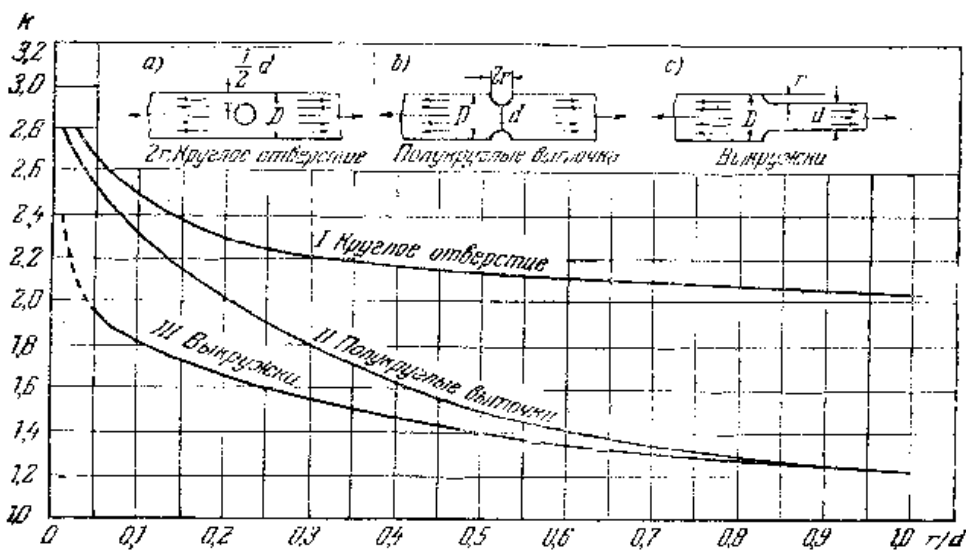


Рис. 180.

приблизительно в три раза больше напряжений, приложенных по концам пластинки, если радиус *r* выточки весьма мал по сравнению с

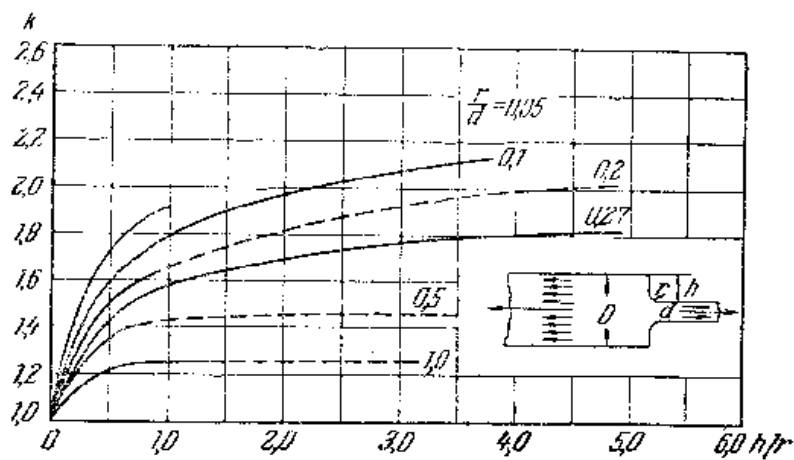


Рис. 181.

шириной *d* наименьшего сечения. Вообще наибольшее напряжение в точках *m* и *n* является функцией отношения *r/d*. Отношение наиболь-

¹⁾ О теоретическом решении этой задачи см. статью F. G. Mairseil'a, Phil. Mag., т. 21, стр. 765, 1936.

²⁾ См. M. M. Frocht, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 67, 1935.

шего напряжения к среднему напряжению в наименьшем сечении *m* обычно называется коэффициентом концентрации напряжений и обозначается через *k*. Значения *k* для различных значений отношений *r/d* даны на рис. 180 кривой II¹⁾. На том же рисунке даны также коэффициенты концентрации напряжений для случая круглого отверстия (кривая I) и для случая выкружки (кривая III). На рис. 181 приве-

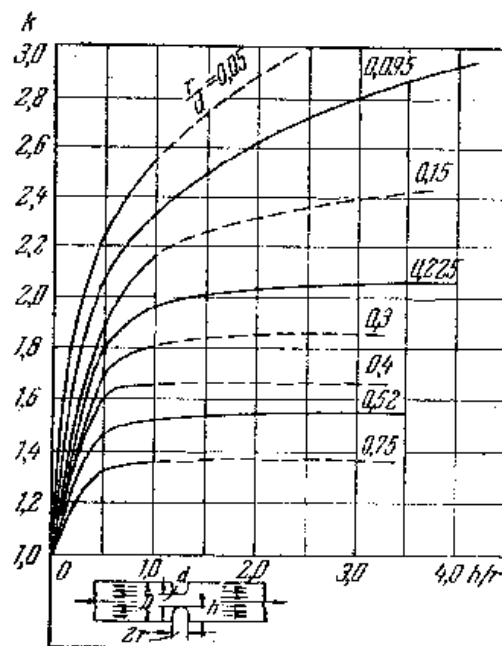


Рис. 182.

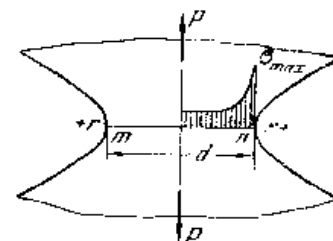


Рис. 183.

Случай пластинки весьма большой ширины с гиперболическими выточками (рис. 183) можно исследовать теоретически³⁾. Решение показывает, что коэффициент концентрации напряжений, т. е. отношение наибольшего напряжения в точках *m* и *n* к среднему растягивающему напряжению по поперечному сечению *m* можно представить следующей приближенной формулой⁴⁾:

$$k = \sqrt{0,8 \frac{d}{r} + 1,2} - 0,1, \quad (b)$$

где *d* — ширина наименьшего сечения и *r* — радиус кривизны дна выточки. Интересно отметить, что значения *k*, получаемые из этой формулы, весьма хорошо согласуются с результатами опытов, полученных для глубоких выточек ($h/r = 4$), полукруглых на дне (рис. 182).

⁵⁾ Кривые, приведенные в последующем изложении, взяты из статьи M. M. Frocht'a, там же (см. стр. 254).

³⁾ П. Neuber, Z. angew. Math. u. Mech., т. 13, стр. 439, 1933. См. также книгу: Neuber, Kerbspannungslehre, 1937.

⁴⁾ В выражениях (b), (c) и (d) коэффициент Пуассона взят равным 0,3.

Предположим теперь, что рис. 183 представляет собой продольное сечение круглого цилиндра большого диаметра с глубокой выточкой гиперболического профиля, находящегося под действием осевого растяжения. Наибольшее растягивающее напряжение опять имеет место на дне выточки, и значение коэффициента концентрации напряжений будет ¹⁾

$$k = \sqrt{0,5 \frac{d}{r} + 0,85 + 0,08}. \quad (c)$$

Сравнение этой формулы с формулой (b) показывает, что в случае цилиндра с выточкой концентрация напряжений меньше, чем в случае пластинки. Дальнейшее обсуждение этого сравнения дано ниже (см. п. 60).

В случае растянутого цилиндра с эллипсоидальной полостью на оси, для которого рис. 179, а можно рассматривать как продольное сечение, наибольшее растягивающее напряжение имеет место в точках *m*. Его значение дает следующая приближенная формула:

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(\sqrt{0,8 \frac{a}{r} + 0,05} + 0,78 \right), \quad (d)$$

где σ — равномерное растягивающее напряжение, приложенное по концам цилиндра, и r — радиус кривизны эллипса в точках *m*.

Стандартный образец для испытания на растяжение цемента (рис. 184) представляет другой пример растянутого элемента с резким изменением поперечного сечения. Опыты показывают²⁾, что наибольшее напряжение имеет место в точках *m* и *n* и что это напряжение приблизительно в 1,75 раза больше среднего напряжения по поперечному сечению *mn*.

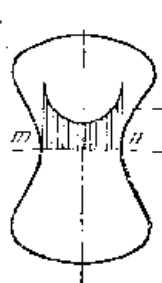


Рис. 184.

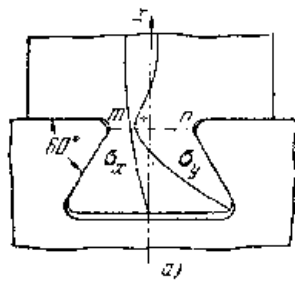


Рис. 185.

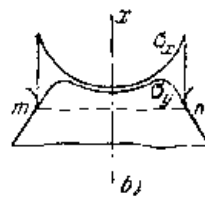


Рис. 185 представляет соединение в виде ласточкиного хвоста, которое часто применяется в электрических машинах для удержания магнитных полюсов в ободу якоря. Центробежная сила, действующая на полюс, вызывает по поперечному сечению *mn* большие растягивающие напряжения. Распределение этих напряжений показано на рис.

185, б¹⁾. Вследствие резкого изменения поперечного сечения в точках *m* и *n* имеет место высокая концентрация напряжений. Растягивающие напряжения σ_x сопровождаются напряжениями σ_y в поперечном направлении. Распределение этих напряжений по *mn* показано на рис. 185, б, а распределение их по вертикальной плоскости симметрии показано на рис. 185, а.

Все предыдущие выводы относительно распределения напряжений сделаны в предположении, что наибольшие напряжения не превосходят предела пропорциональности материала. За пределом пропорциональности распределение напряжений зависит от *пластичности* материала. *Пластический материал* может испытывать за пределом текучести значительное удлинение без большого увеличения напряжения. Благодаря этому обстоятельству при дальнейшем растяжении материала за пределом текучести распределение напряжений получается все более и более равномерным. Этим объясняется, почему при статическом испытании образцы из пластического материала отверстия и выточки не понижают *предела прочности*. Более того, при испытании образцов из мягкой стали с глубокими выточками обычно получается некоторое увеличение предела прочности благодаря тому обстоятельству, что выточки препятствуют образованию шейки образца в месте разрыва (см. гл. X).

Однако в случае *хрупкого материала*, как, например, стекло, высокая концентрация напряжений сохраняется до момента разрушения. Это оказывает существенно ослабляющее влияние на прочность, что подтверждается уменьшением предела прочности брусков из хрупких материалов с любыми подрезами. Интересно отметить, что очень тонкие царапины на поверхности образца, изготовленного из стекла, не вызывают уменьшения прочности, хотя на дне царапины должна быть весьма большая концентрация напряжений²⁾. Для объяснения этого явления предполагают, что обыкновенное стекло в своем естественном состоянии имеет множество внутренних микроскопических трещин, и немного дополнительных трещин на поверхности не изменяет прочности образца.

Таким образом, предыдущие рассуждения показывают, что применение выточек и входящих углов при проектировании требует большой осмотрительности. В случае пластического материала, как, например, строительной стали, большая концентрация напряжений не опасна при условии, что нет переменных напряжений. Например, в

¹⁾ См. статью E. G. Coker, J. Franklin Inst., т. 199, стр. 289, 1925. Т-образные головки, которые также имеют частное применение при проектировании машин, были испытаны M. H. Tenney, J. Appl. Mech., т. 6, стр. 151, 1939.

²⁾ Это явление было исследовано A. A. Griffith'ом, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 221, стр. 163, 1920. См. также статью: L. N. Sneddon, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 187, стр. 229, 1946.

¹⁾ H. Neuber, Z. angew. Math. u. Mech., см. сноску стр. 255.

²⁾ См. E. G. Coker, Proc. Congr. Internat. Assoc. Testing Materials, N. Y., 1913.

соединении ласточкиным хвостом, показанном на рис. 185, напряжения очень часто бывают настолько высокими, что происходит текучесть в точках m и n , но эта текучесть не считается опасной, потому что конструкция подвергается действию постоянной силы. В случае хрупкого материала значительно уменьшают прочность те точки, в которых имеет место концентрация напряжений, и такие места должны быть устранены, или концентрация напряжений должна быть уменьшена при помощи соответствующих размеров выкружек.

В элементах, изготовленных даже из пластических материалов, но подверженных действию повторных усилий, необходимо принимать во внимание влияние концентрации напряжений, так как в перенапряженных точках появляются трещины, которые стремятся к дальнейшему расширению (см. п. 87).

58. Концентрация напряжений при кручении

При рассмотрении кручения стержней переменных поперечных сечений (см. пп. 46 и 47) указывалось, что входящие углы или другие резкие изменения в контуре поперечного сечения вызывают большую концентрацию напряжений. Продольные отверстия производят подобный эффект.

В качестве первого примера рассмотрим случай наличия *малого круглого отверстия* в скручиваемом круглом вале ¹⁾ (рис. 186).

При исследовании этого вопроса весьма полезно применить *гидродинамическую аналогию* ²⁾. Задача кручения стержней постоянного поперечного сечения математически идентична с задачей движения *совершенной жидкости*, перемещающейся с постоянной угловой скоростью внутри цилиндрической оболочки, имеющей такое же поперечное сечение, как и стержень. Окружная скорость циркулирующей жидкости в какой-либо точке может быть принята за изображение касательного напряжения в той же

точке поперечного сечения скручиваемого стержня. Влияние малого отверстия в валу кругового поперечного сечения подобно тому, какое окажет сплошной цилиндр тех же размеров, введенный в поток гидродинамической модели. Такой цилиндр значительно изменяет скорости жидкости в непосредственной близости от себя. Скорости в передних

¹⁾ Этот случай был исследован J. Lagrange'ом, Phil. Mag., т. 33, стр. 76, 1892.

²⁾ Эта аналогия была разработана Lord'ом Kelvin'ом and Tait'ом, Natural Philosophy, т. 2; J. Boussinesq'ом, J. math. (Liouville), т. 16, 1871; A. G. Greenhill'ом, статья «Hydro-mechanics», Encyclopaedia Britannica, изд. 9. Относительно приложения аналогии в опытах см. статью: J. P. Den Hartog and J. G. McGivern, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 46, 1935.

и задних точках обращаются в нуль, в то время как в боковых точках m и n они удваиваются, следовательно, отверстие такого рода удваивает наибольшее напряжение в той части вала, где оно расположено. Малая *полуокруглая* канавка, на поверхности вала, параллельная его длине (рис. 186), оказывает то же влияние. Касательные напряжения вблизи точки m будут почти в два раза больше касательных напряжений, вычисленных для точек на поверхности вала, значительно удаленных от канавки.

Та же гидродинамическая аналогия объясняет влияние отверстия *эллиптического поперечного сечения* или *канавки полуэллиптического поперечного сечения*. Если одна из главных осей эллипса равна a и расположена в радиальном направлении, а другая равна b , то напряжения у краев отверстия на концах оси a увеличиваются в отношении $[1 - a/b]:1$. Таким образом, наибольшие напряжения, возникающие в этом случае, зависят от величины отношения a/b . Влияние эллиптического отверстия на величину напряжений будет больше в том случае, когда большая ось эллипса имеет радиальное направление, а не направление касательной к окружности. Этим объясняется, почему радиальные трещины оказывают такое вредное влияние на прочность вала. Подобные рассуждения можно применить также и в случае полуэллиптической канавки на поверхности вала, параллельной его оси.

В случае *шпоночной канавки* с острыми углами (рис. 187) гидродинамическая аналогия указывает на то, что скорости циркулирующей жидкости в наружных углах (точки $m - m$) равны нулю; следовательно, касательные напряжения, соответствующие вращению, равны нулю в тех же углах. В точках $n - n$, т. е. в вершинах входящих углов, скорости циркулирующей жидкости теоретически равны бесконечности. В соответствующей задаче кручения касательные напряжения в точках $n - n$ также равны бесконечности; это значит, что незначительный крутящий момент будет вызывать в этих точках остаточные деформации. Такая концентрация напряжений может быть уменьшена путем закругления углов $n - n$.

Опыты, произведенные ¹⁾ над полым валом, имеющим внешний диаметр 25,4 см, внутренний диаметр 14,73 см, глубину шпоночной канавки 2,54 см, ширину шпоночной канавки 6,35 см и радиус закругления в вершинах углов канавки r , показали, что наибольшее напряжение в закругленных углах равняется наибольшему напряжению в таком же валу без канавки, умноженному на коэффициент k , значения которого даны в табл. 19.

¹⁾ См. сборник работ The Mechanical Properties of Fluids, New York, D. Van Nostrand Company, Inc., стр. 245, 1924.

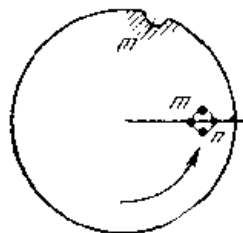


Рис. 186.

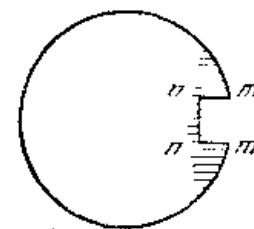


Рис. 187.

Таблица 19

Значения коэффициента k при выкружках
разных радиусов

r (см) =	0,25	0,51	0,76	1,01	1,27	1,52	1,78
k =	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

Эта таблица показывает, что концентрация напряжений может быть значительно уменьшена путем увеличения радиуса в вершинах углов n .

Ослабляющее влияние концентрации напряжения в валах вследствие наличия отверстий и выточек зависит от того, пластичен ли материал или нет, и выводы, сделанные в предыдущем параграфе, применимы также и здесь.

Если трубчатый элемент имеет входящие углы, то концентрация напряжений будет зависеть от радиуса углов. Приближенное значение этого наибольшего напряжения можно получить по мембранной аналогии. Рассмотрим простой пример трубы постоянной толщины и предположим, что угол ограничивается двумя концентрическими окружностями (рис. 188) с центром в точке O и радиусами r_i и r_a . Поверхность мембраны в поперечном сечении можно рассматривать¹⁾ как поверхность вращения с осью, перпендикулярной плоскости рисунка в точке O . Мы видим, что наклон мембранной поверхности в какой-либо точке M численно равен касательному напряжению τ . Обращаясь к рис. 189, который показывает меридиональное сечение, проходящее через mn , находим, что главные кривизны

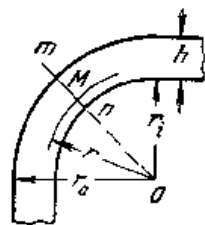


Рис. 188.

мембраны в этой точке будут $\frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\tau}{dr}$ для меридионального сечения (принимая элемент ds по меридиану равным dr) и $\frac{1}{R_2} = \frac{\tau}{r}$ для сечения, перпендикулярного меридиану. Тогда уравнение равновесия мембраны на основании уравнения (122) стр. 104 будет

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = \frac{p}{S},$$

или на основании соотношения (а), стр. 198

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 2G\theta. \quad (а)$$

¹⁾ Это предположение удовлетворяется при условии, что r_i не мало по сравнению с r_a .

Пусть τ_0 означает среднее касательное напряжение, полученное из выражения (226). Тогда из выражения (227) найдем

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = 2G\theta = \frac{\tau_0 s}{F}, \quad (b)$$

где s — длина осевой линии сечения трубчатого элемента. Общее решение уравнения (b) будет

$$\tau = \frac{C}{r} + \frac{\tau_0 sr}{2F}. \quad (c)$$

Постоянная интегрирования C получится из условия¹⁾

$$\int_{r_i}^{r_a} \tau dr = \tau_0 h.$$

Подставляя выражение (c) вместо τ , находим

$$C = \tau_0 h \frac{1 - \frac{s}{4F}(r_a + r_i)}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

и из решения (c) получаем

$$\tau = \frac{\tau_0 h}{r} = \frac{1 - \frac{s}{4F}(r_a + r_i)}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \frac{\tau_0 sr}{2F}. \quad (266)$$

Во входящих углах $r = r_i$, подставляя это значение в формулу (266), мы можем вычислить наибольшее напряжение в этих углах²⁾. Возьмем, например, квадратную трубку (рис. 190) с наружными размерами 10×10 см, толщиной стенок $h = 1$ см и радиусами в углах $r_i = 0,5$ см, $r_a = 1,5$ см. Тогда

$$F = 9 \cdot 9 - 1^2(4 - \pi) = 80,14 \text{ см}^2,$$

$$s = 4 \cdot 9 - 1(8 - 2\pi) = 34,28 \text{ см}.$$

Среднее напряжение τ_0 определяется по формуле (226). Напряжение же во входящих углах по формуле (266) равняется $\tau = 1,54 \tau_0$. Коэффициент концентрации напряжений в этом случае равен 1,54. Можно видеть, что этот коэффициент увеличивается с уменьшением внутреннего радиуса r_i .

Формулой (226) можно пользоваться также для приближенного вычисления напряжений в том случае, когда закруглен лишь входящий угол (рис. 190, б). Так как напряжения малы в выступающих углах, то мы можем принять $r_a = h + r_i$, как показано на рисунке пунктиром.

¹⁾ Это условие вытекает из гидродинамической аналогии (стр. 258). Если жидкость движется в канале, имеющем форму поперечного сечения трубчатого стержня, то ее количество, протекающее через любое поперечное сечение канала, должно оставаться постоянным.

²⁾ Такая формула дана С. Вебст'ом, цит. на стр. 213.

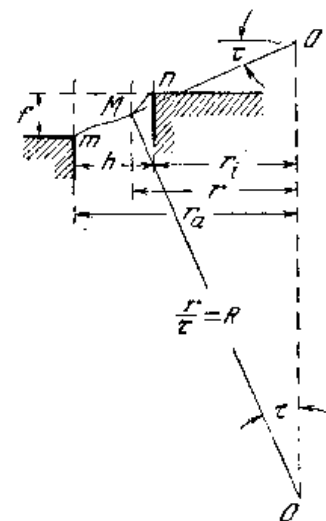


Рис. 189.

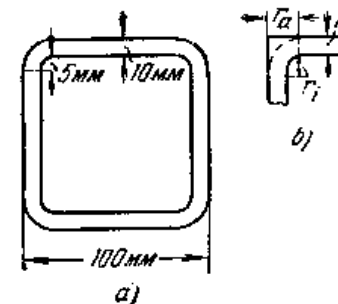


Рис. 190.

В случае прокатных профилей, таких, какие показаны на рис. 144, *b* и 144, *c*, стр. 204, наибольшее напряжение имеет место во входящих углах. Его значение получается путем умножения напряжения, вычисленного по формулам (222) или (225) (см. стр. 201, 205), на коэффициент концентрации, для которого можно воспользоваться выражением¹⁾

$$k = 1,74 \sqrt{\frac{c}{r}}, \quad (267)$$

в котором c — толщина полки и r — радиус выкружки. Более сложные вычисления дают для коэффициента концентрации

напряжений значения, представленные на рис. 191 кривой *AB*²⁾.

59. Круглые валы переменного диаметра³⁾

Если диаметр вала постепенно изменяется по его длине, то наибольшее напряжение можно получить с достаточной точностью при помощи формулы (152) г. I, стр. 241, выведенной для цилиндрического вала. Но если изменение диаметра происходит резко, как показано на рис. 192, то в точках *m — m*, т. е. у начала выкружек, имеет место большая концентрация напряжений. Величина наибольшего напряжения зависит от отношений ρ/d и D/d , где ρ есть радиус выкружки, а d и D — диаметры двух цилиндрических участков вала.

¹⁾ E. Trefftz, Z. angew. Math. u. Mech., т. 2, стр. 263, 1922. Формула (267) выведена для угла, для которого смежные части имеют одинаковую толщину, как на рис. 144, *b*. В случае разной толщины c_1 и c_2 , как на рис. 144, *c*, в формуле (267) нужно принять большую толщину. Дальнейшее обсуждение этого вопроса дано H. M. Westergaard'ом and R. D. Mindlin'ом, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., стр. 509, 1935.

²⁾ См. статью: J. H. Nutt, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 388, 1950. Результаты вычислений Nutt'a очень хорошо согласуются с результатами опытов N. S. Wang'a и W. W. Sokol'a, полученными путем проведения листовой аналогии; см. Proc. Soc. Exp. Stress Anal. т. 11, стр. 19, 1953.

³⁾ Общее решение этой задачи принадлежит J. H. Michell'у, Proc. London Math. Soc., т. 31, 1899 и A. Förrer, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wissensch., т. 35, стр. 249, 1905. Случай, показанный на рис. 192, был рассмотрен впервые A. Förrer'ом, см. Z. Ver. deut. Ing., стр. 1032, 1906. Литература по этому вопросу приводится в книге: Timoshenko and Goodier, Theory of Elasticity, стр. 310, 1951; русский перевод, стр. 305, 1937.

Эти высокие местные напряжения, хотя и не опасные для статического нагружения вала из пластического материала при постоянной нагрузке, могут оказывать значительное влияние на понижение прочности в случае переменных усилий, какие наблюдаются в пропеллерных и колесчатых валах. Большинство поломок, происшедших во время работы, можно объяснить этой причиной. Теоретическое определение наибольшего напряжения в выкружке слишком сложно¹⁾ для практических целей, и поэтому ниже изложен экспериментальный метод определения наибольшего напряжения. Этот метод основан на аналогии между распределением напряжений в скручиваемом валу и распределением электрического тока в пластинке²⁾.

Рассмотрим сначала круглый вал постоянного диаметра. Представим себе такой вал разделенным на такие элементарные трубочки,

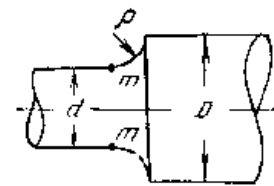


Рис. 192.

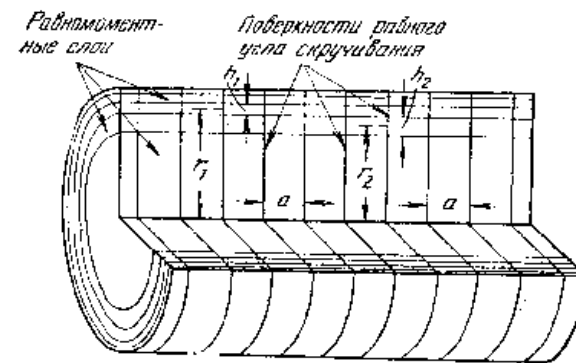


Рис. 193.

что каждая воспринимает одинаковую часть полного крутящего момента M_k . Например, на рис. 193 вал разделен на пять частей, каждая из которых несет $1/5 M_k$. Эти трубочки будем называть *трубочками равного момента*, а соответствующие линии диаметрального сечения вала — *линиями равного момента*. Обозначим через ΔM_k крутящий момент, приходящийся на трубочку, и допустим, что толщина каждой трубочки мала. Тогда угол закручивания на единицу длины, одинаковый для всех трубочек, будет равен

$$\theta = \frac{\Delta M_k}{GJ_p} = \frac{\Delta M_k}{G2\pi r^3 h}, \quad (a)$$

¹⁾ Такие вычисления были сделаны F. A. Wille's'ом при помощи приближенного метода интегрирования; см. Z. Math. u. Mech., т. 55, стр. 225, 1907; см. также R. Sonntag, Dissertation, Munich, 1926.

²⁾ Эта аналогия была разработана L. S. Jacobsen'ом, см. Trans. A. S. M. E., т. 47, стр. 619, 1926.

где r — средний радиус трубочки и h — его толщина. Так как ΔM_k и θ^1 одинаковы для всех трубочек, то толщина трубочек изменяется обратно пропорционально кубу среднего радиуса. Среднее касательное напряжение в трубочке по формуле (226) равно

$$\tau = \frac{\Delta M_k r}{J_p} = \frac{\Delta M_k}{2\pi r^2 h}. \quad (b)$$

На рис. 193 показана вторая система линий в диаметральной сечении. Эти линии перпендикулярны линиям равного момента и называются *линиями равного угла закручивания*. Они соответствуют сечениям вала, которые называются *поверхностями равного угла закручивания* и которые выбираются так, чтобы угол закручивания между двумя такими последовательными поверхностями был постоянным по длине вала. Пусть $\Delta\varphi$ — этот угол. Для рассматриваемого круглого вала поверхностями равного угла закручивания будут равноудаленные друг от друга плоскости; пусть a — расстояние между ними. Тогда на цилиндрической поверхности какого-либо радиуса r относительный сдвиг будет $\gamma = \frac{\Delta\varphi r}{a}$, а соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{G\Delta\varphi r}{a}. \quad (c)$$

Обе взаимно перпендикулярные системы линий равного момента и равного угла закручивания разделяют диаметральное сечение вала на элементарные прямоугольники, как показано на рис. 193. Размерами этих прямоугольников можно воспользоваться для сравнения касательных напряжений в соответствующих точках вала. Пользуясь формулой (b) и сравнивая касательные напряжения τ_1 и τ_2 в точках, находящихся соответственно на расстояниях r_1 и r_2 от оси вала, находим

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_2^2 h_2}{r_1^2 h_1}. \quad (d)$$

Из выражения (c) получаем

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1 a_2}{r_2 a_1}. \quad (e)$$

В рассматриваемом случае $a_1 = a_2 = a$, но соотношение (e) в дальнейшем будет применено и к более общему случаю. Очевидно, что каждой системой линий можно пользоваться для определения касательных напряжений. В одном случае (выражение (d)) отношение напряжений зависит от отношения расстояний между линиями равного момента h_2/h_1 , между тем как в другом случае (выражение (e)) оно зависит от отношения расстояний между линиями равного угла закручивания a_2/a_1 .

¹⁾ θ — угол закручивания для сплошного вала.

Рассмотрим вал переменного диаметра, изображенный на рис. 192. Неравномерность в распределении напряжений, происходящая у выкружек, имеет местный характер. На достаточном расстоянии от места сопряжения двух участков разных диаметров распределение напряжений практически такое же, как и в вале постоянного поперечного сечения, и две системы описанных выше линий могут быть построены в диаметральной сечении (рис. 194). Вблизи переходного сечения распределение напряжений получается довольно сложным, и линии равного момента и равного угла закручивания становятся кривыми. Исследование этого вопроса показывает¹⁾, что эти линии, будучи кривыми, все же остаются взаимно перпендикулярными и разделяют диаметральное сечение на криволинейные прямоугольники, подобные заштрихованным на рисунке. Выражения (d) и (e), выведенные для вала постоянного поперечного сечения, сохраняются также и здесь, нужно только за h и a принимать расстояния, измеряемые от середины каждого криволинейного прямоугольника. Тогда линии равного момента и равного угла закручивания дадут полную картину распределения напряжения в вале. Рассматривая, например,

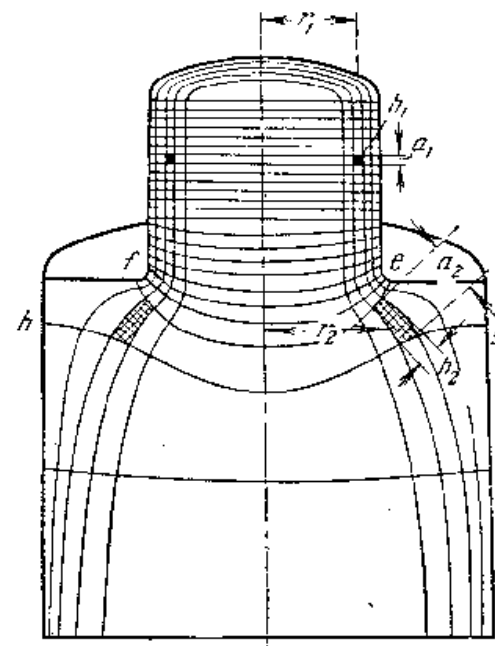


Рис. 194.

линии равного момента и пользуясь выражением (d), видим, что напряжения увеличиваются с уменьшением радиуса и толщины трубочек равного момента. Из рис. 194 видно, что напряжения достигают наибольшего значения у выкружек, где толщина h наружной трубочки равного момента наименьшая. К тому же заключению мы придем также, если будем рассматривать линии равного угла закручивания. Из рисунка видно, что у выкружек расстояние a между этими линиями очень мало; следовательно, по выражению (e) напряжение будет большим. Из выражений (d) или (e) мы можем определить отношение наибольшего напряжения у выкружки к напряжению в какой-либо другой точке при условии, что нам известны линии равного момента или линии равного угла закручивания.

Упомянутая на стр. 263 электрическая аналогия указывает способ измерения расстояний a между линиями равного угла закручивания.

¹⁾ См. статью F. A. Willems'a, цит. на стр. 263.

Эти расстояния измеряются на поверхности вала меньшего диаметра d сначала у точки, удаленной от переходного сечения, а затем у выкружки. Отношение этих двух расстояний дает, как видно из соотношения (е), коэффициент, на который нужно умножить вычисленное по обычной формуле напряжение для того, чтобы получить наибольшее напряжение у выкружки. Рассмотрим электрическую аналогию

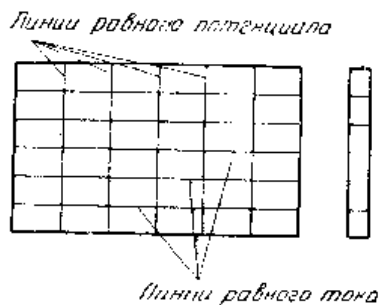


Рис. 195.

мы возьмем со случая прямоугольной пластинки постоянной толщины (рис. 195). Если на концах пластинки поддерживается постоянная разность потенциалов, то по пластинке будет идти электрический ток, равномерно распределенный по ее поперечному сечению. Разделяя электрический ток на равные части, мы получим систему равноудаленных линий тока. Система этих линий будет перпендикулярна системе линий равного потенциала. В однородной

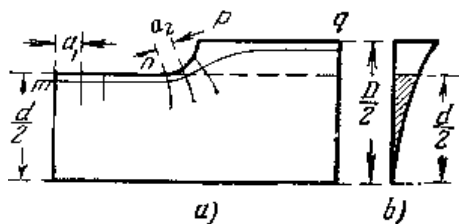


Рис. 197.

пластинке постоянного поперечного сечения падение потенциала будет происходить равномерно по направлению тока, и поэтому линии равного потенциала будут вертикальными равноудаленными друг от друга линиями. Для того чтобы получить две системы линий, аналогичных линиям на рис. 193, нужно взять пластинку, толщина которой изменяется пропорционально кубу расстояния r , как показано на рис. 196, б. Тогда расстояние между линиями тока будет обратно пропорцио-

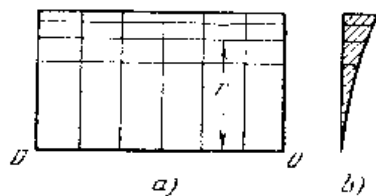


Рис. 196.

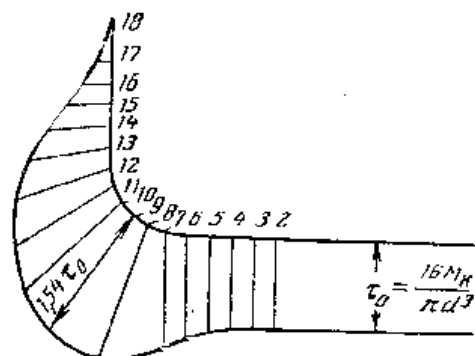


Рис. 198.

нально кубу r^3), а расстояние между вертикальными линиями равного потенциала остается по-прежнему постоянным. Таким образом, мы можем получить такую же систему взаимно перпендикулярных линий, как и на рис. 193. Край $O-O$ пластинки соответствует оси вала. Линии равного потенциала соответствуют линиям равного угла закручивания, а линии тока — линиям равного момента в задаче кручения.

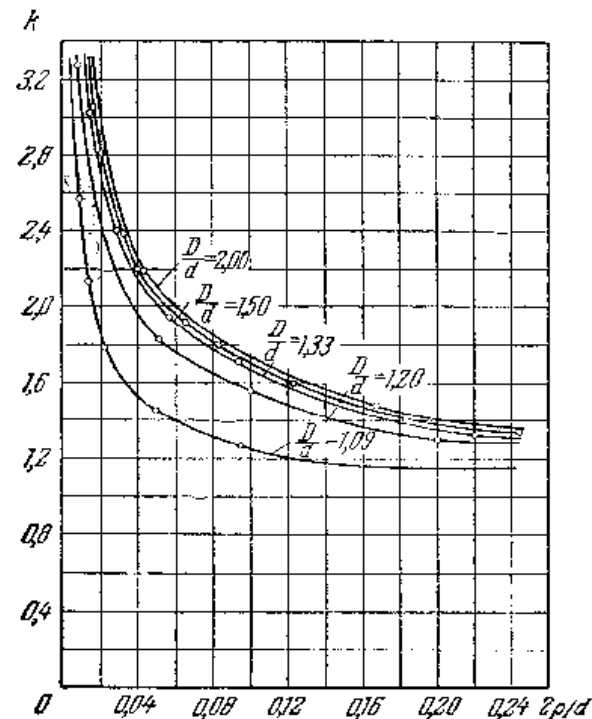


Рис. 199.

Исследование показывает²⁾, что эта аналогия сохраняется также в случае пластинки, имеющей участки различной ширины при толщине, изменяющейся пропорционально кубу расстояния r (рис. 197). Это дает возможность исследовать концентрацию напряжений у выкружки скручиваемого вала при помощи электрической аналогии. Будем поддерживать постоянную разность потенциалов на концах пластинки и измерять падение потенциала по краю $mnpq$. Таким образом, мы получим расстояния a_1 и a_2 между линиями равного потенциала соответственно у удаленной точки m и у выкружки n . Отношение a_1/a_2 этих

¹⁾ Предполагается, что ток, приходящийся на единицу площади поперечного сечения, равномерно распределяется по сечению.

²⁾ См. также: «Аэродинамика», стр. 263.

расстояний дает коэффициент концентрации напряжений для выкружки у точки n .

Действительные измерения были произведены над стальной моделью длиной 61 см, наибольшей шириной 15,2 см и наибольшей толщиной по краю pq 2,54 см. Падение потенциала вдоль края $mnpq$ модели было исследовано при помощи очень чувствительного гальванометра, зажимы которого были соединены с двумя острыми иглами, закрепленными в пластинке на расстоянии 2 мм одна от другой. Касаясь этими иглами пластинки, можно определить по гальванометру падение потенциала на расстоянии между остриями иглолок. При движении иглолок вдоль выкружки можно найти место наибольшего градиента вольтажа и измерить этот максимум. Отношение этого максимума градиента вольтажа у удаленной точки m (рис. 197) дает величину коэффициента концентрации напряжений k в уравнении

$$\sigma_{\max} = k \frac{16M_K}{\pi d^3}. \quad (268)$$

Результаты таких испытаний в одном частном случае представлены на рис. 198, где падение потенциала, измеренное в каждой точке, показано длиной перпендикуляра к краю пластинки в этой точке. Из этого рисунка видно, что коэффициент концентрации напряжений найден равным 1,54. Значения этого коэффициента, полученные при разных соотношениях размеров валов, даны на рис. 199, где абсциссы изображают отношения радиуса выкружки к наименьшему радиусу вала $2r/d$, а ординаты — коэффициент k для различных отношений D/d .

60. Концентрация напряжений при изгибе

Формулы для нормальных и касательных напряжений при изгибе, выведенные для призматических балок, очень часто применяют также в случае балок переменного поперечного сечения. Это будет давать удовлетворительные результаты при условии, что изменение поперечного сечения происходит не слишком быстро (см. п. 9).

Если же поперечное сечение резко изменяется, то в переходном сечении имеет место значительное нарушение в распределении напряжений. Наибольшее напряжение обычно гораздо больше, чем напряжение, даваемое простой формулой изгиба балки, и оно может быть представлено формулой

$$\sigma_{\max} = k\sigma, \quad (a)$$

где σ — напряжение в рассматриваемой точке, полученной по формуле для призматической балки, и k — коэффициент концентрации напряжений. Лишь в немногих случаях этот коэффициент получается при помощи уравнений теории упругости¹⁾.

¹⁾ H. Neuber, Ingenieur-Archiv, т. 5, стр. 238, 1934 и т. 6, ст. 133, 1935.

Пластинка большой ширины с гиперболическими выточками (рис. 183), представляет один из случаев, где мы имеем строгое решение при изгибе для распределения напряжений в выточках. Это решение показывает, что в случае чистого изгиба пластинки парами сил, действующими в срединной плоскости, наибольшее напряжение имеет место в точках m и n , и коэффициент концентрации напряжений в формуле (a) можно представить следующей приближенной формулой:

$$k = \sqrt{0,355 \frac{d}{r} + 0,85} + 0,08, \quad (b)$$

где d — наименьшая ширина пластинки и r — радиус кривизны для выточки.

В случае круглого вала с гиперболической выточкой, для которого рис. 183 представляет продольное сечение, коэффициент концентрации напряжений при чистом изгибе будет

$$k = \frac{3}{4N} \left(\sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + 1 \right) \left[\frac{3d}{2r} - (1 - 2\mu) \sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + 1 + \mu \right], \quad (c)$$

где

$$N = 3 \left(\frac{d}{2r} + 1 \right) + (1 + 4\mu) \sqrt{\frac{d}{2r} + 1} + \frac{1 + \mu}{1 + \sqrt{\frac{d}{2r} + 1}}. \quad (d)$$

По-прежнему d — диаметр наименьшего поперечного сечения и r — наименьший радиус кривизны на дне выточки. Для больших значений отношения $d/2r$ уравнение (c) можно заменить с достаточной точностью приближенной формулой

$$k = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{d}{2r}}. \quad (e)$$

Большинство сведений относительно величины коэффициента k в уравнении (a) получается опытным путем при помощи оптического метода¹⁾. Коэффициенты концентрации напряжений для чистого изгиба пластинок с полукруглыми выточками и с выкружками в виде четверти окружности, и с диаметром $D = d + 2r$ даны кривыми на рис. 200. На рис. 201 даны коэффициенты концентрации напряжений для выкружек с различными значениями отношения D/d . На рис. 202 даны коэффициенты концентрации напряжений для выточек разной глубины при чистом изгибе.

Для сравнения коэффициентов концентрации напряжений при растяжении и изгибе для пластинок и для круглых валов даны кривые на рис. 203²⁾. Кривые 1 и 2, которые дают коэффициенты концентрации напряжений для гиперболической выточки в пластинке и в круглом вале при растяжении, вычислены из уравнений (b) и (c) стр. 255. Кривые 3 и 4, показывающие подобные значения для выточек при чистом изгибе, вычислены из уравнений (b) и (c) стр. 269.

¹⁾ Кривые, данные в последующем изложении, взяты из статьи M. M. Frocht'a, цит. на стр. 254. См. также статью: M. M. Leven and M. M. Frocht, J. Appl. Mech., т. 19, стр. 560, 1952.

²⁾ Этот рисунок и следующие взяты из статьи: R. E. Peterson and A. M. Wahl, J. Appl. Mech., т. 3, стр. 15, 1936.

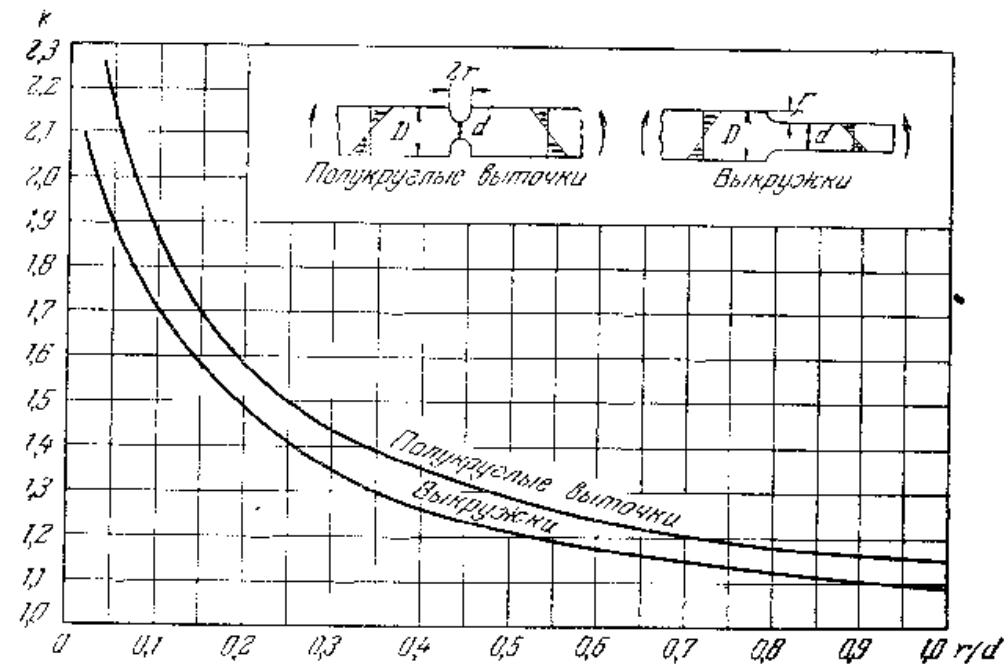


Рис. 200.

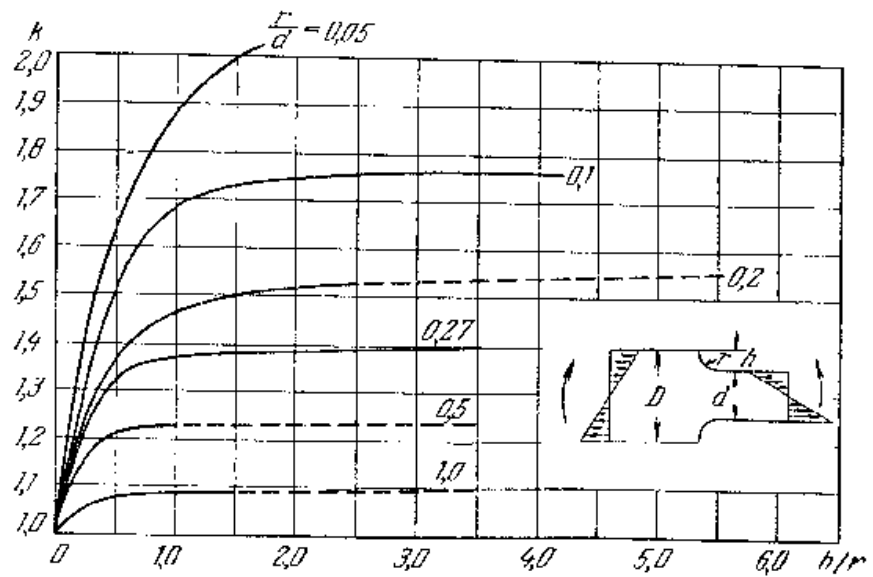


Рис. 201.

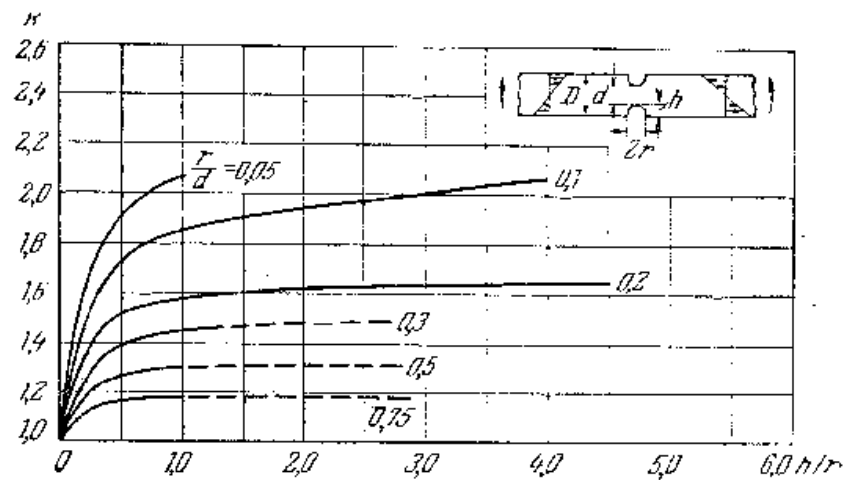


Рис. 202.

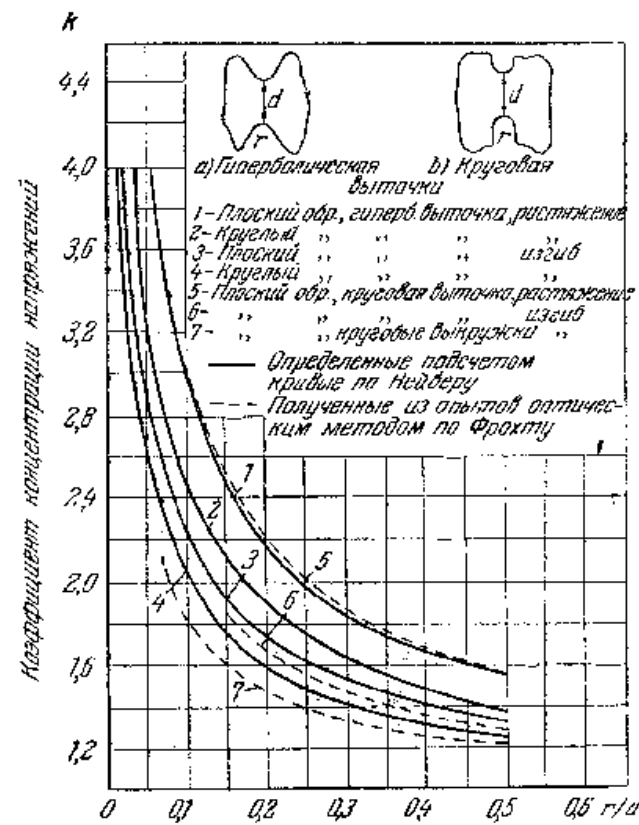


Рис. 203.

По этим кривым можно установить, что коэффициенты концентрации напряжений выше для пластинок, чем для круглых валов; в случае растяжения разница становится более заметной. В случае чистого изгиба, что имеет большое практическое значение, разница между двумя случаями мала, около 6-8% для выточек практических размеров. Пунктирные кривые 5 и 6 на рис. 203 получаются из кривых на рис. 182 и 202 путем экстраполяции этих кривых к большим значениям отношения h/r , которое соответствует глубокой выточке полукруглой на дне. Можно видеть, что кривые 5 и 6 удовлетворительно согласуются с кривыми 1 и 3 для гиперболических выточек

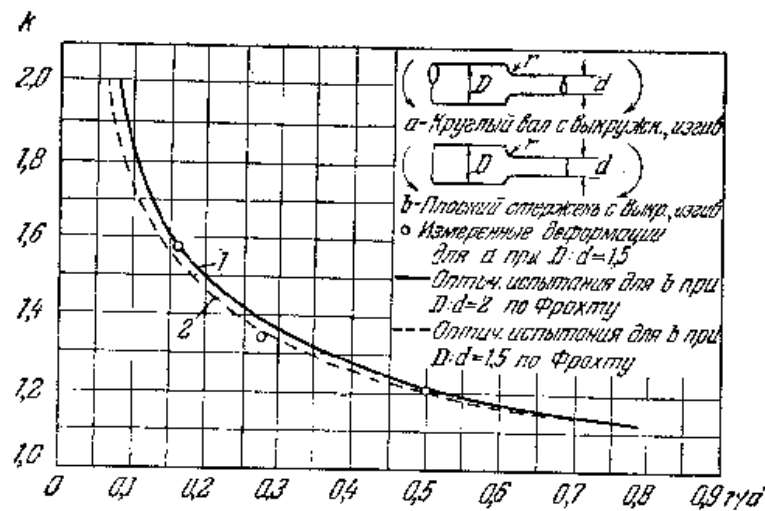


Рис. 204.

для отношений r/d между 0,15 и 0,50. Это указывает на то, что в случае глубоких выточек величина коэффициента концентрации напряжений зависит главным образом от величины отношения r/d и не зависит от формы выточки.

Пунктирная кривая 7 получается из кривых, изображенных на рис. 201 и представляет коэффициенты концентрации напряжений в выкружках пластинки при чистом изгибе с отношением $D/d = 2$. Видно, что для выкружек коэффициенты концентрации напряжений несколько ниже, чем для глубоких выточек (кривые 4 и 6) с тем же отношением r/d .

Для того чтобы получить коэффициенты концентрации напряжений для выкружек в круглых валах, были сделаны в исследовательской лаборатории Вестингауза испытания больших стальных валов с отношением диаметров $D/d = 1,5$ ¹⁾. Значения этих коэффициентов, полученные путем непосредственного измерения деформаций в выкружках, даны кружочками на рис. 204. Для сравнения на том же рисунке

¹⁾ Westinghouse Research Laboratories.

кривыми 1 и 2 даны ¹⁾ результаты фотоупругих опытов над плоскими моделями с $D/d = 2$ и $D/d = 1,5$. Из этих опытов можно сделать весьма важное заключение, что коэффициенты концентрации напряжений для круглых валов очень хорошо согласуются со значениями, полученными при помощи фотоупругого метода испытания плоских образцов.

61. Исследования концентрации напряжений с помощью моделей

Уже указывалось, что полное теоретическое решение вопроса о распределении напряжений в местах резких изменений поперечных сечений имеется лишь для немногих простейших случаев, как, например, для круглого или эллиптического отверстия и гиперболической выточки. В большинстве случаев сведения относительно концентрации напряжений получаются из опытов. С этой целью иногда удается произвести измерения деформаций в местах резких изменений поперечных сечений при помощи чувствительных экстензометров. Таким путем, например, была исследована ²⁾ концентрация напряжений при растяжении образцов с выточками. При пользовании этим методом возникают большие затруднения из-за чисто локального характера распределения напряжений в указанном месте, поскольку необходимо получить удовлетворительные результаты ³⁾ при очень малой длине датчика и, следовательно, при очень большом увеличении.

Грубое значение коэффициентов концентрации напряжений можно получить, если образец или модель конструкции нагружать до начала текучести в наиболее напряженных точках. Эту текучесть можно ясно видеть на полированных поверхностях образцов из мягкой стали. Рис. 205 представляет фотографию линий текучести на полосе из мягкой стали. Эти линии текучести (называемые линиями Людерса, см. главу 10) впервые появляются в местах, соответствующих наибольшим напряжениям. Распределение этих линий дает весьма ценные указания относительно напряжений в местах резких изменений поперечных сечений ⁴⁾.

¹⁾ Эти кривые были построены на основании данных, приведенных на рис. 201.

²⁾ См. E. Pruess, Z. Ver. deut. Ing., т. 56, стр. 1349, 1912; т. 57, стр. 664, 1913 и Forschungsarb., № 134, 1913, см. также Th. W y s s, Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, стр. 354, 1924 и его диссертацию, Цюрих, 1923. См. также F. Röttscher and J. Stumbiegel, Z. Ver. deut. Ing., т. 76, стр. 508, 1932.

³⁾ Для увеличения деформаций в местах резких изменений сечений также применялись в некоторых случаях резиновые модели: см. A. Stodola, Z. Ver. deut. Ing., т. 51, стр. 1272, 1907; Hunnigel, Schweiz. Bauzeitung, стр. 143, 1924; L. Chitty and A. J. S. Pippard, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 156, стр. 518, 1936. Об улучшении техники измерения деформаций см. статью: James A. Miller, Proc. Soc. Exp. Stress. Anal., т. 10, стр. 29, 1952.

⁴⁾ См. статью М. А. Вороньева, Известия Киевского политехнического института, 1910 и статью автора в Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 419, 1926.

Рис. 206 показывает линии Людерса у выкружки модели, изготовленной из мягкой стали (рис. 181) при соотношении $r/d = 0,157$ и $D/d = 2,5$. Линия начинается от той точки на выкружке, в которой, согласно предварительным опытам, при помощи поляризованного света следовало ожидать наибольшей концентрации напряжений. Коэффициент концентрации напряжений по кривой, взятой из рис. 181, равняется 1,85. Следовательно, текучесть должна начаться в наиболее слабой части, когда среднее растягивающее напряжение в более узком участке модели будет составлять лишь $1/1,85$ того напряжения, которое необходимо для появления линий Людерса в призматическом стержне

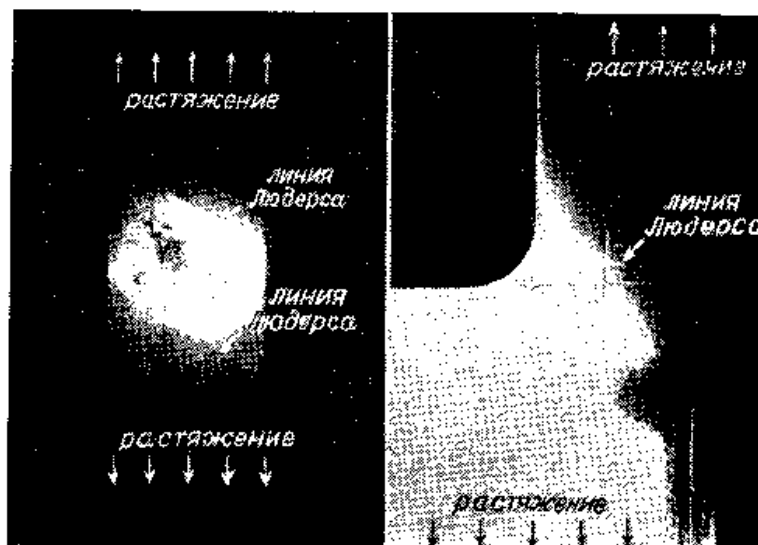


Рис. 205.

Рис. 206.

(рис. 205) из того же материала. Опыт показал, что нагрузка, при которой началась текучесть у выкружки, равнялась $1/1,8$ нагрузки призматического стержня.

На рис. 207 изображены линии Людерса у края круглого отверстия в полосе из мягкой стали. Слова эти линии точно указывают места наибольшей концентрации напряжений. Среднее напряжение по поперечному сечению у пластинки, при котором произошла текучесть, равнялась $1/2,3$ напряжения, необходимого для текучести в призматическом стержне.

В обоих предыдущих примерах текучесть в местах наибольших напряжений появлялась при среднем напряжении, которое выше указанного действительными коэффициентами концентрации. Это можно объяснить следующим образом. Небольшая область перенапряженного материала окружена участками, где напряжение не превосходит предела

пропорциональности. Это препятствует скольжению, показанному на рис. 205, по плоскостям, перпендикулярным плоскости рисунка и наклонным под углом 45° к направлению растяжения. В случаях, изображенных на рис. 206 и 207, линии Людерса начинаются на полированных поверхностях пластинок в виде тонких линий, перпендикулярных наибольшему растягивающему напряжению. Это указывает на то, что в этих случаях скольжение происходит по плоскостям, проходящим через эти линии и наклонным под углом 45° к плоскостям пластинок. В таком случае толщина пластинки играет

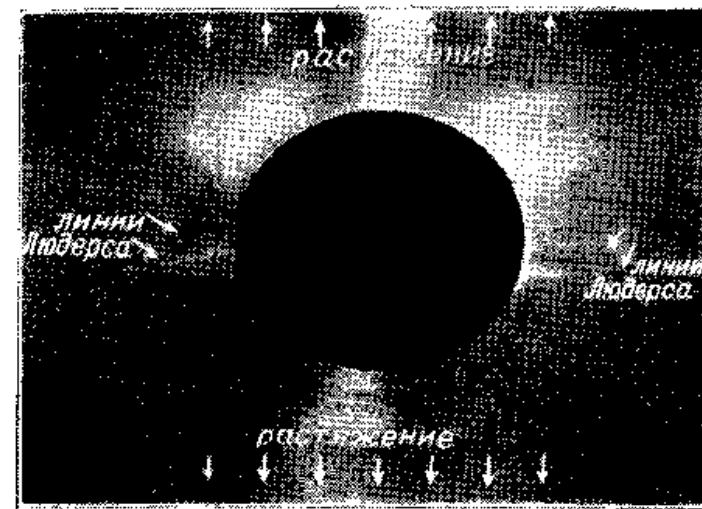


Рис. 207.

важную роль. Эта толщина должна быть очень мала по сравнению с радиусом отверстия или выкружки для того, чтобы поверхность скольжения полностью находилась в области сильно перенапряженного материала. То обстоятельство, что поверхность скольжения, начинающаяся в точках наибольших напряжений, должна пересечь область с меньшими напряжениями, объясняет ¹⁾ запаздывание в появлении линий Людерса. В указанном выше случае круглого отверстия ширина пластинки была 15,24 см, диаметр отверстия 2,54 см, а толщина пластинки — лишь 0,32 см. При испытании моделей, у которых толщина и диаметр отверстия были одного порядка, невозможно было обнаружить какое-либо существенное влияние концентрации напряжений на величину нагрузки, вызывающей линии Людерса. Другой причиной запаздывания и появления линий Людерса может служить то обстоятельство, что прежде чем линии Людерса станут заметными, может иметь место некоторая остаточная деформация.

¹⁾ Это объяснение было предложено автору Е. Н. Дюпеллом.

Метод определения слабых мест в конструкциях, основанный на изучении линий Людерса, не ограничивается каким-либо частным типом задачи и имеет перед оптическим методом, описанным в следующем параграфе, то преимущество, что он применим к пространственным задачам, т. е. к таким, в которых рассматриваются напряжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Для того чтобы сделать текучесть металла видимой на шероховатой поверхности, при исследовании напряжений в днищах котлов¹⁾ и в составных сжатых стержнях²⁾ поверхность покрывают хрупким лаком. Делая после испытаний разрезы образцов и моделей и применяя специальный способ протравливания поверхностей разрезов, можно обнаружить внутренние области, в которых имела место текучесть, и таким образом получить указание относительно текучести металла в наиболее напряженных точках³⁾.

62. Оптический метод измерения напряжений

Имеется много задач о напряженном состоянии, когда деформация, по существу, происходит в одной плоскости. Это так называемые *двумерные задачи*. Примерами служат: изгиб балок узкого прямоугольного поперечного сечения, изгиб ферм, арок, зубчатых колес или вообще пластинок какой угодно формы, но постоянной толщины, на которые действуют силы или моменты в плоскости пластинки. Форма пластинок может быть такой, что становится весьма затруднительным аналитическое определение закона распределения напряжений; для таких случаев оказывается весьма полезным *фотоупругий* метод. В этом методе применяются модели, вырезанные из пластинок изотропного прозрачного материала, как, например, стекло, целлулоид или бакелит. Хорошо известно, что под действием напряжений эти материалы становятся *двойнолучепреломляющими*, и если луч *поляризованного света* проходит через прозрачную модель, находящуюся в напряженном состоянии, то при этом можно получить окрашенное изображение, по которому удастся найти закон распределения напряжений⁴⁾.

¹⁾ См. статью: F. Koerber und E. Siebel, Mittell. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 8, стр. 63, 1926 и т. 9, стр. 13, 1927.

²⁾ R. S. Johnston, Iron and Steel Inst., т. 112, стр. 341, 1925. См. также статью: William F. Stokes, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 10, стр. 179, 1952.

Метод был применен к исследованию напряжений в машинных частях Dietrich und Leht, Z. Ver. deut. Ing., т. 76, 1932. См. также H. Kayser, Bautechnik, 1936; A. V. de Forest and Greer Ellis, J. Aeronaut. Sci., т. 7, стр. 205, 1940 и M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, стр. 636, 1950.

³⁾ См. статью: A. Fry, Kruppsche Monatsh., июль 1921, также Stahl u. Eisen, 1921.

⁴⁾ Явление двойного лучепреломления под действием напряжений было открыто D. Brewster'ом, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1816 и в дальнейшем изучено F. E. Neuman'ом, Berlin Abh., 1841 и J. C. Maxwell'ом,

На рис. 208 *abcd* представляет прозрачную пластинку постоянной толщины, а *O* — точку пересечения пластинки с лучом поляризованного света, перпендикулярным к плоскости пластинки. Предположим, что *OA* изображает плоскость световых колебаний, а длина $\overline{OA} = a$ представляет амплитуду этих колебаний. Предположим, что свет совершает простое гармоническое колебание; тогда перемещение может быть представлено уравнением

$$s = a \cos pt, \quad (a)$$

где *p* пропорционально частоте колебаний, которая зависит от цвета светового луча.

Представим, что к краям пластинки приложены разные по величине напряжения σ_x и σ_y . Вследствие разности напряжений оптические свойства пластинки также получают различиями в двух перпендикулярных направлениях. Пусть v_x и v_y соответственно означают скорости распространения света в плоскостях *Ox* и *Oy*. Разложим простое колебание в плоскости *OA* на два компонента в плоскостях *Ox* и *Oy* с соответствующими амплитудами $\overline{OB} = a \cos \alpha$ и $\overline{OC} = a \sin \alpha$. Тогда соответствующие перемещения будут

$$x = a \cos \alpha \cos pt, \quad y = a \sin \alpha \cos pt. \quad (b)$$

Если *h* — толщина пластинки, то промежутки времени, потребные для прохождения сквозь пластинку двух указанных составляющих колебаний, соответственно будут

$$t_1 = \frac{h}{v_x} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{h}{v_y}, \quad (c)$$

Trans. Roy. Soc. (Edinburgh), т. 20, 1853, см. также его научные статьи, т. I, стр. 30. Применение этого явления к решению технических задач было начато С. Wilson'ом, Phil. Mag. (сер. 5), т. 32, 1891 и в дальнейшем развито А. Mesnager'ом, Ann. ponts et chaussées, 1901 и 1913; и E. G. Soker'ом, General Electric Co. Mag., 1920 и J. Franklin Inst., 1925. О дальнейшем развитии оптического метода см. статью: Henry Favre, Schweiz. Bauzeitung, т. 20, стр. 291, 1927; см. также его диссертацию «Sur une nouvelle methode optique de détermination de tensions intérieures», Париж, 1929. Применение монохроматического света (так называемый метод полос) было введено Z. Tuzi, Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo), т. 8, стр. 247, 1928. Этот вопрос очень подробно разобран в книге E. G. Soker and L. N. G. Filon, Photo-elasticity, 1931; и также в книге: M. M. Frocht, Photo-Elasticity, 1941. Точность оптического метода исследования разобрана в статье M. M. Frocht'a R. Giersey and D. Landsberg'a, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 105, 1953.

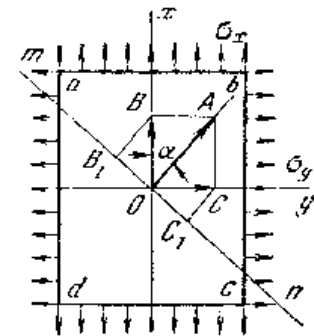


Рис. 208.

и перемещения (уравнения (b)) после прохождения света сквозь пластинку представляется уравнениями

$$x_1 = a \cos \alpha \cos p(t - t_1), \quad y_1 = a \sin \alpha \cos p(t - t_2). \quad (d)$$

Из-за разности скоростей эти составляющие колебания имеют разность фаз, равную $p(t_2 - t_1)$. Опыты показывают, что разность скоростей распространения света пропорциональна разности напряжений, т. е.

$$t_2 - t_1 = \frac{h}{v_y} - \frac{h}{v_x} = \frac{h(v_x - v_y)}{v_x v_y} \approx \frac{h(v_x - v_y)}{v^2} = k(\sigma_x - \sigma_y), \quad (e)$$

где v есть скорость распространения света при напряжении, равном нулю, и k — численный коэффициент, зависящий от физических свойств материала пластинки. Мы видим, что разность двух главных напряжений может быть найдена путем измерения разности фаз двух колебаний. Это может быть проделано, если колебания будут интерферировать в одной и той же плоскости. С этой целью за пластинкой помещают призму Николя (называемую *анализатором*) так, чтобы она пропускала лишь колебания в плоскости mn , перпендикулярной плоскости OA . Составляющие колебания (d), которые пройдут сквозь

призму, будут иметь амплитуды $\vec{OB}_1 = \vec{OB} \sin \alpha = \left(\frac{a}{2}\right) \sin 2\alpha$ и $\vec{OC}_1 = \vec{OC} \cos \alpha = \left(\frac{a}{2}\right) \sin 2\alpha$. Следовательно, результирующее колебание в плоскости mn будет

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_1) - \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos p(t - t_2) = \\ = \left(a \sin 2\alpha \sin p \frac{t_1 - t_2}{2} \right) \sin p \left(t - \frac{t_1 + t_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (f)$$

Таким образом, получается простое гармоническое колебание, амплитуда которого пропорциональна $\sin p[(t_1 - t_2)/2]$; следовательно, интенсивность освещения является функцией разности фаз $p(t_1 - t_2)$. Если напряжения σ_x и σ_y равны между собой, то t_1 и t_2 также будут равны и амплитуда результирующего колебания будет равна нулю. В этом случае мы будем наблюдать затемнение. Это же будет и в том случае, если разность напряжений такова, что

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi, \quad (g)$$

где n — целое число. Наибольшая интенсивность освещения получится и в том случае, когда разность напряжений такова, что

$$\sin p \frac{t_1 - t_2}{2} = \pm 1.$$

Вообразим, что вместо элемента $abcd$ (рис. 208) мы имеем пластинку из прозрачного материала, находящуюся в состоянии простого

растяжения. Путем постепенного увеличения растягивающего напряжения мы получим темную картину изображения пластинки на экране каждый раз, когда уравнение (g) выполняется. Таким образом, мы можем установить опытным путем для данного материала данной толщины напряжение, соответствующее промежутку между двумя последовательными темными изображениями образца. Например, для одного рода фенольной пластинки толщиной 1 мм это напряжение было найдено равным 108 кг/см^2 . Следовательно, для пластинки толщиной 6,35 мм соответствующее напряжение ¹⁾ будет равняться $108/6,35 = 17 \text{ кг/см}^2$. Имея эти сведения, мы можем получить напряжения в пластинке, находящейся в состоянии растяжения, считая число промежутков между последовательными темными изображениями, имеющими место при постепенном нагружении образца.

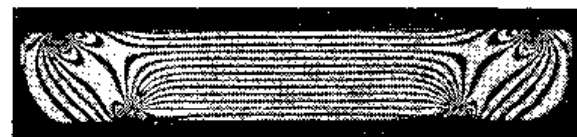


Рис. 209.

Если мы возьмем пластинку, находящуюся в состоянии чистого изгиба, то получим картину, подобную показанной на рис. 209. Параллельные темные полосы указывают на то, что в части полосы, находящейся на достаточном расстоянии от точек приложения грузов, распределение напряжений одинаково во всех вертикальных поперечных сечениях. Считая число полосок, мы можем определить величины напряжений, поскольку напряжение между двумя последовательными полосками такое же, как напряжение между двумя последовательными темными изображениями при простом растяжении. Наблюдая за пластинкой при постепенном приложении нагрузки, мы можем видеть, что число темных полосок увеличивается с возрастанием нагрузки. Новые полоски всегда появляются сверху и внизу полосы и постепенно двигаются к нейтральной плоскости, так что полоски становятся все более близкими друг другу. Тогда напряжение в какой-либо точке получится путем отсчитывания числа полосок, которые проходят через эту точку.

Метод подсчета числа темных полосок, проходящих через выбранную точку, можно применить также в любом случае плоского распределения напряжений. Как видно из наших предыдущих рассуждений, это число дает разность между двумя главными напряжениями в точке. Для полного определения напряжения в точке остается найти направления главных напряжений и их сумму. Уравнение (f)

¹⁾ Z. T u z i, Sci Papers, Inst. Phys. Chem. Research (Tokyo), т. 12, стр. 247, 1929.

показывает, что интенсивность света, проходящего через анализатор, пропорциональна $\sin 2\alpha$, где α — угол между плоскостью поляризации и плоскостью одного из главных напряжений (рис. 208). Если эти две плоскости совпадают, то $\sin 2\alpha$ равен нулю, и мы получим темное пятно на экране. Следовательно, при исследовании напряженной прозрачной модели в поляризованном свете мы получаем не только темные полоски, рассмотренные ранее, но также темные линии, соединяющие точки, в которых одно из направлений главного напряжения совпадает с плоскостью поляризации. Вращая обе призмы Николи, поляризатор и анализатор, и отмечая темные линии на изображении напряженной пластинки для различных направлений плоскости поляризации, мы находим систему *изогнутых линий*, которые

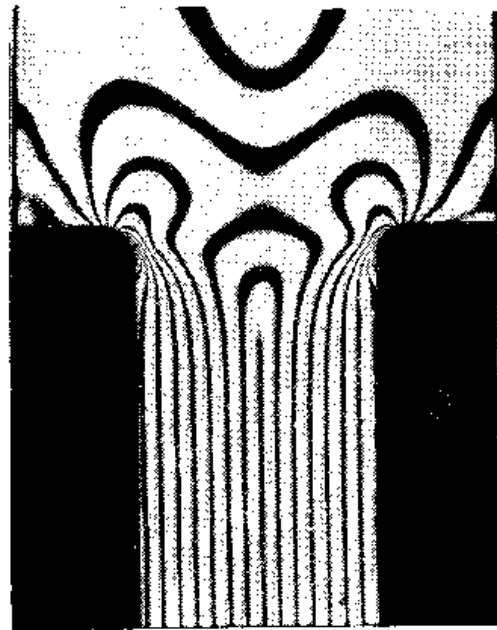


Рис. 210.

соединяют вместе точки с одинаковыми направлениями главных напряжений. Имея эти линии, мы можем начертить линии, которые будут касательными в каждой точке к осям главных напряжений. Эти последние линии называются *траекториями*

главных напряжений (см. т. I, стр. 115). Таким образом, направления главных напряжений в каждой точке пластинки можно получить оптическим путем.

Сумма главных напряжений может быть также получена из опыта измерением изменений Δh толщины h пластинки, происходящих под действием напряжений σ_x и σ_y ¹⁾, и применением известного соотношения

$$\Delta h = \frac{\rho h}{E} (\sigma_x + \sigma_y). \quad (h)$$

Имея разность двух главных напряжений из оптического метода испытаний и их сумму по выражению (h), мы можем легко вычислить величины главных напряжений. Полоски, полученные в пластинке

¹⁾ Этот метод был предложен А. Mesnager'ом, цит. на стр. 277. Необходимый боковой экстензометр был разработан и успешно применен А. М. Уайтом. См. статью: R. E. Peterson and A. M. Wahl, J. Appl. Mech., т. 2, стр. 1, 1933.

с выкружками, подверженной действию чистого изгиба, показаны для иллюстрации на рис. 210. Из того обстоятельства, что полоски сгущены у выкружек, можно заключить, что в этих точках имеет место значительная концентрация напряжений. На рис. 211 показаны полоски для центрально нагруженной балки, лежащей на двух опорах.



Рис. 211.

В приведенном изложении оптического метода при анализе напряжений предполагалось, что мы имели дело с плоскими задачами. В последнее время были сделаны значительные усилия к тому, чтобы распространить оптический метод на пространственные задачи, и уже получены некоторые многообещающие результаты¹⁾.

63. Напряжения при касании шаров и цилиндров

Если два упругих тела, скажем два шара, давят один на другой, то образуется малая поверхность соприкосновения как результат местной деформации. Давления, распределенные по этой поверхности, называются контактными давлениями.

Величина этих давлений и напряжения, возникающие в телах, могут быть вычислены при помощи уравнений теории упругости²⁾. Здесь мы дадим лишь окончательные результаты таких исследований.

В случае *двух шаров*, сжатых силами P (рис. 212), давления распределяются по малому *кругу контакта* m , радиус которого определяется формулой

$$a = 0,88 \sqrt{\frac{P(E_1 + E_2)d_1 d_2}{2E_1 E_2 (d_1 + d_2)}}. \quad (269)$$

В этом выражении E_1 и E_2 — модули упругости двух шаров и d_1 и d_2 — соответствующие диаметры. Наибольшее давление имеет место в центре круга контакта и дается формулой

$$p_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi a^2}. \quad (270)$$

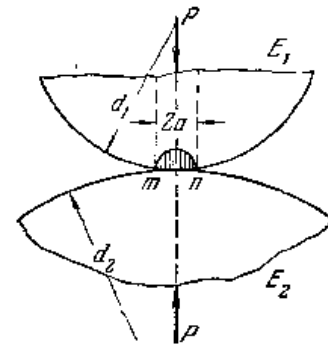


Рис. 212.

¹⁾ См. статью: M. Hetényi, J. Appl. Mech., т. 5, стр. 149, 1938; см. также R. Weiler, J. Appl. Phys., т. 10, стр. 266, 1939 и параграф D. C. Ducker'a в M. Hetényi, ed., Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950.

²⁾ Эта задача была решена Н. Герц'ем, Gesammelte Werke, т. 1, 1895. Разбор задачи и библиография даны в книге: Timoshenko and Goodier

Вследствие местной деформации центры шаров приближаются один к другому на расстояние

$$\lambda = 0,77 \sqrt[3]{2P^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)^2 \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right)}. \quad (271)$$

Когда диаметры шаров и модули упругости равны между собой, то вышеприведенные формулы получаются в следующем виде:

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{Pd}{2E}}, \quad p_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{\frac{4PE^2}{d^3}}, \quad \lambda = 1,54 \sqrt[3]{\frac{2P^2}{E^2d}}. \quad (272)$$

Когда шар диаметром d прижимается к упругому телу, имеющему плоскую поверхность, требуемые формулы получаются путем подстановки $d_1 = d$, $d_2 = \infty$ в формулы (269)–(271). Полагая $E_1 = E_2 = E$, находим для этого случая:

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{Pd}{E}}, \quad p_{\max} = 0,62 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{d^2}}, \quad \lambda = 1,54 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2d}}. \quad (273)$$

В случае шара в сферическом углублении (рис. 213) знак d_2 в выражениях (269)–(271) должен быть изменен. Тогда для случая $E_1 = E_2 = E$ находим

$$\left. \begin{aligned} a &= 0,88 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1}}, \\ p_{\max} &= 0,62 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 d_1}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

Необходимо заметить, что в случаях, представленных формулами (272) и (273), наибольшие сжимающие напряжения в центре поверхности соприкосновения зависят от величины отношения P/d^2 , т. е. наибольшее напряжение остается постоянным, если это отношение не меняется. Так оправдывается обычная практика определения безопасного диаметра шара назначением определенной величины нагрузки на квадратный сантиметр диаметрального сечения шара. Так как материал в центре поверхности соприкосновения удерживается от поперечного расширения, он находится в состоянии сжатия со всех сторон и может выдерживать очень высокие давления без разрушения (см. п. 81).

В опытах ¹⁾ с закаленной тигельной сталью допускаемая сжимающая сила P в случае давления шара на плоскую поверхность иногда принималась по формуле

$$P_{\max} = 49 d^2,$$

Рис. 213.

в которой d в сантиметрах и P в килограммах. Подставляя во второе из выражений (273), находим p_{\max} равным приблизительно $37\,000 \text{ кг/см}^2$.

¹⁾ Theory of Elasticity, стр. 372, 1951; русский перевод, 1937, стр. 96. См. также И. Я. Пугарь и Л. Контактные задачи, 1949; Н. М. Беляев, Сопротивление материалов, 1945.

²⁾ См. Steibeck, Z. Ver. deut. Ing., стр. 73, 1901. Schwinning, там же, стр. 332 и A. Vauschitcher, там же, стр. 1185, 1908.

Для общего случая сжатия двух тел, имеющих одинаковые модули упругости E , пусть $1/r_1$ и $1/r_1'$ являются главными кривизнами в точке соприкосновения одного из тел, а $1/r_2$ и $1/r_2'$ — кривизнами другого ¹⁾, и пусть φ означает угол между нормальными плоскостями, содержащими кривизны $1/r_1$ и $1/r_2$. Поверхность контакта в общем случае представляет эллипс, полуоси которого даются формулами

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{Pm}{n}}, \quad b = \beta \sqrt[3]{\frac{Pm}{n}}, \quad (275)$$

в которых P — сжимающая сила, а

$$m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'}}, \quad n = \frac{4E}{3(1-\mu^2)}.$$

Постоянные α и β берутся из табл. 20 для каждого частного случая. Угол θ в первой колонке таблицы вычисляется из соотношения

$$\cos \theta = \frac{B}{A}, \quad (a)$$

в котором $A = \frac{2}{m}$;

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) \cos 2\varphi}.$$

Выражение для наибольшего давления в центре поверхности соприкосновения в этом случае будет

$$p_{\max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (276)$$

Таблица 20

Постоянные для вычисления полуосей эллипса контакта

θ градусы	α	β	θ градусы	α	β	θ градусы	α	β
20	3,778	0,408	50	1,754	0,641	75	1,202	0,846
30	2,731	0,493	55	1,611	0,678	80	1,128	0,893
35	2,397	0,530	60	1,486	0,717	85	1,061	0,944
40	2,136	0,567	65	1,378	0,759	90	1,000	1,000
45	1,926	0,604	70	1,284	0,802			

В случае сжатия цилиндрических катков (рис. 214) площадь контакта представляет собой узкий прямоугольник, ширина которого b дается ²⁾ формулой

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{P}{2} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)}, \quad (277)$$

¹⁾ Главные кривизны представляют собой наибольшую и наименьшую кривизны и находятся в перпендикулярных плоскостях. Кривизна тела рассматривается положительной, если соответствующий центр кривизны находится внутри тела.

²⁾ См. А. Фёррл, Technische Mechanik, т. 5, стр. 351, 1907.

в которой P означает сжимающую силу, приходящуюся на единицу длины катка. Наибольшее единичное давление в середине *прямоугольника соприкасания* будет

$$p_{\max} = 0,59 \sqrt{\frac{2P(d_1 + d_2)E_1E_2}{d_1d_2(E_1 + E_2)}}. \quad (278)$$

В частном случае, в котором модули упругости для двух катков равны между собой, имеем

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{P d_1 d_2}{E(d_1 + d_2)}}, \quad p_{\max} = 0,59 \sqrt{P E \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}}. \quad (279)$$

Если один из диаметров взят бесконечно большим, как в случае касания

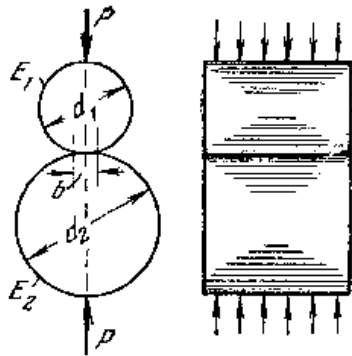


Рис. 214.

цилиндра с плоскостью, то формулы (279) сводятся к следующим:

$$b = 2,15 \sqrt{\frac{P d}{E}}, \quad p_{\max} = 0,59 \sqrt{\frac{P E}{d}}. \quad (280)$$

Видно, что наибольшее напряжение остается постоянным, если P изменяется пропорционально d . Это оправдывает практику определения безопасных размеров по диаметральной площади поперечного сечения катка. Допускаемая сжимающая сила P в случае обычных стальных цилиндрических катков, в мостах например, получается по формуле

$$P = 49d.$$

Подставляя в уравнение (280), мы находим, что наибольшее давление будет приблизительно равняться 6000 кг/см^2 ¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Определить наибольшее давление на поверхности контакта C в простом шариковом подшипнике, показанном на рис. 215. Диаметр шариков $d = 3,8 \text{ см}$, радиус поверхности канавки $= 2,5 \text{ см}$, диаметр обоймы равен 20 см , а наибольшая сжимающая шарик сила $P = 2000 \text{ кг}$.

¹⁾ Об испытаниях стальных цилиндров см. W. M. Wilson, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 162, 1927; № 191, 1929; № 263, 1934. См. также V. P. Jensen, Iowa Eng. Exp. Sta. Bull., № 138, 1937. Испытания на усталость катков рассмотрены в п. 89.

Решение. Пользуясь обозначениями на стр. 283, получаем

$$r_1 = r'_1 = \frac{3,8}{2} = 1,9 \text{ см}, \quad r_2 = -2,5 \text{ см}, \quad r'_2 = -10 \text{ см};$$

$$m = \frac{4}{\frac{1}{1,9} + \frac{1}{1,9} - \frac{1}{2,5} - \frac{1}{10}} = 7,25, \quad n = \frac{4 \cdot 2,2 \cdot 10^6}{3 \cdot 0,91} = 3,22 \cdot 10^6;$$

$$2A = \frac{4}{m} = \frac{4}{7,25} = 0,553, \quad 2B = \frac{1}{2,5} - \frac{1}{10} = 0,3.$$

Подставляя в уравнение (а), получаем

$$\cos \theta = \frac{0,3}{0,553} = 0,543, \quad \theta = 57^\circ.$$

Тогда из таблицы 20 путем интерполирования найдем

$$\alpha = 1,561, \quad \beta = 0,694.$$

Полуоси эллипса контакта вычисляем по формулам (275)

$$a = 1,561 \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 7,25}{3,22 \cdot 10^6}} = 0,258 \text{ см},$$

$$b = 0,694 \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 7,25}{3,22 \cdot 10^6}} = 0,115 \text{ см},$$

и из формулы (276) получим

$$p_{\max} = 1,5 \frac{2000}{\pi a b} = 32\,260 \text{ кг/см}^2.$$

Такие высокие напряжения может выдерживать закаленная сталь благодаря тому, что в центре эллипса контакта материал сжимается не только в направлении действия силы P , но также и в боковых направлениях.

2. Определить поверхность контакта и наибольшее давление между двумя круглыми цилиндрами, оси которых взаимно перпендикулярны. Примером такой задачи может служить контактное давление колеса, имеющего цилиндрический бандаж, на рельс ¹⁾.

Решение. Обозначая через r_1 и r_2 радиусы цилиндров и пользуясь обозначениями стр. 283, находим:

$$\frac{1}{r'_1} = 0, \quad \frac{1}{r'_2} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad m = \frac{4}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad n = \frac{4E}{3(1-\mu^2)},$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1 r_2}} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

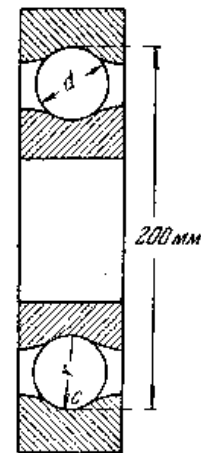


Рис. 215.

¹⁾ Вопрос о давлении в месте соприкосновения приобретает большое значение, поскольку нагрузки на оси в новейших локомотивах увеличиваются. О решении этой задачи см. статью Н. Глошн'а, V. D. I., т. 73, стр. 957, 1929 и статью Н. М. Беллеса, Известия Ленинградского института инженеров путей сообщения, 1929.

Знак нужно выбрать так, чтобы B было положительным. Из уравнения (а) находим

$$\cos \theta = \pm \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}.$$

Зная θ , мы определим полуоси эллипса контакта по формуле (275) и наибольшее давление по формуле (276).

В частном случае, когда цилиндры имеют одинаковые радиусы, $\cos \theta = 0$, и на основании табл. 20 можно заключить, что поверхность соприкосновения имеет круговой контур.

3. Найти наибольшее давление между колесом с цилиндрическим бандажом радиуса $r = 40$ см и рельсом с радиусом головки $r_2 = 30$ см, если $P = 400$ кг и коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$.

Ответ. Полуоси эллипса контакта равны $a = 0,236$ см, $b = 0,198$ см, а наибольшее давление

$$p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \approx 4000 \text{ кг/см}^2.$$

ГЛАВА IX

ДЕФОРМАЦИИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

64. Системы из идеально пластических материалов

В предыдущем изложении всегда предполагалось, что материал конструкции следует закону Гука. На основании этого закона были проанализированы деформации и распределения напряжений в различных случаях. Однако имеются задачи, в которых необходимо исследовать деформацию сооружения за пределом пропорциональности. Для выполнения такого исследования нужно знать механические свойства материалов за пределом пропорциональности. Эти свойства обычно определяются при помощи диаграмм растяжения и сжатия.

Простейший вид диаграммы имеют в случае *идеально пластического материала*. Такой материал следует закону Гука до предела пропорциональности, и затем начинается текучесть при постоянном напряжении. Соответствующие диаграммы растяжения и сжатия даны на рис. 216. Строительные стали с резко выраженным пределом текучести и значительным при этом удлинением приближаются в известных границах по своим свойствам к идеально пластическим материалам, а анализ напряженного состояния сооружений на основании диаграммы на рис. 216 имеет большое практическое значение во многих случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим несколько задач такого рода.

Чистый изгиб. При рассмотрении чистого изгиба за пределом пропорциональности мы будем делать те же предположения, что и в случае упругого изгиба (см. т. I, п. 23, стр. 85). А именно, предположим: 1) что поперечные сечения балки при изгибе остаются плоскими и нормальными к изогнутой оси и 2) что продольные волокна

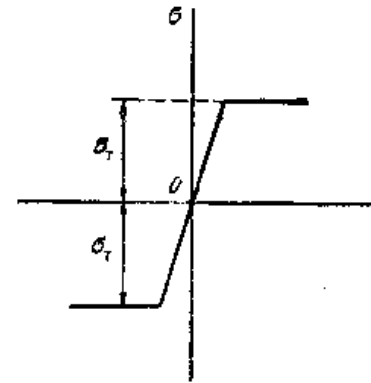


Рис. 216.

балки находятся в состоянии простого растяжения или сжатия и не давят друг на друга в поперечном направлении¹⁾. Рассмотрим балку с продольной плоскостью симметрии и предположим, что изгибающие моменты действуют в той же плоскости; мы будем наблюдать, что изгиб происходит в этой же плоскости и что при изгибе поперечные сечения балки будут поворачиваться вокруг своих нейтральных осей, перпендикулярных плоскости изгиба. Относительное удлинение волокна в расстоянии y от нейтральной оси (см. т. I, стр. 86) при этом равно

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \quad (a)$$

Величина же изгибающего момента, при котором начнется текучесть, должна быть вычислена по формуле (см. т. I, стр. 88)

$$M_T = \sigma_T \frac{J_z}{c}, \quad (b)$$

в которой J_z — момент инерции площади поперечного сечения балки относительно ее нейтральной оси, и c — расстояние от этой оси до наиболее удаленного волокна балки.

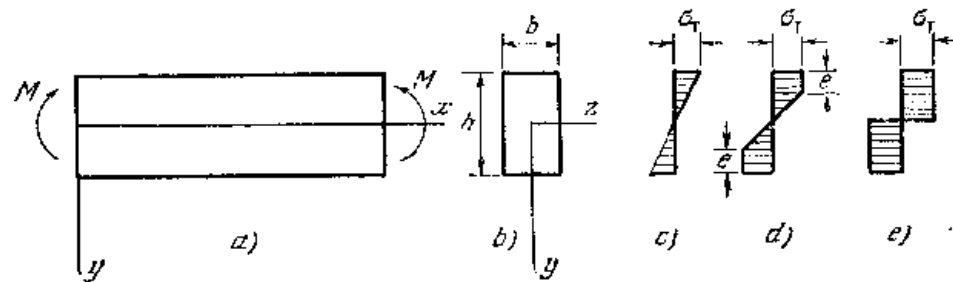


Рис. 217.

Рассматривая в качестве простейшего примера прямоугольную балку (рис. 217), получаем²⁾

$$M_T = \sigma_T \frac{bh^3}{6}; \quad (c)$$

соответствующее распределение напряжений показано на рис. 217, e. Все волокна балки находятся в упругом состоянии и наиболее удаленные волокна как раз достигли напряжения, соответствующего пределу текучести. Если мы несколько увеличим изгибающий момент

¹⁾ Эти предположения хорошо согласуются с опытами; см. статью G. H. Mac-Cullough'a, Trans. A. S. M. E., т. 55, стр. 55, 1935.

²⁾ Мы предполагаем, что σ_T при растяжении и сжатии одинаковы. Наш вывод можно легко обобщить, если σ_T имеет различное значение при растяжении и сжатии.

сверх величины M_T , то волокна вблизи верхней и нижней поверхностей балки начнут испытывать состояние текучести и распределение напряжений будет таким, как показано на рис. 217, d. Пластические деформации проникают все глубже в балку с увеличением изгибающего момента. Для каждого значения e глубины этого распространения соответствующий изгибающий момент, определяемый с помощью заштрихованной площади на рис. 217, d дается уравнением

$$M = \sigma_T be(h - e) \frac{e}{2} + \sigma_T \frac{b(h - 2e)^2}{6} = \sigma_T \frac{bh^2}{6} \left[1 - \frac{2e}{h} \left(1 - \frac{e}{h} \right) \right]. \quad (d)$$

Соответствующая кривизна изогнутой оси балки найдется использованием уравнения (a). Применяя это уравнение к волокнам, находящимся на расстоянии $h/2 - e$ от нейтральной оси, и замечая, что напряжение в этих волокнах достигает предела пропорциональности σ_T , получаем

$$\sigma_T = \frac{E \left(\frac{h}{2} - e \right)}{r} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \frac{\sigma_T}{E \left(\frac{h}{2} - e \right)}. \quad (e)$$

Пользуясь уравнениями (d) и (e), мы можем представить зависимость между изгибающим моментом M и кривизной $1/r$ графически, как показано на рис. 218. До значения $M = M_T$ деформация является упругой и кривизна балки увеличивается пропорционально изгибающему моменту. Когда M увеличивается за M_T , то зависимость между M и $1/r$ становится нелинейной. Соответствующая кривая (рис. 218) становится круче по мере того, как глубина e распространения пластической деформации приближается к значению $h/2$, а распределение напряжений — таким, как показано на рис. 217, e. Подставляя $e = h/2$ в выражение (d), получаем высшее значение изгибающего момента, равное

$$M_{\text{пред}} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \quad (f)$$

На рис. 218 значение $M_{\text{пред}}$ определяет положение вертикальной асимптоты к кривой. Когда M приближается к $M_{\text{пред}}$, малое увеличение M вызывает большое увеличение кривизны, так что $M_{\text{пред}}$ вызывает полное разрушение балки¹⁾.

¹⁾ Понятие о предельном моменте хорошо подтверждается опытными исследованиями; см. статью J. F. Vaker'a, J. Inst. Aeronaut. Engrs., т. 31, стр. 188, 1949.

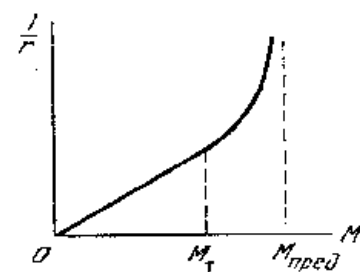


Рис. 218.

Формулы (с) и (f) были выведены для прямоугольных балок, и мы можем заключить, что при этой форме поперечного сечения для полного разрушения балки требуется изгибающий момент на 50%, больший того, при котором начинается пластическая деформация. Подобные же формулы можно легко вывести для симметричных поперечных сечений других форм.

Рассмотрим, например, двутавровую балку (рис. 219). Изгибающий момент, при котором начинается текучесть, получается путем умножения σ_T на момент сопротивления (см. формулу (b)), и мы получаем

$$M_T = \sigma_T \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} \right) \frac{2}{h}. \quad (g)$$

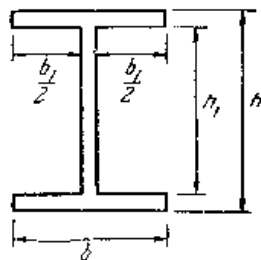


Рис. 219.

При вычислении $M_{пред}$ учтем, что распределение напряжений должно отвечать показанному на рис. 217, e. Момент внутренних растягивающих усилий относительно нейтральной оси получается умножением σ_T на статический момент половины поперечного сечения относительно этой же оси. Удваивая этот момент, находим

$$M = \sigma_T \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1 h_1^2}{4} \right). \quad (h)$$

Из выражений (g) и (h) теперь получим

$$\frac{M_{пред}}{M_T} = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{b_1 h_1^2}{bh^2}}{1 - \frac{b_1 h_1^3}{bh^3}}. \quad (i)$$

Мы видим, что для двутавровой балки отношение $M_{пред}/M_T$ меньше чем 3/2 и что его значение зависит от размеров поперечного сечения. Предполагая, например, $b_1/b = h_1/h = 0,9$, мы найдем из уравнения (i) $M_{пред}/M_T = 1,18$. В этом случае $M_{пред}$ на 18% больше M_T . В случае обычных прокатных двутавровых балок вычисления дают значения для $M_{пред}/M_T$, равные 1,15—1,17.

Из этого обсуждения видно, что если прямоугольная и двутавровая балки рассчитываются при одном и том же коэффициенте безопасности по отношению к пределу текучести, то прямоугольная балка будет прочнее двутавровой балки, если иметь в виду полное разрушение. После начала текучести прямоугольная балка имеет большую способность дополнительного сопротивления, чем двутавровая балка. В теоретическом случае двутавровой балки, у которой весь материал сосредоточен в тонких полках, найдем $M_{пред} = M_T$ и начало текучести совпадет с полным разрушением балки.

В случае прямоугольного и двутаврового поперечных сечений мы имеем две оси симметрии и нейтральная ось совпадает с одной из этих осей при упругой и пластической деформации. Если же мы

имеем только одну ось симметрии, например в случае таврового сечения (рис. 220), положение будет иным. При вычислении M_T все волокна балки находятся в упругом состоянии, и нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения. При вычислении $M_{пред}$ примем распределение напряжений, как на рис. 220, b, и поскольку сумма внутренних растягивающих усилий должна равняться сумме сжимающих усилий, заключаем, что нейтральная ось делит площадь поперечного сечения на две равные части. Когда положение нейтральной оси найдено, величина $M_{пред}$ вычислится из выражения

$$M_{пред} = \frac{1}{2} \sigma_T F a,$$

в котором F — площадь поперечного сечения и a — расстояние между центрами тяжести двух частей поперечного сечения.

Изгиб поперечными силами. Рассмотрим для примера случай свободно опертой и центрально нагруженной прямоугольной балки (рис. 221). Эюра изгибающих моментов представляет треугольник, и если $M_T < Pl/4 < M_{пред}$, то длина среднего участка балки, в котором имеет место пластическая деформация, может быть определена,

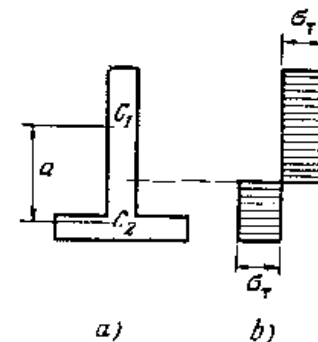


Рис. 220.

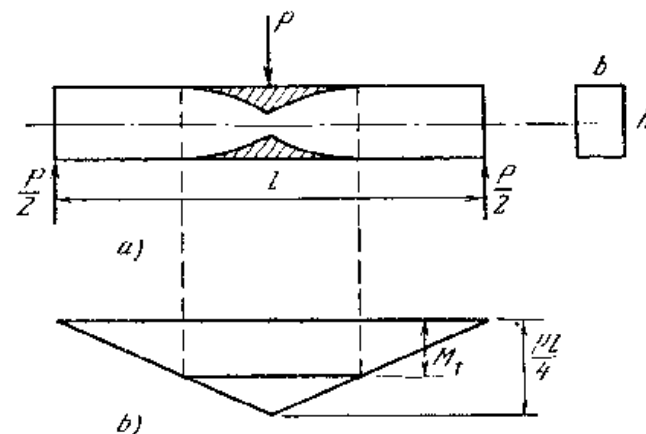


Рис. 221.

как показано на рис. 221, b. Пренебрегая влиянием касательных напряжений¹⁾, глубину e распространения пластической деформации в каждом поперечном сечении можно вычислить из выражения (d) и таким путем определить области пластического течения, заштрихованные

¹⁾ Опыты J. F. Baker'a and J. Rodewick'a оправдывают это предположение; см. Trans. Inst. Welding, т. 3, стр. 83, 1940.

на рисунке. Когда наибольший изгибающий момент $P/4$ приближается к значению $M_{\text{пред}}$, то области пластичности приближаются к нейтральной оси среднего поперечного сечения балки. Сопротивление изгибу в этом поперечном сечении определится наибольшим значением момента, при котором балка начнет разрушаться. Две половины балки будут поворачиваться одна относительно другой вокруг нейтральной оси среднего поперечного сечения, как вокруг шарнира. Это сечение, называемое *пластическим шарниром*, противостоит вращению при действии постоянного предельного момента $M_{\text{пред}}$.

Чтобы исследовать прогиб балки, имеющей области пластической деформации (рис. 221, а), пренебрежем влиянием поперечных сил на прогиб и воспользуемся выражениями (д) и (е), выведенными для чистого изгиба. Исключая σ_r из этих уравнений, получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{kEJ_z}, \quad (j)$$

где

$$k = \left(1 - \frac{2e}{h}\right) \left[1 + \frac{2e}{h} \left(1 - \frac{e}{h}\right)\right]. \quad (k)$$

Величина k является функцией e и равна единице, когда $e=0$, и равна нулю, когда $e=h/2$. Для поперечного сечения любой формы в пластической области балки по рис. 221, а, e можно вычислить по выражению (д), и k — найти из формулы (к).

Уравнение (j) для кривизны имеет такой же вид, как и в случае упругого изгиба, при условии, что мы принимаем M/k вместо M . Для применения *графоаналитического метода* (см. т. I, стр. 131) при вычислении прогибов мы должны воспользоваться *видоизмененной* эпюрой изгибающих моментов, в которой ординаты равны M/k . Когда M приближается к $M_{\text{пред}}$, k приближается к нулю; ординаты видоизмененной эпюры увеличиваются неограниченно, и мы приближаемся к условию, когда образуется пластический шарнир.

В предыдущем изложении была рассмотрена прямоугольная балка, но подобные выводы можно сделать для других форм поперечных сечений. Вообще прогиб балки в плоскости симметрии за пределом пропорциональности можно вычислить, пользуясь графоаналитическим методом при помощи видоизмененной эпюры изгибающих моментов. Величина k в уравнении (j) должна быть выведена для каждой частной формы поперечного сечения.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношения $M_{\text{пред}}/M_T$ для балок, имеющих поперечные сечения, показанные на рис. 222.

Ответ. а) $\frac{16}{3\pi} = 1,70$, в) $\frac{16r_1}{3\pi} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$, с) 2.

2. Найти $M_{\text{пред}}$ для балки таврового поперечного сечения, показанного на рис. 223, если $a = b$.

Ответ. $M_{\text{пред}} = \sigma_T ah \left(\frac{a+h}{2}\right)$.

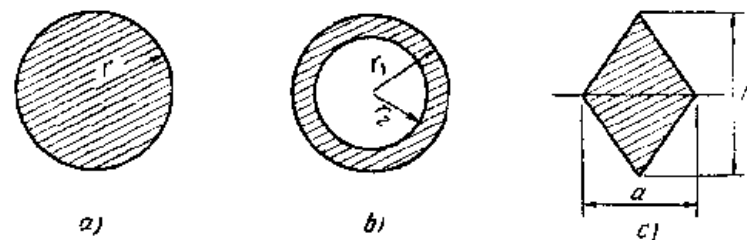


Рис. 222.

3. Найти $M_{\text{пред}}/M_T$ для поперечного сечения, представляющего равнобедренный треугольник.

Ответ. $M_{\text{пред}}/M_T = 2,343$.

4. Найти прогиб f в середине прямоугольной балки, показанной на рис. 224, если $Pc = 1,4 M_T$.

Ответ. $f = \frac{P^2}{8r} = \frac{l^2}{8} \frac{Pc}{kEJ_z}$, $k = 0,626$.

5. Решить предыдущую задачу для тавровой балки рис. 223, если $Pc = 0,90 M_T$.

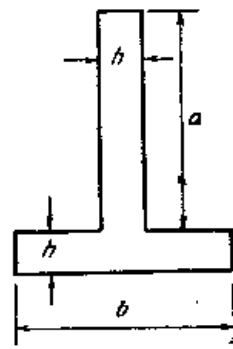


Рис. 223.

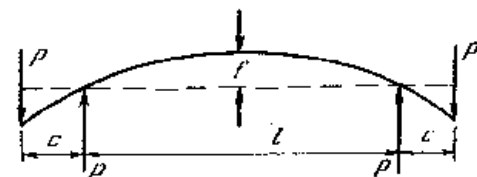


Рис. 224.

6. Найти $q_{\text{пред}}$ для равномерно нагруженной квадратного сечения балки (рис. 225), если площадь поперечного сечения $F = 56,25 \text{ см}^2$, $l = 120 \text{ см}$ и $\sigma_T = 2400 \text{ кг/см}^2$.

Ответ. $q_{\text{пред}} = 140 \text{ кг/см}$.

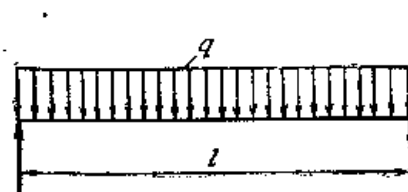


Рис. 225.

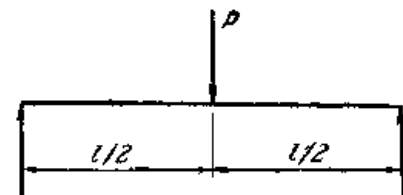


Рис. 226.

7. Показать общий вид видоизмененной эпюры изгибающих моментов и найти приближенное значение прогибов посредине пролета равномерно

нагруженной квадратного сечения балки (рис. 225), если $q^2/8 = 1,4 M_1$, а прочие данные те же, что и в предыдущей задаче.

8. Найти прогиб посредине прямоугольной балки, показанной на рис. 226, если $P_1 = 3,6 M_{\text{пред}}$. Показать контуры пластических областей балки.

65. Предельное сопротивление систем

Обычная практика проектирования металлических конструкций, воспринимающих статические нагрузки, сводится к выбору безопасных размеров конструкции при том условии, чтобы рабочая нагрузка, умноженная на коэффициент безопасности, вызвала наибольшее напряжение, равное пределу текучести материала¹⁾. Однако в большинстве случаев начало текучести не означает полного разрушения, и сооружение обычно будет выдерживать нагрузку, большую той, при которой начинается текучесть. Чтобы использовать эту дополнительную способность сопротивления, было предложено²⁾ при выборе надлежащих размеров сооружения вычислять предельное значение нагрузки для предполагаемых размеров сооружения. Тогда безопасная нагрузка на сооружение может быть получена как некоторая определенная часть того предельного значения, которое представляет нагрузку, вызывающую полное разрушение сооружения. Коэффициент безопасности в этом случае, естественно, будет выше, чем в случае, если нагрузка при пределе текучести принята за основу расчета. Процесс расчета, который принимает предельную нагрузку за основу для выбора безопасных размеров сооружения, называется *расчетом по предельному состоянию*. В последующем изложении будет рассмотрено несколько примеров приложения такого расчета к различным сооружениям.

Начиная со статически определимых систем, мы заключаем, что усилия, действующие на элементы таких сооружений, определяются из уравнения статики и не зависят от механических свойств материала при условии, что деформации остаются малыми. Если такая система сос-

¹⁾ Случай, в которых размеры выбираются на основании рассмотрения упругой устойчивости, не изучаются в этом параграфе.

²⁾ Этот метод определения безопасных размеров стальных сооружений был предложен N. C. Kistrom, Eisenbau, т. 11, 1920. Опыты для определения предельных нагрузок были проделаны Mair-Leibnitz'ом, Bautechnik, 1928 и K. Girkman'ом, Bautechnik, 1932. Теоретическое изложение изгиба балок за пределом текучести было дано J. Fritsche, Bauingenieur, 1930 и 1931. Сочетание изгиба и сжатия было рассмотрено K. Girkman'ом, Sitzungsber. Akad. Wissensch., Wien, ч. II, т. 140, 1931. В последнее время важная работа в этой области была выполнена в Кембриджском университете, Англия, под руководством J. F. Clark'a, см. J. Inst. Civil Engrs., т. 31, стр. 188, 1949 и статью B. G. Neal'a and P. S. Symonds'a Proc. Inst. Civil Engrs., 1952. В США вопрос расчета на основании предельной нагрузки рассматривался J. A. van den Broeck'ом, Trans. Am. Soc. Civil Engrs., т. 105, стр. 638, 1940. См. также статью H. J. Greenberg'a and W. Prager'a, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., т. 77, 1951.

тоит из стержней, испытывающих растяжение или сжатие, как в случае фермы с шарнирными узлами, нагрузка, при которой начинается текучесть, является также и предельной нагрузкой, так как при идеально пластичном материале (рис. 216) текучесть продолжается при постоянном напряжении. В случае изгиба балок отношение предельной нагрузки к нагрузке, при которой начинается текучесть, будет равняться отношению $M_{\text{пред}}/M_T$ и будет зависеть, как мы видели, от формы поперечного сечения балки.

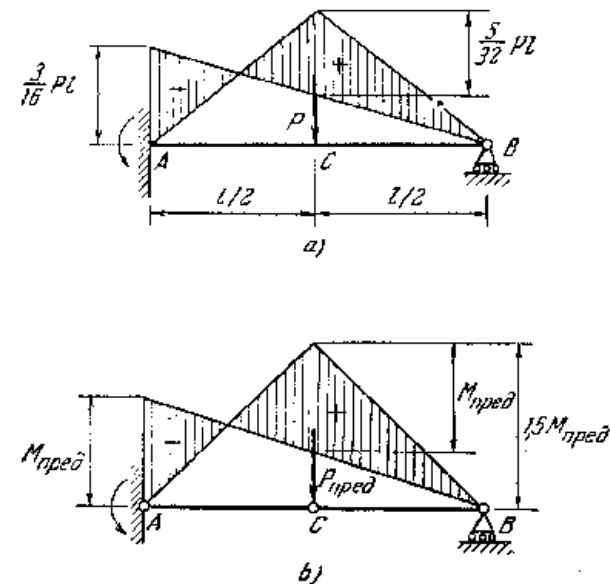


Рис. 227.

В статически неопределимых системах вопрос об анализе напряженного состояния становится более сложным, так как условия, действующие на элементы системы, зависят в этом случае не только от величины внешних сил, но также и от упругих и пластических свойств элементов системы, и требуется рассмотрение деформаций конструкции. Методы, применяемые при исследовании деформаций в пределах упругости, отличны от методов, применяемых при изучении пластических деформаций. Разница в этих двух методах будет теперь пояснена на нескольких примерах.

Перейдем к рассмотрению статически неопределимых случаев изгиба балок постоянного поперечного сечения. Возьмем, например, балку с одним зашпеленным концом и другим свободно опертым (рис. 227). Рассматривая сначала изгиб, происходящий в пределах упругости, и учитывая, что концы A балки зашпелены, мы находим эпюру изгибающих моментов, которая показана на рис. 227, а заштрихованной площадью (см. т. 1, стр. 158). Если мы возьмем за основу

расчета нагрузку, при которой начинается текучесть, то установим, что наибольший изгибающий момент имеет место в конце A балки, и значение P_T определяется условием

$$\frac{3}{16} P_T l = M_T,$$

которое дает

$$P_T = \frac{16}{3} \frac{M_T}{l}. \quad (a)$$

При вычислении $P_{пред}$ мы замечаем, что, когда нагрузка увеличивается за P_T , текучесть начинается в заштыленном конце A . При несколько большей нагрузке чем P_T , текучесть начинается в поперечном сечении C , где имеется другая вершина в эпюре изгибающих моментов. Продолжая увеличивать нагрузку, найдем, что условие образования пластического шарнира достигается на конце A балки, но это условие не вызывает полного разрушения балки. Сооружение будет сопротивляться далее с увеличением нагрузки до тех пор, пока изгибающий момент в поперечном сечении C также достигнет значения $M_{пред}$. Тогда возникнут пластические шарниры в A и C при свободном повороте в B . Это и есть предельное состояние, соответствующее полному разрушению балки. Изгибающие моменты в A и C для этого случая будут численно равны $M_{пред}$, а эпюра изгибающих моментов станет такой, как на рис. 227, b . Отсюда видим, что наибольшая ордината треугольника в точке C , соответствующая нагрузке $P_{пред}$ равняется $1,5 M_{пред}$ и $P_{пред}$ вычисляется по условию

$$\frac{P_{пред} l}{4} = 1,5 M_{пред},$$

которое дает

$$P_{пред} = \frac{6M_{пред}}{l}. \quad (b)$$

Из условий (a) и (b) теперь получаем

$$\frac{P_{пред}}{P_T} = \frac{9}{8} \frac{M_{пред}}{M_T}, \quad (c)$$

т. е. отношение нагрузок $P_{пред} : P_T$ больше в статически неопределимом случае, чем значение отношения $M_{пред} : M_T$, которое получается в статически определимом случае.

Видно также, что путем введения пластических шарниров в A и C (рис. 227, b) мы имеем задачу, которая может быть легко решена уравнениями статики, что значительно проще, чем в статически неопределимой задаче на рис. 227, a . Таким образом, вычисление $P_{пред}$ по предельному состоянию проще, чем вычисление P_T в расчете, основанном на предположении упругого поведения сооружения. Это более правдоподобно, так как результаты, получаемые на основании

допущения о совершенной упругости, зависят от точности предполагаемых условий на концах балки. Незначительное же вращение заделанного конца A или небольшое понижение опоры B может значительно изменить величину P_T , в то время как несовершенство такого рода не оказывает влияния на значение $P_{пред}$, вычисленное для статически определимой системы по рис. 227, b . Таковы два главных преимущества метода предельного расчета.

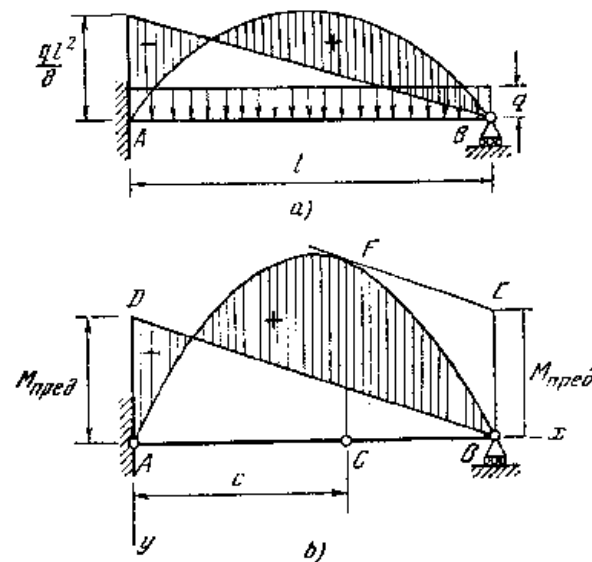


Рис. 228.

В качестве второго примера рассмотрим случай равномерно нагруженной балки с одним заштыленным концом и с другим свободно опертым (рис. 228). В упругой стадии эпюра изгибающих моментов будет такой, как показано, рис. 228, a . Численно наибольшее значение изгибающего момента будет в заштыленном конце, и величина нагрузки q_T найдется из уравнения

$$\frac{q_T l^2}{8} = M_T,$$

которое дает

$$q_T = \frac{8M_T}{l^2}. \quad (d)$$

Если мы будем продолжать увеличивать нагрузку сверх значения q_T , текучесть в заштыленном конце A будет продолжаться, а соответствующий изгибающий момент будет увеличиваться до значения $M_{пред}$, когда в точке A образуется пластический шарнир. Чтобы довести балку до полного разрушения, следует продолжать увеличение нагрузки до значения $q_{пред}$, при котором образуется пластический шарнир

в некотором промежуточном поперечном сечении C балки (рис. 228, b). Положение поперечного сечения C и значение $q_{\text{пред}}$ будут найдены из условий, что изгибающий момент в C является наибольшим и что он равен $M_{\text{пред}}$. Пользуясь заштрихованной эпюрой изгибающих моментов на рис. 228, b , запишем эти условия в следующем виде:

$$M = \frac{q_{\text{пред}} l}{2} x - \frac{q_{\text{пред}} x^2}{2} - \frac{M_{\text{пред}}(l-x)}{l} = M_{\text{пред}} \quad (e)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_{\text{пред}} l}{2} - q_{\text{пред}} x - \frac{M_{\text{пред}}}{l} = 0. \quad (f)$$

Из этих уравнений получим

$$x = c = l(2 - \sqrt{2}), \quad q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{l^2(3 - 2\sqrt{2})}, \quad (g)$$

а на основании выражений (d) и (g) заключаем, что

$$\frac{q_{\text{пред}}}{q_{\text{г}}} = 1,46 \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{г}}}. \quad (h)$$

При рассмотрении более общих случаев пластической деформации конструкций замечаем, что за пределом упругости принцип наложения неприменим, и деформация сооружения зависит не только от окончательных значений нагрузок, но также и от порядка, в котором нагрузки приложены к сооружению. Возьмем, например, случай, показанный на рис. 229, a . Если обе силы приложены одновременно, то соответствующая эпюра изгибающих моментов будет иметь форму, показанную на рис. 229, b , и наибольший изгибающий момент равен $Pl/9$. Мы видим, что деформация будет совершенно упругой, если

$$P < \frac{9M_{\text{г}}}{l}. \quad (i)$$

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка P сначала приложена в поперечном сечении B , а нагрузка в C приложена после. После того как нагрузка приложена в B , соответствующая эпюра изгибающих моментов имеет вид, показанный на рис. 229, c ; наибольший изгибающий момент будет в два раза больше, чем в предыдущем случае, и может произвести пластическую деформацию, хотя условие (i) удовлетворяется. Эта пластическая деформация не будет устранена

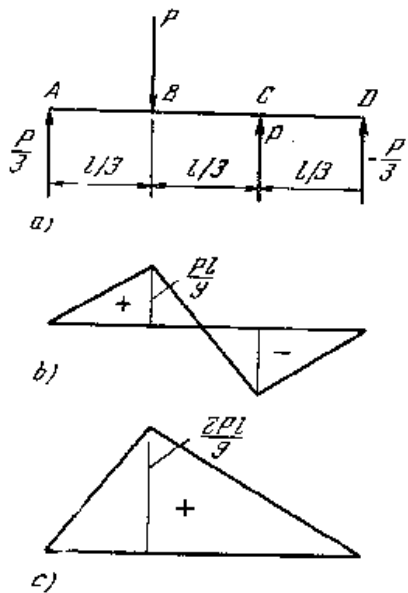


Рис. 229.

последующим приложением силы P в поперечном сечении C , и окончательная деформация балки будет отлична от случая одновременного приложения сил в поперечных сечениях B и C . В наших дальнейших рассуждениях мы будем всегда предполагать, что силы приложены одновременно и что в процессе нагружения отношения между силами остаются постоянными и равными отношению окончательных значений сил. Все силы будут обозначены одним и тем же символом, умноженным на числовые коэффициенты, указывающие требуемые отношения между величинами сил.

В ранее разобранных задачах, например показанных на рис. 227 и 228, была только одна возможность размещения пластических шарниров, и приходилось рассматривать только одну форму разрушения балки. Но если на балку действует несколько сил, то будет несколько различных возможных положений пластических шарниров и несколько возможных форм разрушения балки. Естественно, проектировщик должен выбрать из всех возможных форм разрушения ту, которая отвечает наименьшему значению нагрузок. Тогда эти нагрузки будут рассматриваться как предельные нагрузки для сооружения.

В качестве примера выбора надлежащих положений для пластических шарниров рассмотрим балку на рис. 230, которая заделана в A , свободно опирается в B и несет два груза P и $2P$. Эпюру изгибающих моментов в этом случае будем изображать пунктиром, чертivy же, соответствующие наибольшим изгибающим моментам, будут находиться на вертикалях, проходящих через поперечные сечения A , C и D . При условии полного разрушения пластические шарниры будут образовываться в двух из этих трех поперечных сечений. Все возможные положения этих шарниров и соответствующие формы разрушения показаны на рис. 230, $b-d$. Замечая, что в каждом пластическом шарнире моменты $M_{\text{пред}}$ направлены так, чтобы препятствовать взаимному повороту частей балки, мы можем написать уравнение равновесия для каждого участка балки и определить величину P , соответствующую предполагаемой форме разрушения. Например, для формы, показанной на рис. 230, b , соответствующие

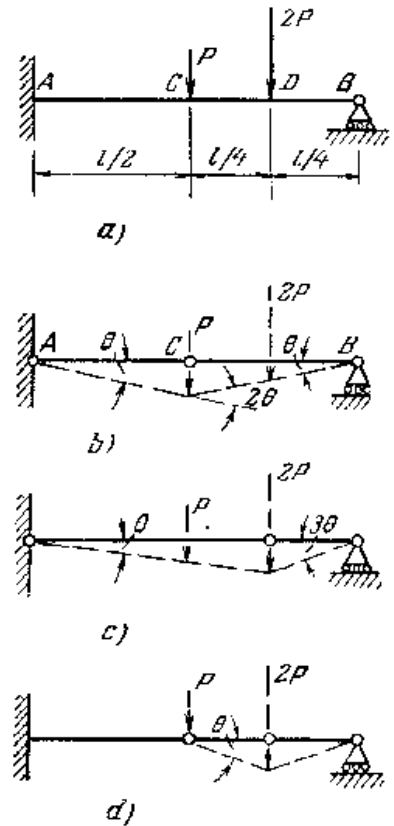


Рис. 230.

изгибающий момент будет в два раза больше, чем в предыдущем случае, и может произвести пластическую деформацию, хотя условие (i) удовлетворяется. Эта пластическая деформация не будет устранена

силы показаны на рис. 231, а, и уравнения равновесия будут

$$\frac{Ql}{2} - 2M_{\text{пред}} = 0, \quad \frac{(Q-P)l}{2} + M_{\text{пред}} - \frac{Pl}{2} = 0,$$

откуда мы находим

$$P_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{l}.$$

Вместо того чтобы применять уравнения равновесия, подобные приведенным выше, удобно при вычислении $P_{\text{пред}}$ использовать принцип виртуальных перемещений⁴⁾. Рассматривая опять форму разрушения, показанную на рис. 230, б, мы видим, что путем введения

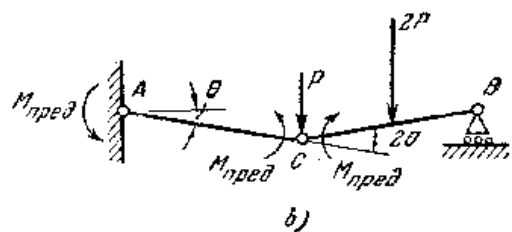
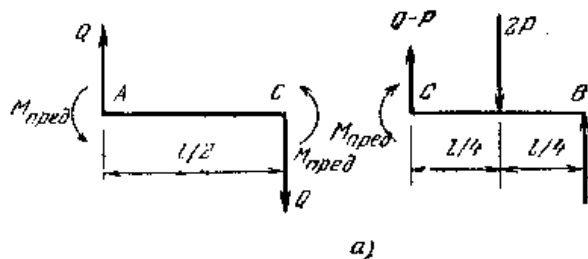


Рис. 231.

пластических шарниров в А и С мы получаем механизм, состоящий из двух шарнирных частей (рис. 231, б). Чтобы написать условие равновесия этого механизма, рассмотрим виртуальное перемещение, определяемое малым углом поворота θ . При этом повороте моменты $M_{\text{пред}}$ в поперечных сечениях А и С, препятствуя вращению, будут производить работу, равную $-\theta M_{\text{пред}}$ и $-2\theta M_{\text{пред}}$. В то же самое время грузы P и $2P$ произведут работу, равную $\frac{P\theta l}{2}$ и $\frac{2P\theta l}{4}$, так что уравнение виртуальных перемещений получается в следующем виде:

$$-\theta M_{\text{пред}} - 2\theta M_{\text{пред}} + \frac{P\theta l}{2} + \frac{2P\theta l}{4} = 0,$$

⁴⁾ Этот метод вычисления был рассмотрен J. E. Вакером, J. Inst. Structural Engrs., т. 27, стр. 397, 1949.

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{l}. \quad (j)$$

Поступая таким же путем и в случаях, показанных на рис. 230, с и 230, д, получаем следующие результаты:

$$P_{\text{пред}} = \frac{2,5M_{\text{пред}}}{l}, \quad P_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пред}}}{l}. \quad (k)$$

Сравнивая результаты выражений (j) и (k), заключаем, что для балки, представленной на рис. 230, а, предельная нагрузка равна $P_{\text{пред}} = 2,5M_{\text{пред}}/l$, а соответствующая форма разрушения показана на рис. 230, с.

Метод вычисления предельных нагрузок, который был применен в предыдущих задачах о балках, можно использовать также при рассмотрении предельного сопротивления рам. Рассмотрим раму, показанную на рис. 232, а, которая имеет три лишних неизвестных усилия.

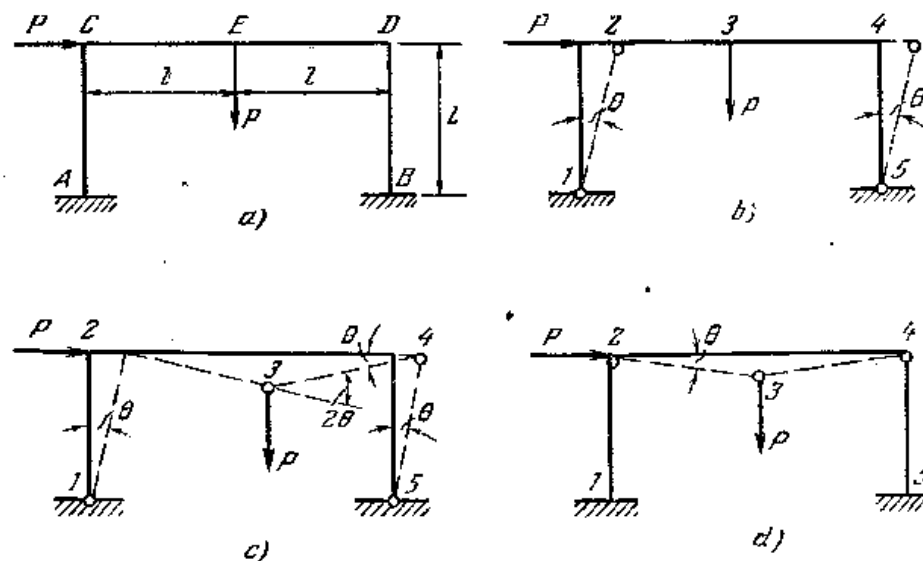


Рис. 232.

Мы можем взять, например, за три лишних неизвестные изгибающий момент и две составляющие реактивной силы в В. Если эти три величины известны, то момент и две составляющие усилия в любом поперечном сечении рамы можно легко найти из уравнений статики. Мы можем сделать систему также статически определимой, если наметим в ней три шарнира. Например, принимая шарниры в А, В и Е, получаем систему, которую можно легко рассчитать как трехшарнирную арку. Для того чтобы сделать из рамы подвижную систему

(или механизм), мы должны ввести четыре пластических шарнира. Чтобы определить положения этих шарниров, замечаем, что энора изгибающих моментов будет иметь вершины в поперечных сечениях 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 232), где действуют сосредоточенные силы. Пластические шарниры должны быть помещены в некоторых из этих поперечных сечений, так как изгибающий момент достигает своих наибольших численных значений в этих точках. Два возможных способа помещения четырех пластических шарниров, которые соответствуют двум различным формам разрушения рамы, показаны на рис. 232, *b* и 232, *c*¹⁾.

На рис. 232, *d* мы имеем особый случай разрушения. Вводя только три пластических шарнира, мы, естественно, не получим механизма такого же типа, как в двух предыдущих случаях. Когда образованы пластические шарниры в поперечных сечениях 2, 3 и 4, то не происходит неограниченного относительного поворота в этих шарнирах при дальнейшем увеличении нагрузки P . Два стержня 2—3 и 3—4 после некоторого вращения будут в состоянии сопротивляться дальнейшему увеличению нагрузки P , работая на растяжение. По соответствующие перемещения будут большими, и придется рассмотреть также и эту деформацию, как представляющую полное разрушение рамы.

Чтобы вычислить значения $P_{\text{пред}}$ соответствующие трем различным формам разрушения, показанные на рис. 232, используем размеры, показанные на рисунке, и предположим, что поперечное сечение горизонтального стержня CD больше поперечного сечения вертикальных стержней и что $M_{\text{пред}}$ представляет предельный момент для вертикальных стержней, а $1,5M_{\text{пред}}$ является предельным моментом для горизонтального стержня²⁾. Виртуальные перемещения будут определяться малым углом θ . Тогда уравнение равновесия для случая, показанного на рис. 232, *b*, будет

$$P\theta l - 4\theta M_{\text{пред}} = 0,$$

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{4M_{\text{пред}}}{l}.$$

Для случая рис. 232, *c* уравнение равновесия будет

$$P\theta l + P\theta l - 2\theta M_{\text{пред}} - 1,5(2\theta)M_{\text{пред}} - 2\theta M_{\text{пред}} = 0,$$

откуда

$$P_{\text{пред}} = \frac{3,5M_{\text{пред}}}{l};$$

¹⁾ По вопросу о выборе всех возможных форм разрушения рамных конструкций см. статью P. S. Symonds'a and B. G. Neal'a, J. Inst. Civil Engrs., т. 35, стр. 21, 1950.

²⁾ Пластические шарниры в узлах будут образовываться в слабейших стержнях, как показано кружками на рис. 232, *b*, *c* и *d*.

для случая *жс* на рис. 232, *d* получаем таким же путем

$$P_{\text{пред}} = \frac{5M_{\text{пред}}}{l}.$$

По этим результатам заключаем, что действительной формой разрушения будет показанная на рис. 232, *c* и что предельная нагрузка равняется

$$P_{\text{пред}} = \frac{3,5M_{\text{пред}}}{l}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти значения $P_{\text{пред}}$ и $q_{\text{пред}}$ для балок, показанных на рис. 233.

Ответ. а) $P_{\text{пред}} = \frac{8M_{\text{пред}}}{l}$, б) $q_{\text{пред}} = \frac{16M_{\text{пред}}}{l^2}$, в) $P_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пред}}}{l}$.

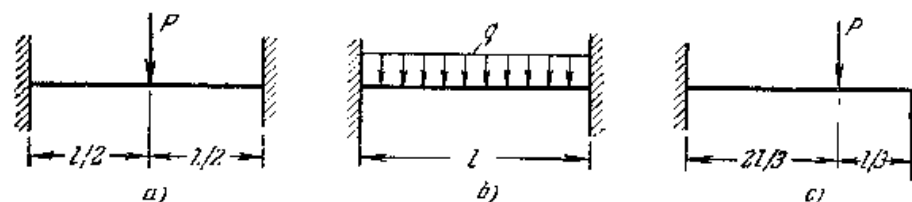


Рис. 233.

2. Двухпролетная балка постоянного поперечного сечения равномерно нагружена (рис. 234). Найти $q_{\text{пред}}$, предполагая, что $l_1 > l_2$.

Ответ. $q_{\text{пред}} = \frac{2M_{\text{пред}}}{l_1^2(3 - 2\sqrt{2})}$.

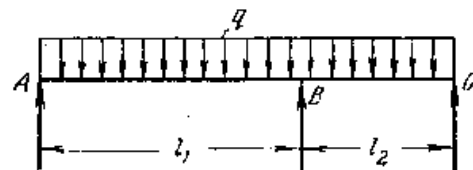


Рис. 234.

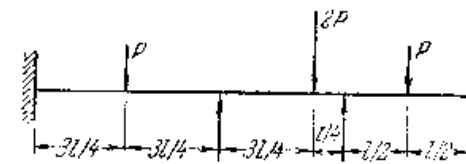


Рис. 235.

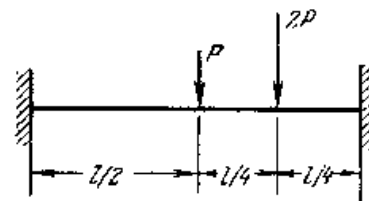


Рис. 236.

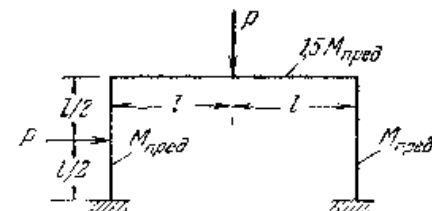


Рис. 237.

3. Найти значение $P_{\text{пред}}$ для неразрезной балки постоянного поперечного сечения, показанной на рис. 235. Показать форму разрушения.

Ответ. $P_{\text{пред}} = \frac{16M_{\text{пред}}}{3l}$.

4. Балка с защемленными концами подвергается действию двух сил P и $2P$ (рис. 236). Найти $P_{\text{пред}}$ и показать соответствующую форму разрушения.

Ответ. $P_{\text{пред}} = \frac{4M_1}{l}$ рад.

5. Найти $P_{\text{пред}}$ и соответствующую форму разрушения рамы, показанной на рис. 237.

66. Чистый изгиб балок, материал которых не следует закону Гука

В предыдущих параграфах предполагалось, что материал балок был идеально пластичным (рис. 216). Рассмотрим теперь более общий случай, в котором механические свойства материала представлены кривой AOB диаграммы на рис. 238. При рассмотрении чистого изгиба таких балок будем предполагать по-прежнему, что поперечные сечения балки остаются плоскими при изгибе; следовательно, удлинения и укорочения продольных волокон пропорциональны их расстояниям от нейтрального слоя. Взяв это за основу дальнейших выводов и предположив, что при изгибе существует такое же соотношение между напряжением и деформацией, как и в случае простого растяжения и сжатия, мы сможем легко найти напряжения, возникающие в балке от изгибающего момента любой заданной величины¹⁾.

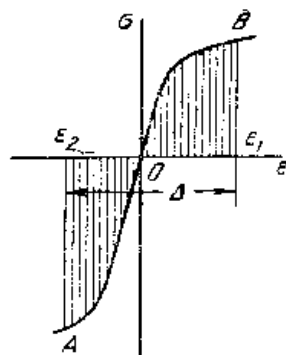


Рис. 238.

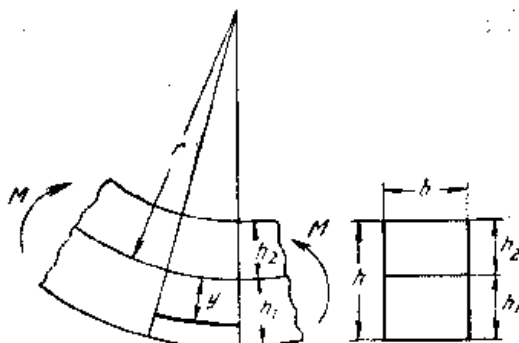


Рис. 239.

Начнем с балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 239) и предположим, что радиус кривизны нейтрального слоя при действии изгибающих моментов M равен r . В таком случае относительное удлинение волокна, находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя, равно

$$\varepsilon = \frac{y}{r}. \quad (a)$$

Обозначив через h_1 и h_2 расстояния от нейтральной оси соответственно до нижней и верхней поверхностей балки, находим, что удлинения в крайних волокнах будут

$$\varepsilon_1 = \frac{h_1}{r}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{h_2}{r}. \quad (b)$$

Видно, что удлинение или укорочение какого-либо волокна легко получается при условии, что известны положение нейтральной оси и радиус кривизны r . Эти две величины можно найти из двух уравнений статики:

$$\int_F \sigma dF = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = 0, \quad (c)$$

$$\int_F \sigma y dF = b \int_{-h_2}^{h_1} \sigma y dy = M. \quad (d)$$

Первое из этих уравнений устанавливает, что сумма нормальных усилий, действующих по любому поперечному сечению балки, обращается в нуль, так как эти усилия образуют пару сил. Вторым уравнением устанавливается, что момент тех же сил относительно нейтральной оси равен изгибающему моменту M .

Применим уравнение (c) для определения положения нейтральной оси. Из выражения (a) имеем

$$y = r\varepsilon, \quad dy = r d\varepsilon. \quad (e)$$

Подставляя в уравнение (c), получаем

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma dy = r \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = 0. \quad (f)$$

Следовательно, положение нейтральной оси таково, что интеграл $\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$ обращается в нуль. Чтобы определить это положение, воспользуемся кривой AOB на рис. 238, которая представляет собой диаграмму испытания на растяжение и сжатие материала балки; обозначим через Δ сумму абсолютных значений наибольшего удлинения и наибольшего укорочения, т. е.

$$\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r} = \frac{h}{r}. \quad (g)$$

Чтобы решить уравнение (f), мы должны так отметить длину Δ на горизонтальной оси (рис. 238), чтобы две заштрихованные на рисунке площади стали равными. Таким образом, мы найдем деформации ε_1 и

¹⁾ Эта теория была разработана Сен-Венаном в его примечаниях к книге Navier, *Résumé des Leçons*, 3-е изд., стр. 173, 1864. См. также статью: E. Maue, *Phys. Z.*, 1907 и H. Neuber, *Диссертация*, Гёттинген, 1909.

ε_2 в крайних волокнах. Выражения (b) тогда дадут

$$\frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right|, \quad (b)$$

чем и определится положение нейтральной оси. Замечая, что удлинения ε пропорциональны расстояниям от нейтральной оси, заключаем, что кривая AOB также представляет распределение напряжений при изгибе по высоте балки, если вместо Δ подставить h .

Для определения радиуса кривизны r воспользуемся уравнением (d). Подставляя вместо y и dy их значения из выражений (e), представим уравнение (d) в форме

$$br^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = M, \quad (i)$$

Замечая, что по формуле (g) $r = h/\Delta$, можем уравнение (i) после простого преобразования привести к виду

$$\frac{bh^3}{12} \frac{1}{r} \frac{12}{\Delta^3} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon = M. \quad (j)$$

Сравнивая этот результат с известным уравнением

$$\frac{EJ}{r} = M \quad (k)$$

для изгиба балок, следующих закону Гука, заключаем, что за пределом пропорциональности кривизна, вызываемая моментом M , может быть вычислена из уравнения

$$\frac{E_r J}{r} = M, \quad (281)$$

в котором E_r — *приведенный модуль упругости*, определяемый выражением

$$E_r = \frac{12}{\Delta^3} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon. \quad (282)$$

Интеграл этого выражения представляет собой момент относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат O заштрихованной площади, показанной на рис. 238. Так как ординаты кривой на рисунке представляют напряжения, а абсциссы — относительные деформации, то интеграл, а также E_r имеют размерность кг/см^2 , т. е. ту же, что и модуль упругости E .

Величина E_r для данного материала, соответствующая данной на рис. 238 кривой, является функцией Δ или h/r . Взяв ряд значе-

ний Δ и воспользовавшись кривой на рис. 238, как уже объяснено, мы получим для каждого значения Δ соответствующие крайние значения ε_1 и ε_2 , и по выражению (282) определим соответствующие значения E_r . Таким образом, получится кривая, представляющая E_r как функцию $\Delta = h/r$. На рис. 240 такая кривая показана для строительной стали с $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ и пределом пропорциональности, равным 2100 кг/см^2 . В этом случае при $\Delta < 0,002 E_r$ остается

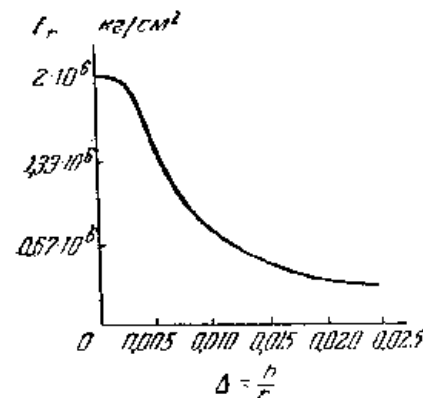


Рис. 240.

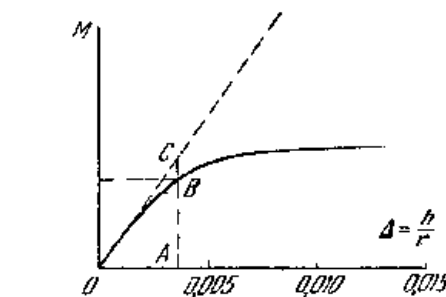


Рис. 241.

постоянным и равным E . При помощи такой кривой момент, соответствующий любой предполагаемой кривизне, можно легко вычислить из уравнения (281), и мы можем начертить кривую (рис. 241), считая момент функцией Δ . Для малых значений Δ материал следует закону Гука, и кривизна пропорциональна изгибающему моменту M , как показано на рис. 241 прямой линией OC . За пределом пропорциональности скорость изменения кривизны увеличивается с увеличением момента.

Если вместо прямоугольника мы имеем какую-либо другую симметричную форму поперечного сечения с переменной шириной b поперечного сечения, то уравнения (c) и (d) должны быть написаны в следующем виде:

$$\int_{-h_2}^{h_1} b \sigma dy = r \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b \sigma d\varepsilon = 0, \quad (l)$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} b \sigma y dy = r^2 \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} b \sigma \varepsilon d\varepsilon = M. \quad (m)$$

Возьмем в качестве примера случай таврового сечения (рис. 242). Если обозначить через ε' продольную деформацию в месте сопряжения стенки и полки, то уравнения (l) и (m) можно написать в

следующем виде:

$$\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon'} \sigma d\varepsilon + \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma d\varepsilon = 0, \quad (n)$$

$$br^2 \left(\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon'} \sigma \varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon_1} \frac{b_1}{b} \sigma \varepsilon d\varepsilon \right) = M. \quad (o)$$

Видно, что в этом случае ординаты кривой растяжения AOB (рис. 243) в области, соответствующей полке поперечного сечения, должны быть увеличены в отношении b_1/b . Для определения положения нейтральной оси поступим, как в предыдущем случае, пользуясь диаграммой растяжения — сжатия (рис. 243), и так отметим на горизонтальной оси положение предполагаемой длины $\Delta = h/r$, чтобы две заштрихованные площади получились численно равными одна другой. В результате найдутся деформации ε_1 и ε_2 крайних волокон. Деформации ε' в месте сопряжения стенки и полки получится из уравнения

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'}{\Delta} = \frac{c}{h},$$

Рис. 242.

в котором c есть толщина полки (рис. 242). Определив положение нейтральной оси и замечая, что выражение в скобках уравнения (o) представляет собой момент заштрихованных на рис. 243 площадей относительно вертикальной оси, проходящей через начало координат O , мы можем легко вычислять по уравнению (o) момент M , соответствующий принятому значению $\Delta = h/r$. Таким образом, для балки таврового сечения можно построить кривую, подобную показанной на рис. 241. Аналогично можно поступить и с двутавровой балкой.

В предыдущих примерах для определения положения нейтральной оси и величины радиуса кривизны r была использована диаграмма испытания на растяжение и сжатие. Если существует аналитическое выражение для кривой AOB , то приведенные выше величины можно получить только вычислением, не применяя графического метода, разъясненного на рис. 238 и 243. Наиболее общее уравнение для кривых напряжение — деформация было применено Сен-Венаном¹⁾. Он предположил, что для изгиба за пределом пропорциональности распределение растягивающих и сжимающих напряжений

Рис. 243.

¹⁾ Цит. на стр. 304. См. также статью W. R. Osgood'a, J. Aeronaut. Sci., т. 11, стр. 213, 1944.

по высоте балки можно представить следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{a} \right)^m \right], \\ \sigma' &= \sigma'_0 \left[1 - \left(1 - \frac{y_1}{b} \right)^n \right], \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

в которых σ_0 и σ'_0 , а также a и b являются некоторыми постоянными, которые вместе с показателями степени m и n определяют кривые распределения напряжений, показанные на рис. 241. Для очень малых расстояний y и y_1 мы можем допустить, что

$$\left(1 - \frac{y}{a} \right)^m \approx 1 - \frac{my}{a}$$

и

$$\left(1 - \frac{y_1}{b} \right)^n \approx 1 - \frac{ny_1}{b},$$

и уравнения (p) дают

$$\sigma = \frac{\sigma_0 my}{a} = \frac{\sigma_0 nr \varepsilon}{a} \quad \text{и} \quad \sigma' = \frac{\sigma'_0 ny_1}{b} = \frac{\sigma'_0 nr \varepsilon}{b}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma_0 nr}{a} = E_1 \quad \text{и} \quad \frac{\sigma'_0 nr}{b} = E_2, \quad (q)$$

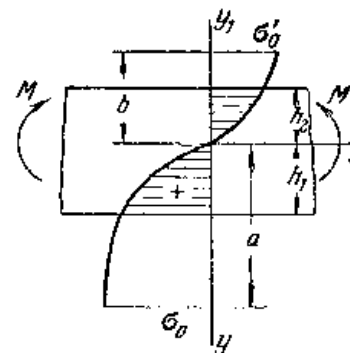


Рис. 244.

где E_1 и E_2 — модули упругости материала соответственно для очень малых растяжения и сжатия. Если эти два модуля упругости материала равны между собой, то две кривые, определяемые уравнениями (p), имеют общую касательную на нейтральной оси, и мы имеем

$$\frac{\sigma_0 m}{a} = \frac{\sigma'_0 n}{b}. \quad (r)$$

Используя уравнения (p) и уравнения равновесия (c) и (d), можно вычислить в каждом частном случае положение нейтральной оси и радиус кривизны. Взяв, например, $m = n = 1$ и воспользовавшись выражениями (q), получим на основании уравнений (p)

$$\sigma = \frac{E_1 y}{r}, \quad \sigma' = \frac{E_2 y_1}{r}. \quad (s)$$

Это случай, в котором материал балки следует закону Гука, но имеет разные модули упругости при растяжении и сжатии. Подставляя выражения (s) в уравнение (c) и предполагая, что балка имеет прямоугольное поперечное сечение, получаем

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2,$$

что совместно с равенством $h_1 + h_2 = h$ дает

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}.$$

Тогда из уравнения (d) найдем

$$\frac{E_1 h_1}{r} \frac{bh_1}{2} \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{12r} \frac{1}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}.$$

Видно, что в этом случае кривизна получается из уравнения (281) при следующем значении приведенного модуля упругости:

$$E_r = \frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2} \quad (283)$$

Этим модулем упругости иногда пользуются для вычисления нагрузки, которая вынуждает колонну, сжатую за пределом пропорциональности материала (см. стр. 153).

В качестве другого примера предположим, что кривые напряжение — деформация при растяжении и сжатии одинаковы. Тогда в уравнениях (р) $m = n$, $a = b$ и $\sigma_0 = \sigma_0'$. Предполагая также, что $a = b = h/2$, находим из уравнения (д) для прямоугольной балки

$$M = \sigma_{\max} \frac{bh^2}{6} \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)} \quad (284)$$

Нейтральная ось в этом случае проходит через центр тяжести поперечного сечения. Кривые, дающие распределение напряжений для различных значений показателя степени m , показаны на рис. 245. С воз-

растанием m момент приближается к значению

$$M = \frac{3}{2} \sigma_{\max} \frac{bh^2}{6}$$

67. Изгиб балок поперечной нагрузкой за пределом упругости

В случае изгиба балок поперечной нагрузкой мы пренебрегаем действием сдвига на прогиб⁴⁾ и предполагаем, что зависимость между изгибающим моментом и кривизной представляется уравнением (281), выведенным для чистого изгиба. Тогда для вычисления прогибов за пределом пропорциональности можно применить графоаналитический метод (см. т. I, стр. 131). Необходимо лишь заметить, что жесткость при изгибе в этом случае непостоянна, изменяясь с величиной изгибающего момента. Чтобы установить зависимость между этими двумя величинами для прямоугольных балок, воспользуемся кривой на рис. 241. Для любого значения $\Delta = h/r$ ордината AB дает соответствующее значение изгибающего момента, а ордината AC — момент при условии, что материал следует закону Гука. В результате

$$\overline{AB} : \overline{AC} = E_r : E.$$

Таким путем мы получим для каждого предполагаемого значения изгибающего момента отношение $E_r J_r / EJ$ приведенной жесткости изгиба к начальной жесткости изгиба балки. Обозначая это отношение

через β , представим его в функции изгибающего момента M кривой, приведенной на рис. 246.

Чтобы показать, как можно пользоваться этой кривой при вычислении прогибов, рассмотрим случай свободно опертой балки, нагруженной посредине (рис. 247). Эпюра изгибающих моментов в этом случае представляет треугольник ACB . Пусть M_0 будет величина изгибающего момента, до которого материал следует закону Гука. В таком случае участок m балки будет напряжен за пределом пропорциональности, и для вычисления прогиба вместо начальной жесткости изгиба нужно воспользоваться приведенной жесткостью, которая меняется на этом участке балки. Поступая, как в случае балок переменного поперечного сечения (см. т. I, стр. 183), разделим ординаты эпюры изгибающих моментов на соответствующие значения β ,

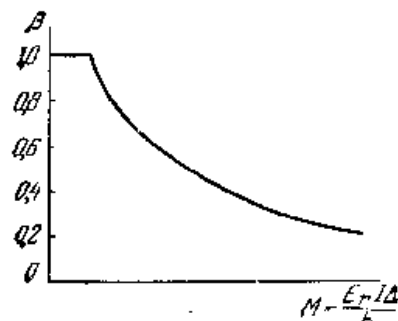


Рис. 246.

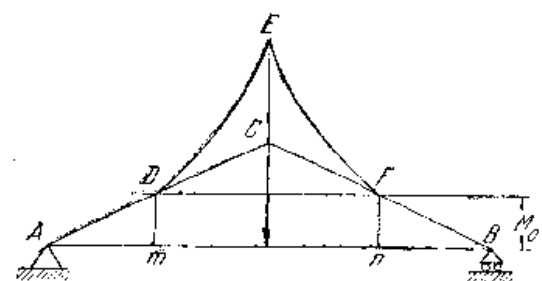


Рис. 247.

взятые из рис. 246. Таким образом, получится измененная эпюра изгибающих моментов $ADEFB$. Рассматривая площадь измененной эпюры изгибающих моментов как фиктивную нагрузку и поступая обычным путем, получаем прогиб в любом сечении балки делением на EJ изгибающего момента, возникающего в этом сечении от фиктивной нагрузки.

Здесь мы рассматривали только случай прямоугольной балки, но тот же метод применим и в других случаях, при условии, что получена кривая для коэффициента β , подобная показанной на рисунке 246. Такую кривую можно построить с помощью метода, иллюстрированного на рис. 243; ее ординаты можно вычислить, если дана аналитическая зависимость между напряжениями и деформациями за пределом пропорциональности материала, подобная уравнениям (р) в п. 66.

В нашем обсуждении изгиба балок поперечными нагрузками предполагалось, что задача была статически определяемой, следовательно, построение эпюры изгибающих моментов не требовало рассмотрения изогнутой оси. В статически неопределимых случаях задача становится более сложной, так как за пределом пропорциональности лишние силы и моменты уже не пропорциональны действующим нагрузкам, и

⁴⁾ Влияние сдвига было рассмотрено А. Eichinger'ом, Final Report, 2d Congr. Intern. Assoc. Bridge and Struct. Engng., Berlin, 1938.

принцип наложения неприменим. Однако иногда задачу можно упростить на основании соображений о симметрии. Предполагая, например, что концы балки на рис. 247 заделаны, мы заключаем из симметрии, что изгибающий момент обращается в нуль в точках, соответствующих четвертям пролета и изогнутая ось состоит из четырех одинаковых участков, которые можно получить таким же путем, как и для консоли, нагруженной на конце. В случае равномерно нагруженной балки с заделанными концами мы на основании симметрии заключаем, что моменты на концах равны между собой. Величину этих моментов можно получить методом последовательных попыток. Необходимо принять некоторое значение для этих моментов и построить измененную эпюру изгибающих моментов, как показано для случая, изображенного на рис. 247. Точным значением моментов, очевидно, будет то, при котором полная фиктивная нагрузка, представленная площадью измененной эпюры изгибающих моментов, обращается в нуль.

Из предыдущих рассуждений можно видеть, что в случае изгиба за пределом пропорциональности вычисление лишних сил и лишних моментов обычно требует более сложных исследований. Однако в случае материалов, которые имеют ясно выраженный предел текучести, как, например, строительная сталь, расчет статически неопределимых сооружений можно значительно упростить, если ограничить нашу рассматриваемую стадию нагружения, при которой сооружение достигает предельной нагрузки и текучесть происходит без дальнейшего увеличения нагрузки (см. п. 65).

68. Остаточные напряжения, вызываемые неупругим изгибом

Если балка изгибается за пределом упругости, возникает некоторая непрерывная текучесть, и деформация не исчезает после удаления нагрузки. Волокна, которые претерпели текучесть, препятствуют упруго напряженным волокнам восстанавливать свою первоначальную длину после разгрузки, и таким путем появляются некоторые *остаточные напряжения*. Чтобы определить распределение этих напряжений по поперечному сечению, начнем с простейшего

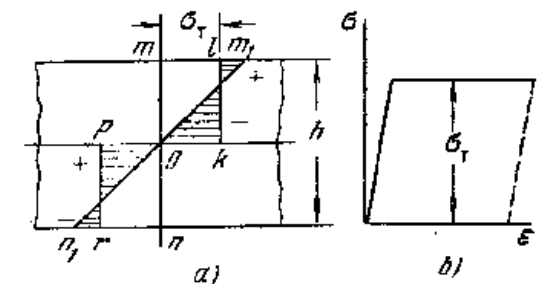


Рис. 248.

случая прямоугольной балки, в которой распределение напряжений при изгибе за пределом текучести можно представить двумя прямоугольниками Okm и $Onrp$, показанными на рис. 248. Предположим также, что материал, будучи растянут за предел текучести и затем разгружен, следует за-

кону Гука при разгрузке, как показано на рис. 248, *b* пунктиром. В результате этого предположения можно заключить, что напряжения при изгибе, которые накладываются во время разгрузки балки, следуют линейному закону, показанному на рис. 248, *a* линией m, n . Наложение этих двух распределений напряжений — прямоугольного во время нагрузки и треугольного во время разгрузки, показанное заштрихованными площадями на рис. 248, *a*, представляет напряжения, которые остаются в балке после разгрузки. Эти остаточные напряжения вызваны в балке пластической деформацией¹⁾. Знаки этих напряжений, как показано на рисунке, были получены при допущении, что начальный изгиб вызывает кривизну выпуклостью вниз.

Так как прямоугольное и треугольное распределения напряжений (рис. 248) оба представляют изгибающие моменты той же величины, можно заключить, что момент относительно оси poK треугольника Om , равен моменту прямоугольника Okm относительно той же оси. Следовательно, напряжение, представленное на рисунке длиной mm , должно быть равно $1,5 \sigma_r$ и наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения, которые остаются в наиболее удаленных полках после разгрузки балки, равны $0,5 \sigma_r$. Остаточные напряжения в волокнах вблизи нейтрального слоя имеют величину σ_r . Можно видеть, что распределение напряжений, представленное на рисунке заштрихованными площадями, сводится к двум разным и противоположным парам сил величиной $\sigma_r b h^3 / 27$, которые находятся в равновесии. Существование этих остаточных напряжений можно показать экспериментально путем распиливания балки вдоль нейтрального слоя. Тогда каждая половина балки получает некоторую кривизну.

Если балка с остаточными напряжениями, как указано на рис. 248, *a*, вновь изгибается моментами той же величины и в том же направлении, как и в предыдущем опыте, напряжения, вызываемые этими моментами и представленные прямой линией m, n , будут накладываться на остаточные напряжения, даваемые заштрихованными площадями, так что результирующее распределение напряжений будет представлено прямоугольниками Okm и $Onrp$. Наибольшее результирующее напряжение равно σ_r и во время этого второго изгиба никакой текучести не наблюдается. Следовательно, остаточные напряжения, вызываемые первым изгибом, таковы по природе, что увеличивают изгибающий момент, который может выдерживаться бруском в упругом состоянии, при условии, что направление изгиба неизменно. Это явление улучшения упругой способности сооружения путем предварительного нагружения и создания подходящих остаточных напряжений

¹⁾ Кажется, что А. Wöhler был первым, который обратил внимание инженеров на остаточные напряжения, вызываемые пластическим изгибом балок; см. S. Timoshenko, History of Strength of Materials, New York, стр. 172, 1953; русский перевод, История науки о сопротивлении материалов, Гостехиздат, 1957, стр. 202.

иногда применяется на практике. Некоторые частные случаи будут рассмотрены ниже (см. п. 78).

В более общем случае неупругого изгиба прямоугольной балки распределение напряжений дается кривой, подобной n_1Om_1 на рис. 249, *a*. Предполагая опять, что при разгрузке материал следует закону Гука, мы находим, что остаточные напряжения, вызываемые пластическим

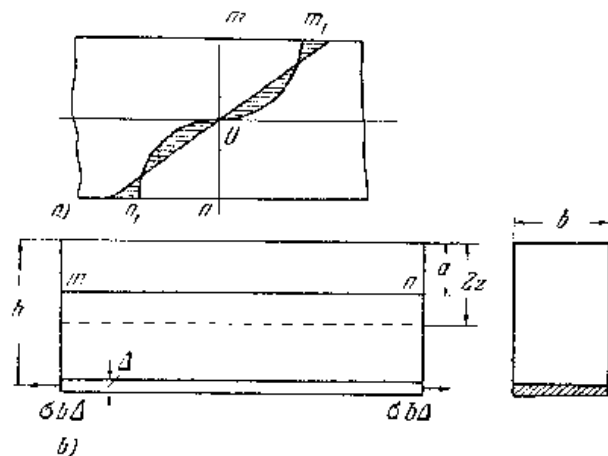


Рис. 249.

течением, распределяются, как показано на рисунке, заштрихованными площадями. Если кривая n_1Om_1 определена, как объяснено в п. 66, то величину остаточного напряжения можно легко получить для каждого волокна. Если же кривая n_1Om_1 неизвестна, то распределение остаточных напряжений можно исследовать опытным путем, снимая в балке один за другим тонкие слои, параллельные нейтральному слою, и измеряя после каждого среза упругую деформацию, которая происходит в балке.

Предположим, что остаточное напряжение на нижней поверхности балки растягивающее, величиной σ . Тогда удаление тонкого слоя толщиной Δ , показанного на рис. 249, *b*, очевидно, вызовет деформацию в остальной части балки, какая была бы вызвана приложением двух равных и противоположных сил $\sigma b \Delta$, показанных стрелками внизу рис. 249, *b*. Мы найдем, что после срезывания тонкого слоя ось балки получит удлинение и кривизну, согласно формулам

$$d(\epsilon) = \frac{\sigma b \Delta}{E b h}, \quad d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sigma b \Delta (h - \Delta) 12}{2 E b (h - \Delta)^3} \approx \frac{\sigma b \Delta h}{2 E J} \quad (a)$$

Отсюда ясно, что если кривизна $d(1/r)$ измерена, то величину остаточного растягивающего напряжения σ в наиболее удаленном волокне легко вычислить по выражению (а).

Определение остаточного напряжения σ_z в волокне m_1 , находящемся в расстоянии a от верхней грани балки (рис. 249, *b*), оказывается более трудным. Снимая один слой за другим, мы, наконец, достигнем слоя m_1

и можем определить напряжение в нем при помощи выражения, подобного выражению (а). Однако это напряжение будет иметь величину σ'_a , отличную от начального остаточного напряжения σ_a , так как удаление предыдущих слоев вызывало изменение напряжений в оставшихся частях балки. Очевидно, что только после исследования этих изменений будет возможно определение требуемого остаточного напряжения σ_a . Предположим, что путем снятия одного слоя за другим мы достигнем волокна, показанного пунктиром на рис. 249, *b* на расстоянии $2z$ от верхней грани балки. Если мы теперь снимем тонкий слой толщиной Δ , то напряжение σ'_z в этом слое получится из уравнения

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sigma'_z b z \Delta}{E J_z},$$

где

$$J_z = \frac{b (2z)^3}{12},$$

откуда

$$\sigma'_z = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right) E J_z}{b z \Delta} \quad (b)$$

Удаление этого слоя вызовет в волокне m_1 напряжение растяжения

$$\frac{\sigma'_z b \Delta}{2 b z} \quad (c)$$

и напряжение изгиба

$$\frac{\sigma'_z b z \Delta (a - z)}{J_z} \quad (d)$$

Уравнения (с) и (d) дают изменения напряжения в волокне m_1 благодаря удалению одного лишь слоя. Принимая теперь во внимание все слои, отвечающие изменению $2z$ от h до a , получим полное изменение остаточного напряжения в волокне m_1 в следующем виде:

$$\sum \frac{\sigma'_z \Delta}{2z} + \sum \frac{\sigma'_z b z \Delta (a - z)}{J_z} \quad (e)$$

где σ'_z для каждого шага вычисляется по формуле (b) при помощи измеренных значений $d(1/r)$. Искомое остаточное напряжение σ_a в волокне m_1 получится теперь путем вычитания величины (e) из напряжения σ'_a , которое определяется подстановкой a вместо $2z$ в формулу (b). Следовательно,

$$\sigma_a = \sigma'_a - \sum \frac{\sigma'_z \Delta}{2z} - \sum \frac{\sigma'_z b z \Delta (a - z)}{J_z} \quad (f)$$

Этот метод экспериментального определения продольных остаточных напряжений можно применять не только в случае изгиба, но также в других случаях пластических стержней, претерпевающих продольную пластическую деформацию (см. п. 70). Он был, например, успешно применен при измерении остаточных деформаций в холоднотянутых латунных трубах¹⁾.

¹⁾ Этот метод был разработан Н. Н. Давиденковым, цит. на стр. 327 и Z. Metallkunde, т. 24, стр. 25, 1932. См. также докторскую диссертацию: C. G. Anderson, University of Michigan, 1935 и статью D. J. Deming and D. O. Leseta, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 46, 1953. Описание

Чтобы снимать тонкие слои металла, был применен в этой работе специальный химический раствор. Изменения кривизны были измерены оптическим методом. Таким путем можно было получить полные сведения относительно остаточных напряжений в холоднотянутых трубах. Такие сведения имеют большое практическое значение для разработки процесса надлежащей горячей обработки труб при их изготовлении.

69. Кручение за пределом упругости

Начнем с рассмотрения кручения круглых валов и предположим, что за пределом упругости поперечные сечения скручиваемого вала продолжают оставаться плоскими, а их радиусы остаются прямыми¹⁾. В таком случае относительный сдвиг γ в расстоянии r от оси вала определится той же формулой, что и в случае кручения в пределах упругости (см. т. I, стр. 239), т. е.

$$\gamma = r\theta, \quad (a)$$

где θ есть угол закручивания на единицу длины вала. Чтобы определить величину крутящего момента, который требуется для закручивания вала на угол θ , необходимо знать зависимость между относительным сдвигом γ и касательным напряжением τ за пределом пропорциональности. Предположим, что диаграмма на рис. 250 дает требуемую зависимость²⁾. Если a есть внешний радиус вала, то наибольшая касательная деформация сдвига равна $a\theta$, а соответствующее наибольшее касательное напряжение будет ординатой m на диаграмме рис. 250. Таким же путем можно легко получить из диаграммы касательное напряжение на любом расстоянии r от оси.

Крутящий момент M_k , который должен вызвать закручивание на угол θ , будет найден из уравнения статики

$$\int_0^a 2\pi r^2 \tau dr = M_k. \quad (b)$$

некоторых методов анализа остаточных напряжений дано в статье C. S. Vaggett'a, там же, т. 21, стр. 147, 1944; см. также статью O. J. Horgger'a в издании M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950.

¹⁾ Эта теория была разработана Сен-Венаном, J. de math., т. 16, стр. 373, 1871. См. также J. Todhunter and K. Pearson, History of the Theory of Elasticity, т. 2, ч. 1, стр. 170. О дальнейшем рассмотрении этого вопроса см. A. Nadai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, стр. 347, 1950.

²⁾ Такую диаграмму можно получить опытным путем, если произвести испытание на кручение тонкой трубы. Чтобы исключить возможность выпучивания, толщину стенки можно довести местным утонением до малой величины, сделав круговую выточку прямоугольной формы в толстой трубе.

Подставляя в это уравнение из выражения (a)

$$r = \frac{\gamma}{\theta}, \quad dr = \frac{d\gamma}{\theta},$$

получаем

$$\frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{a\theta} \gamma^2 \tau d\gamma = M_k. \quad (c)$$

Интеграл левой части этого уравнения имеет простой геометрический смысл; он представляет собой момент инерции относительно вертикальной оси Oz площади $OmnO$ из рис. 250. После вычисления этого момента инерции для любого принятого значения $a\theta$ соответствующий крутящий момент легко получим по выражению (c). Следовательно, можно начертить кривую, представляющую зависимость между M_k и θ , если дана диаграмма на рис. 250. Так как абсциссы на рис. 250 пропорциональны радиальным расстояниям, то кривая Om также представляет в некотором масштабе распределение касательных напряжений по радиусу вала. Если при кручении материал все время следует закону Гука, то мы имеем $\tau = \gamma G = r\theta G$, и выражение (b) дает

$$2\pi\theta G \int_0^a r^3 dr = \theta G J_p = M_k, \quad (d)$$

что является известным уравнением для кручения круглых валов в пределах упругости.

Если материал вала имеет ясно выраженный предел текучести, то криволинейный участок диаграммы на рис. 250 можно заменить горизонтальной линией с абсциссой τ_1 . Следовательно, для большого угла закручивания распределение касательных напряжений по радиусу вала приближается к равномерному распределению. Соответствующую величину крутящего момента обозначают черсой $(M_k)_{пред}$. Его значение получается путем подстановки в уравнение (b) τ_1 вместо τ , что дает

$$(M_k)_{пред} = \frac{2\pi a^3}{3} \tau_1. \quad (e)$$

Когда крутящий момент достигает этого значения, дальнейшее скручивание вала происходит без увеличения крутящего момента, пока не станет заметным упрочнение материала. Для сравнения вычислим также значение крутящего момента $(M_k)_T$, при котором начинается текучесть. Для этой цели воспользуемся формулой (d) и подставим в нее то значение θ , при котором начинается текучесть. Это последнее значение получается из формулы (a), если принять $r = a$ и $\gamma = \gamma_T$, что дает

$$\theta_T = \frac{\gamma_T}{a} = \frac{\tau_T}{aG}.$$

Следовательно, из формулы (d) найдем

$$(M_k)_T = \theta_T G J_p = \frac{\pi a^3}{2} \tau_T. \quad (f)$$

Сопоставляя формулы (e) и (f), видим, что

$$(M_k)_{\text{пред}} : (M_k)_T = \frac{4}{3}.$$

Если после приложения крутящего момента $(M_k)_{\text{пред}}$ мы разгрузим вал, то в нем останутся некоторые остаточные напряжения. Величину этих напряжений можно получить, повторив те же рассуждения, которые были применены в случае изгиба (стр. 312). Пусть ординаты горизонтальной линии mn на рис. 251 представляют касательное напряжение τ_r , вызываемое моментом $M_{\text{пред}}$ равномерно распределенное по радиусу вала. При разгрузке вала материал следует закону Гука, и напряжения от кручения, которые вследствие разгрузки должны быть вычтены, подчинены линейному закону, показанному на рис. 251 линией m_1n_1 . Разность между двумя распределениями напряжений — прямоугольного во время нагружения и

треугольного во время разгрузки — представляет те, которые остаются в вале после разгрузки. Распределение этих напряжений по радиусу вала показано на рис. 251 заштрихованными площадями. Величина ординаты n_1p , обозначаемая через τ_{max} , найдется из тех соображений, что прямоугольное и треугольное распределения напряжений представляют крутящий момент той же величины $M_{\text{пред}}$. Для прямоугольного распределения напряжений этот момент определяется выражением (e). Формула для того же крутящего момента при треугольном распределении напряжений получается путем подстановки в выражение (f) τ_{max} вместо τ_T :

$$\frac{2\pi a^3}{3} \tau_{\text{max}} = \frac{\pi a^3}{2} \tau_T$$

или

$$\tau_{\text{max}} = 1 \frac{1}{3} \tau_T.$$

Видно, что остаточное напряжение от кручения на поверхности вала равно $1/3 \tau_T$, а у центра — τ_T .

Распределение остаточных напряжений при кручении можно также исследовать опытным путем. Для этой цели необходимо снимать последовательно тонкие слои металла с вала и измерять после удаления каждого слоя изменение угла закручивания вала.

В случае идеально пластических материалов (см. стр. 287) можно с успехом применить мембранную аналогию для изучения кручения за пределом текучести. Когда величина крутящего момента несколько больше чем $(M_k)_T$, внешний участок вала находится в условиях текучести, в то время как внутренний участок продолжает деформироваться упруго. Чтобы распространить мембранную аналогию на этот случай, необходимо применить одновременно с мембраной жесткий конус ACB (рис. 252), наклон поверхности которого в надлежащем масштабе представляет напряжение при пределе текучести τ_T . Если на мембрану действует небольшое давление p , ее перемещения будут также небольшими и коническая поверхность не препятствует свободному смещению мембраны. Следовательно, ее поверхность определяет распределение напряжений для случая упругого кручения, как было разобрано ранее (см. стр. 198). С увеличением давления перемещения мембраны также увеличиваются и, наконец, внешний участок мембраны приходит в соприкосновение с жестким конусом, как показано на рис. 253. Это состояние определяет кручение за пределом текучести. Внешний участок мембраны, совпадающий с конусом, имеет постоянный наклон поверхности, соответствующий пределу текучести τ_T . Внутренний участок mn мембраны

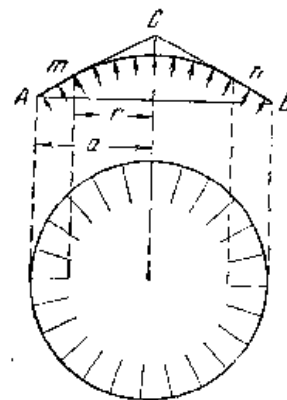


Рис. 252.

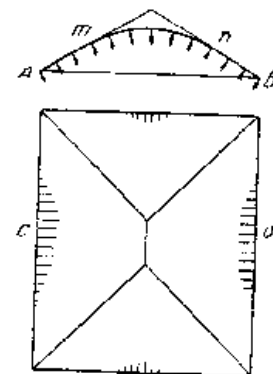


Рис. 253.

соответствует внутреннему участку вала, который находится в упругом состоянии. Удвоенный объем, заключенный между мембраной и плоскостью контура AB , продолжает представлять крутящий момент. Из этого мы заключаем, что удвоенный объем конуса должен дать нам значение $M_{\text{пред}}$. Так как наклон конуса равен τ_T , то его высота равна $a\tau_T$, а его удвоенный объем равен $\frac{2}{3} \pi a^2 a \tau_T$, что совпадает с выражением (e).

Подобный метод может быть применен и в случае некруговых поперечных сечений валов; он весьма полезен при определении участков вала, в которых начинается текучесть. Рассмотрим для примера прямоугольный вал. При исследовании кручения этого вала за пределом текучести нужно воспользоваться мембраной совместно с жесткой поверхностью в виде крыши (рис. 253), которая во всех точках имеет постоянный наклон, представляющий в некотором масштабе напряжения предела текучести τ_T . Очевидно, что мембрана, деформируемая под действием увеличивающегося равномерного давления, касается крыши сначала у c и d — срединных точек длинных сторон прямоугольника. В этих точках начинается текучесть, а при более высоком давлении некоторые участки мембраны будут совпадать с крышей,

как указано на рисунке заштрихованными площадями. Эти площади определяют области, где материя течет. В остальном вале мы имеем только упругую деформацию. Дальнейшее увеличение давления на мембрану увеличивает участки соприкосновения с кривой, так же как и области пластической деформации. Двойной объем, заключенный между кривой и плоскостью AB , очевидно, даст величину $M_{пред}$ для прямоугольного вала.

Если прямоугольный стержень из сварочного железа закручивается за пределом текучести, то области пластического течения можно выявить надлежащим програвливанием поперечного сечения. После травления в пластических областях поперечного сечения появляются темные параллельные линии с направлениями, показанными на рис. 253. Эти линии свидетельствуют о скольжении металла вдоль слоев, параллельных оси вала, вызываемом напряжениями, соответствующими пределу текучести¹⁾.

70. Пластические деформации толстостенных цилиндров под действием внутреннего давления²⁾

При рассмотрении упругой деформации толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления p мы нашли (см. стр. 175), что радиальное и окружное напряжения в радиальном расстоянии r от оси цилиндра выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \quad (a)$$

где a и b — соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра. Наибольшее окружное растяжение и наибольшее радиальное сжатие имеют место на внутренней поверхности цилиндра. На этой поверхности действует также наибольшее касательное напряжение; его величина равна

$$\tau_{\max} = \left(\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2}\right)_{r=a} = \frac{pb^2}{b^2 - a^2}. \quad (b)$$

Постепенным увеличением внутреннего давления мы, наконец, достигнем момента, когда материал на внутренней поверхности начинает течь. Это произойдет, когда наибольшее касательное напряжение (b) становится равным пределу текучести τ_1 ³⁾. Подставляя это значение в формулу (b), находим, что давление, при котором начинается теку-

¹⁾ Интересные фотографии этих линий, полученные для различных форм скручиваемых стержней, показаны в статье A. N. A. I., Trans. A. S. M. E., т. 53, стр. 29, 1931; см. также его книгу «Theory of Flow and Fracture of Solids», стр. 494, 1950; русский перевод, изд-во ИЛ, 1954, стр. 538.

²⁾ Исследование пластического течения в толстостенных цилиндрах, подверженных внутреннему давлению, было произведено Сен-Венаном; см. Compt. rend., т. 74, стр. 1009, 1872; см. также I. Todhunter and K. Pearson, History of Theory of Elasticity, т. 2, ч. 1, стр. 172 и статью L. V. Turgenev'a, Cambridge Phil. Soc. Trans., т. 21, стр. 377, 1913.

³⁾ Вопрос о текучести материала при различных напряженных состояниях рассмотрен в п. 82. Мы допускаем здесь, что τ_1 имеет то же значение, что и в случае кручения (см. стр. 317).

чь, равно

$$p_T = \tau_T \frac{b^2 - a^2}{b^2}. \quad (c)$$

Полагая, например, $b = 2a$, мы находим, что в этом частном случае $p_T = 0,75 \tau_T$. При дальнейшем увеличении давления пластическая деформация проникает все глубже и глубже в стенки цилиндра и, наконец, при некотором давлении, которое назовем $p_{пред}$, вся стенка цилиндра придет в состояние текучести. Распределение напряжений в стенке при этом состоянии текучести можно исследовать без особого затруднения, если предположить, что материал является идеально пластичным; это означает, что течение происходит под действием постоянного касательного напряжения, равного τ_T . Тогда для каждой точки в области пластической деформации справедливо условие

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \tau_T. \quad (d)$$

Второе условие для определения главных напряжений σ_r и σ_t получится рассмотренном равновесии элемента стенки, показанного на рис. 127. На основании предыдущего изложения (см. стр. 174) уравнением равновесия будет

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (e)$$

Подставляя вместо разности главных напряжений его значение по условию (d), получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\tau_T}{r}. \quad (f)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln r + C. \quad (g)$$

Постоянная интегрирования C найдется из условия, что на наружной поверхности цилиндра, т. е. при $r = b$, радиальное напряжение обращается в нуль. Это дает

$$0 = 2\tau_T \ln b + C, \quad C = -2\tau_T \ln b.$$

Подставляя это значение постоянной C в уравнение (g), получаем

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{b}. \quad (285)$$

Тогда для внутренней поверхности цилиндра находим

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2\tau_T \ln \frac{a}{b}, \quad (286)$$

а давление, которое требуется для того, чтобы привести всю стенку цилиндра в состояние пластической деформации, равно

$$p_{\text{пред}} = -(\sigma_r)_{r=a} = -2\tau_T \ln \frac{a}{b}.$$

Взяв опять $b = 2a$, найдем

$$p_{\text{пред}} = 2\tau_T \ln 2 = 0,693 (2\tau_T).$$

Имея уравнение (285) для радиальных напряжений, мы получаем окружные напряжения по выражению (d), что дает

$$\sigma_t = 2\tau_T \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right). \quad (287)$$

Если $b = 2a$, то отсюда находим

$$(\sigma_r)_{r=a} = 2\tau_T \left(1 - \ln \frac{a}{b}\right) = 0,307 (2\tau_T),$$

$$(\sigma_t)_{r=b} = 2\tau_T.$$

Распределение напряжений σ_r и σ_t по толщине стенки для частного случая $b = 2a$ показано на рис. 254 соответственно кривыми mn и st . Если после приведения материала цилиндра к состоянию текучести мы удалим внутреннее давление, то в стенке цилиндра сохранятся

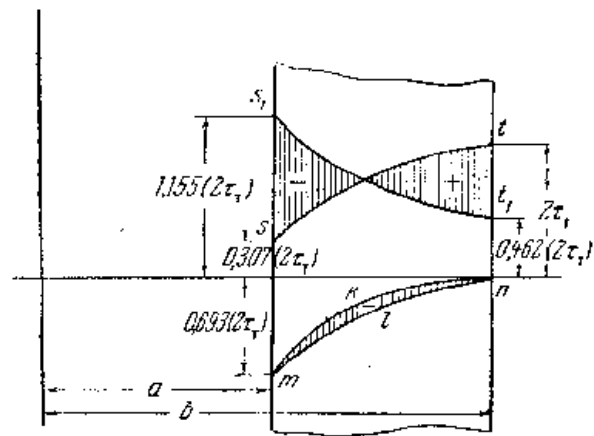


Рис. 254

некоторые остаточные напряжения. Эти напряжения можно легко вычислить, если предположить, что при разгрузке материал цилиндра следует закону Гука. В таком случае напряжения, которые должны вычитаться при разгрузке цилиндра, определяются формулами (а), если мы подставим в эти выражения $p_{\text{пред}}$ вместо p . Эти напряжения для частного случая $b = 2a$ показаны на рис. 254 кривыми s_1t_1 и m_1n_1 . Тогда заштрихованные площади дадут остаточные напряжения в стен-

ке цилиндра. Видно, что благодаря пластической деформации в части стенки цилиндра возникают значительные сжимающие окружные напряжения¹⁾. Если цилиндр с такими остаточными напряжениями снова нагружается внутренним давлением, равным $p_{\text{пред}}$, то вызываемое этим давлением окружные напряжения, определяемые кривой s_1t_1 , будут наложены на остаточные напряжения, определяемые заштрихованными площадями, так что результирующее распределение напряжений будет отвечать кривой st . Наибольшее результирующее напряжение равно $2\tau_T$, и никакой текучести при этом втором приложении внутреннего давления не происходит. Следовательно, остаточные напряжения, вызываемые пластическим расширением цилиндра, по природе таковы, что увеличивают давление, которое может выдержать цилиндр в упругом состоянии. Этим обстоятельством иногда пользуются при изготовлении орудий, когда они должны выдерживать высокое внутреннее давление газов²⁾.

В нашем изложении было допущено, что приложенное внутреннее давление может привести весь цилиндр в состояние текучести, но этот же метод можно применить без затруднения к случаям, в которых только внутренняя часть стенки цилиндра находится в состоянии текучести, в то время как наружная часть находится в упругом состоянии. Допустим, что приложено давление p' большее, чем p_T , но меньшее, чем $p_{\text{пред}}$, и пусть c будет радиусом цилиндрической поверхности, отделяющей пластическую область стенки от упругой области. Между этими двумя областями будет действовать радиальное давление, которое мы назовем X . Величина этого давления может быть найдена из рассмотрения упругой наружной части стенки. Наибольшее касательное напряжение τ_{max} в этой части найдется из выражения (b) подстановкой в него c вместо a и X вместо p , что дает

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}.$$

Так как цилиндрическая поверхность при $r = c$ разделяет упругую и пластическую зоны, то материал на этой поверхности как раз достигает предела текучести. Следовательно, $\tau_{\text{max}} = \tau_T$. Тогда уравнением для определения давления X будет

$$\tau_T = \frac{Xb^2}{b^2 - c^2}, \quad (h)$$

¹⁾ Предполагается, что это сжимающее напряжение меньше, чем напряжение, соответствующее пределу текучести, и что при разгрузке не происходит текучести. Случай текучести при разгрузке был изучен Л. В. Тартлетом, цит. на стр. 320.

²⁾ Описание этого применения начальной пластической деформации можно найти в книге: L. Jacob, Résistance et construction des bouches à feu: Autofretage, Paris. См. также S. J. Brown, U. S. Naval Inst. Proc., т. 46, стр. 1941, 1920.

и мы получим

$$X = \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (i)$$

Имея это давление, мы можем легко вычислить напряжения в любой точке в упругой области стенки, пользуясь формулами, подобными формулам (а)¹⁾.

Для вычисления напряжений в пластической области стенки воспользуемся выражением (g). Постоянная интегрирования C найдется из условия, что при $r = c$, $\sigma_r = -X$; это даст

$$-X = 2\tau_T \ln c + C, \quad C = -X - 2\tau_T \ln c.$$

Подставляя значение C в выражение (g) и пользуясь формулой (i), получаем

$$\sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{c} - \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (288)$$

Приняв r равным внутреннему радиусу a цилиндра, мы получим величину p' давления, которое должно быть принято для того, чтобы привести пластическую текучесть в стенке до глубины, соответствующей радиусу $r = c$. Это давление будет

$$p' = -2\tau_T \ln \frac{a}{c} + \frac{\tau_T (b^2 - c^2)}{b^2}. \quad (289)$$

Обратившись к нашему предыдущему примеру, где $b = 2a$ и положив $c = 1,5a$, мы найдем из уравнения (289), что $p' = 0,624 (2\tau_T)$.

Распределение окружных напряжений σ_t получается из выражения (d), которое дает

$$\sigma_t = 2\tau_T + \sigma_r = 2\tau_T \ln \frac{r}{c} + \tau_T \frac{b^2 + c^2}{b^2}. \quad (290)$$

При $r = c$ первый член правой части уравнения обращается в нуль, и значение σ_t становится равным значению окружного напряжения, вызываемого давлением X в смежной упругой зоне стенки. Выражение (288) и (290) дают напряжения, возникающие во внутренней части стенки цилиндра, которая претерпевает пластическую деформацию. Для наружной части, которая остается упругой, нужно использовать формулы, подобные формулам (а). Таким путем задача о распределении напряжений для случая цилиндра, который претерпевает лишь частичную пластическую деформацию, полностью решена.

Если после частичной текучести стенки цилиндра удалить внутреннее давление p' , то в стенке цилиндра удержатся некоторые остаточные напряжения. Внутренняя часть стенки, в которой имела место пластическая деформация, не возвращается к ее первоначальному

диаметру и испытывает давление со стороны упругой наружной части стенки. Распределение напряжений, возникающее в результате этого, подобно распределению напряжений, вызываемых горячей посадкой в составных цилиндрах (см. п. 41). Чтобы вычислить эти напряжения, мы поступаем точно так же, как пояснено ранее и показано на рис. 254.

Все эти вычисления основываются на допущении, что за пределом текучести материал течет без увеличения напряжений. В противном случае остаточные напряжения не могут быть вычислены так просто, как пояснено выше, и нужно обратиться к опытному определению остаточных напряжений. В таких случаях можно использовать метод, подобный тому, который применяется при определении остаточных напряжений при изгибе. Мы снимаем тонкие слои металла, начиная с внутренней поверхности цилиндра¹⁾, и после каждого среза измеряем деформацию, вызванную в осевом и окружном направлениях на наружной поверхности цилиндра. Такие измерения дают достаточные сведения для вычисления остаточных напряжений.

Остаточные напряжения в цилиндрах можно вызвать не только пластической деформацией, описанной выше, но также и неравномерным охлаждением и изменением объема металла при рекристаллизации в различных процессах горячей обработки. Иногда эти напряжения приобретают первостепенное значение, как, например, в больших поковках, и уже разработано несколько методов их определения²⁾.

¹⁾ Были преданы некоторые опыты с отслаиванием с наружной стороны: см. H. Bühler und W. Schreiber, Metallwissensch. u. Techn., сентябрь 1954, и статью Бюллера в книге «Residual Stresses in Metals and Metal Construction», 1954.

²⁾ Первое исследование этого рода было сделано П. Калакутским, Петербург, 1887. См. также N. Kalakoutzky, Investigation into the Internal Stress in Cast Iron and Steel, London, 1888. Полное решение задачи было дано G. Sachs'ом, Metallkunde, т. 19, стр. 352, 1927 и Z. Ver. deut. Ing., т. 71, стр. 1511, 1927. Эти две статьи содержат полную библиографию предмета. Дальнейшие улучшения методов измерения остаточных напряжений в трубах были сделаны Н. Н. Давиденковым, Журнал технической физики (Ленинград), т. 1, 1931. См. также G. Sachs, Trans. A. S. M. E., стр. 821, 1939. Библиография по пластической деформации металлов и остаточным напряжениям дана в книге: G. Sachs, Handbuch der Metallphysik, Leipzig, т. 3, ч. 1, 1937. См. также статью O. J. Horger'a, цит. на стр. 316. Остаточные напряжения в шатунах нефтяных насосов рассмотрены в статье R. E. Napier'a, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 10, стр. 97, 1952.

¹⁾ Нужно принять в этих уравнениях радиус c вместо a и X вместо p .

где $F = \pi d^2/4$ есть площадь поперечного сечения образца¹⁾. В случае прямоугольных образцов предпочтительно иметь то же соотношение между длиной и площадью поперечного сечения, как и для круглых образцов.

ГЛАВА X

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

71. Общие соображения

В предыдущих главах излагались методы анализа распределения напряжений, вызываемых различного рода силами в конструкциях. Зная напряжения, проектировщик должен затем выбрать материал и размеры конструкции так, чтобы в работе она безопасно выдерживала различные сочетания нагрузок. В этих целях необходимо иметь сведения относительно упругих свойств и прочностных характеристик строительных материалов при различных напряженных состояниях. При анализе напряжений обычно предполагают, что материал следует закону Гука, и тогда для решения задачи достаточно знать упругие характеристики материала. Но для выбора безопасных размеров сооружения этих сведений недостаточно. Проектировщик должен не только знать пределы, при которых материал можно рассматривать как совершенно упругий при различных напряженных состояниях, но и изучить поведение материала за этими пределами. Следения такого рода можно получить только в опытных исследованиях. Лаборатории для испытания материалов должны быть снабжены машинами¹⁾ для выполнения некоторых типичных деформаций опытных образцов, таких, как растяжение, сжатие, кручение и изгиб.

Чтобы сделать результаты испытаний сравнимыми, были установлены определенные размеры испытываемых образцов, которые признаны стандартными. Наиболее широко применяемыми механическими испытаниями строительных материалов, несомненно, являются испытания на растяжение. Стандартный образец для испытания на растяжение в США принимается круглым, диаметром 0,5 дм и расчетной длиной 2 дм, так что

$$\frac{l}{d} = 4 \quad \text{или} \quad l = 4,51 \sqrt{F},$$

¹⁾ Описание испытательных машин и библиографию по предмету см. в статье J. Marina в издании M. Hetenyi, Handbook of Experimental Stress Analysis, New York, 1950; см. также статью A. Eichinger'a в издании E. Siebel, Handbuch der Werkstoffprüfung, Stuttgart, 1940.

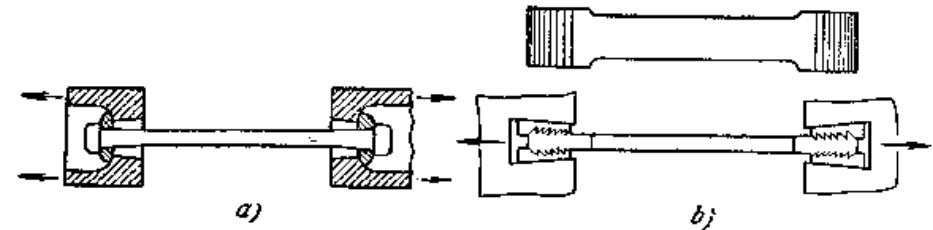


Рис. 255.

Длина цилиндрической части образца всегда несколько больше, чем расчетная длина l и обычно равняется по меньшей мере $l + d$. Концы образца вообще изготавливаются большего поперечного сечения для того, чтобы предохранить образец от разрушения в зажимах испытательной машины, где условия напряженности более сложные, так как здесь имеются местные неправильности в распределении напряжений. На рис. 255, а показан цилиндрический образец при $l = 10d$; здесь показаны также сферические гнезда в зажимах машины, имеющие целью обеспечить центральное приложение нагрузки. На рис. 255, б приведен плоский прямоугольный образец.

Испытательные машины на растяжение обычно снабжаются устройством, которое автоматически вычерчивает диаграмму растяжения, представляющую зависимость между нагрузкой P и удлинением $\Delta l = \delta$ образца. Такой диаграммой обнаруживаются важные характеристики материала. Например, рис. 256 приводит ряд кривых растяжения для углеродистой стали с различным содержанием углерода. Можно видеть, что по мере увеличения содержания углерода предел прочности стали также увеличивается, но в то же время удлинение при разрыве уменьшается, и материал имеет меньшую пластичность. Высокоуглеродистая сталь является относительно хрупкой. Она следует закону Гука до высокого значения напряжения и затем разрывается при очень малом

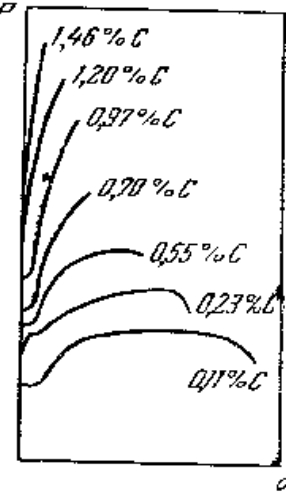


Рис. 256.

¹⁾ В Центральной Европе применяются двух разных размеров круглые образцы: 1) длинные образцы, для которых $l = 10d = 11,3 \sqrt{F}$ и 2) короткие образцы, для которых $l = 5d = 5,65 \sqrt{F}$.

удлинении. С другой стороны, мягкая сталь с малым содержанием углерода является пластичной и значительно вытягивается перед разрывом. В последующем изложении мы сначала рассмотрим испытания на растяжение хрупких материалов.

72. Испытания на растяжение хрупких материалов

Начнем с рассмотрения стекла, являющегося примером хрупкого материала. Стекло практически следует закону Гука до разрушения, и диаграмма испытания может быть представлена приблизительно прямой линией OA (рис. 257). Обычные испытания на растяжение стекла дают очень низкие значения предела прочности, а соответствующее количество работы, требуемое для того, чтобы произвести разрушение (представлено на рис. 257 заштрихованной площадью OAB), весьма мало по сравнению с количеством энергии, теоретически требующейся для отделения молекул друг от друга. Эта последняя величина может быть получена опытным путем — плавлением и затем выпариванием стекла. Работа, требуемая для того, чтобы отделить молекулы, будет тогда того же порядка величины, как количество теплоты, требуемой для выпаривания. Эксперименты показывают, что эта величина в тысячи раз больше, чем работа, требуемая при испытании на растяжение (рис. 257).

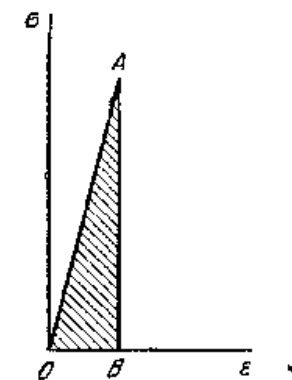


Рис. 257.

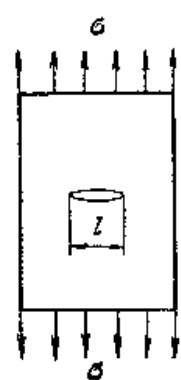


Рис. 258.

Чтобы объяснить это несоответствие, Гриффис предложил теорию¹⁾, согласно которой энергия, требуемая для разрушения стеклянного образца, неравномерно распределяется по объему, и в образце имеются области концентрации энергии, вызываемой микроскопическими трещинами, которые действуют как концентраторы напряжений. Рассматривая одну из этих микроскопических трещин как узкое эллиптическое отверстие в пластинке, которая равномерно растягивается (рис. 258), и пользуясь известными выражениями для напряжений вокруг эллиптического отверстия (см. п. 57), мы можем показать, что энергия деформации пластинки (на единицу толщины) уменьшается благодаря наличию отверстия на величину²⁾

$$\frac{\pi l^2 \sigma^2}{4E} \quad (a)$$

¹⁾ A. A. Griffith, Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 221, стр. 163—198, 1921. См. также Proc. Internat. Congr. Appl. Mech. Delft, стр. 55—63, 1924.

²⁾ Предполагается, что расстояния между трещинами сравнительно велики, так что нарушения в распределении напряжений из-за трещин можно

В этом выражении l есть длина трещины, σ — равномерно распределенное растягивающее напряжение и E — модуль упругости материала.

Рассмотрим теперь величину напряжения, при котором трещина начнет распространяться поперек пластинки и вызовет разрушение. Такое распространение трещины становится возможным без какой-либо дополнительной работы только при условии, если увеличение *поверхностной энергии* вследствие приращения dl длины трещины компенсируется соответствующим уменьшением энергии деформации пластинки. Обозначая поверхностное натяжение через S , мы получаем таким путем следующее уравнение для состояния на пределе прочности:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\pi l^2 \sigma^2}{4E} \right) dl = 2Sdl, \quad (b)$$

или

$$l = \frac{4SE}{\pi \sigma^2}. \quad (c)$$

Для того чтобы определить поверхностное натяжение S , Гриффис сделал ряд испытаний с расплавленным стеклом при различных температурах. Температуры были таковы, что стекло вело себя, как вязкая жидкость. Значение S при комнатной температуре при этом было получено экстраполированием в предположении линейного изменения S с изменением температуры. Предел прочности $\sigma_{пч}$ стекла находился из обычных испытаний на растяжение, и длина l трещины теперь могла быть вычислена¹⁾ из уравнения (c). Из уравнения (c) вместе с тем видно, что предел прочности при растяжении обратно пропорционален квадратному корню из l .

Чтобы проверить теорию, Гриффис проделал опыты с тонкими стеклянными трубками, подверженными внутреннему давлению. Делая алмазом искусственные трещины, параллельные оси цилиндра, различной при этом длины, он нашел предел прочности $\sigma_{пч}$ опытным путем. Эти опыты удовлетворительно согласовались с теоретическими выводами, вытекающими из уравнения (c). Гриффис провел далее опыты с тонкими стеклянными волокнами и нашел предел прочности при растяжении равным $3,5 \cdot 10^4$ кг/см² для волокна $3,3 \cdot 10^{-3}$ мм в диаметре. Это было приблизительно в двадцать раз выше, чем ранее найденное значение для более толстых образцов. Такая значительная прочность тонких волокон может быть объяснена также на основании теории Гриффиса, если заметить, что в процессе вытягивания тонких волокон исчезают любые трещины, которые были первоначально перпендикулярны длине волокон. Гриффис отметил, что спустя некоторое время волокна теряют часть своей прочности. Производя

рассматривать независимо одно от другого. Тогда достаточно рассмотреть лишь одну трещину, перпендикулярную напряжениям, как наиболее неблагоприятную.

¹⁾ Опыты Гриффиса дали для l значение порядка $1 \cdot 10^{-3}$ см.

опыты с волокнами немедленно после того, как они были вытянуты, он получил громадный предел прочности, равный $6,3 \cdot 10^4$ кг/см² для диаметра 0,5 мм. Это значение составляет приблизительно половину теоретической прочности, определенной путем рассмотрения молекулярных сил.

Другие исследования прочности при растяжении хрупких материалов были сделаны с образцами из монокристалла, вырезанными из большого кубика кристаллической соли¹⁾. Эти опыты показывали, что предел прочности этого материала равнялся только 45 кг/см² в испытаниях на воздухе при комнатной температуре. Когда тот же образец испытывался в процессе погружения в горячую воду, он достигал предела текучести при напряжении 80 кг/см², а затем растягивался пластически до окончательного разрушения, происходившего при напряжении, равном 16 000 кг/см². Такое значение предела прочности близко к теоретической прочности 20 000 кг/см², вычисленной Ф. Цвикки²⁾. Эти опыты показали, что сглаживание поверхности испытываемого образца оказывает большое влияние на прочность при растяжении образца.

Интересные опыты, относящиеся к прочности при растяжении листов слюды, были проделаны Е. Орованом³⁾. Вместо применения стандартных образцов на растяжение (рис. 255, б), вырезанных из листов слюды, он пользовался листами слюды, подвергавшимися растяжению на участке *mn* с помощью захватов А (рис. 259). В этом

случае предел прочности получался приблизительно в десять раз большим, чем для стандартных образцов при испытании на растяжение. Это указывает на то, что несовершенства, имеющиеся по краям стандартных образцов (рис. 255, б), значительно уменьшали прочность и что, устраняя их влияние с помощью приспособления, приведенного на рис. 259, можно получить высокие значения предела прочности. Все описанные опыты подтверждают гипотезу Гриффиса, что низкие значения прочности при растяжении хрупких материалов обусловлены такими несовершенствами, как микроскопические трещины и царапины на поверхности испытываемого образца.

Если на прочность хрупких материалов оказывает значительное влияние наличие несовершенств, то кажется логичным ожидать, что

¹⁾ См. статью А. Иоффе, Z. Phys., т. 22, стр. 286, 1924; см. также Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, стр. 64, 1924. Дальнейший разбор работы Иоффе дан в книге: E. Schmid und W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, стр. 271, 1935.

²⁾ См. Z. Phys., т. 24, стр. 131, 1928.

³⁾ См. Z. Phys., т. 82, стр. 235, 1933.

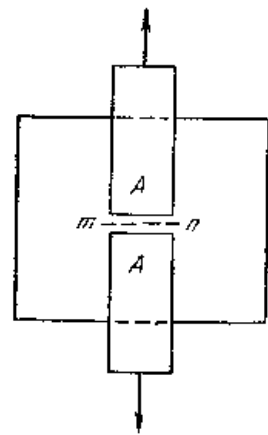


Рис. 259.

предел прочности будет зависеть от размеров образца и будет становиться все меньшим с увеличением размеров, так как тогда возможность наличия слабых мест увеличивается. Влияние размера было замечено в случае хрупкого разрушения, которое производится ударом¹⁾ или при испытаниях на усталость²⁾. Объяснение на основе статистического метода было дано Вейбуллом³⁾. Он показал, что для данного материала в геометрически подобных образцах с объемами V_1 и V_2 значения предела прочности, определяемые испытанием на растяжение, будут находиться в отношении

$$\frac{(\sigma_{пр})_1}{(\sigma_{пр})_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/m}, \quad (d)$$

где m — постоянная материала. После определения m из уравнения (d) можно найти значение $\sigma_{пр}$ для любого иного размера образца. Затем такие опыты были проделаны Н. Давиденковым⁴⁾, использовавшим сталь с высоким содержанием фосфора. Производя опыты с образцами двух разных диаметров ($d=10$ мм и $d=4$ мм) и с двумя разными длинами ($l=50$ мм и $l=20$ мм), он нашел для $\sigma_{пр}$ соответственные значения (57,6 кг/мм² и 65,0 кг/мм²). Величина $m=23,5$ была затем определена из уравнения (d). Для этого m предел прочности образца с $d=1$ мм и $l=5$ мм найден равным 77,7 кг/мм². Опыты же дали значение 75,0 кг/мм², так что теория оказалась в хорошем согласии с опытами.

Пользуясь статистическим методом, Вейбулл вычислил также⁵⁾ предел прочности для прямоугольного стержня при чистом изгибе и нашел отношение

$$\frac{(\sigma_{изг})_{изгиб}}{(\sigma_{пр})_{растяжение}} = (2m + 2)^{1/m}. \quad (e)$$

Эта формула была также проверена опытами Давиденкова. Его испытания дали для этого отношения значение 1,40, в то время как теоретическая цифра была 1,41, вычисленная для $m=24$.

Некоторые другие общие виды распределения напряжений были разобраны в статье Вейбулла. Он упоминает также различные опытные исследования, которые показали удовлетворительное совпадение со статистической теорией. Эта теория применима только к материалам, имеющим хрупкое разрушение, но не к тем, которые получают зна-

¹⁾ M. Charpy, Assoc. Internat. essais matériaux, 6th Congr., New York, т. 4, стр. 5, 1912.

²⁾ R. F. Peterson, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 79, 1933.

³⁾ W. Weibull, Proc. Roy. Swed. Inst. Engrs. Research (Stockholm), № 151, 1939.

⁴⁾ В английском переводе его статью смотри J. Appl. Mech., т. 14, стр. 63, 1947.

⁵⁾ W. Weibull, цит. здесь же.

чительную пластическую деформацию перед разрушением. Пластическая деформация будет смягчать местные концентрации напряжений в местах несовершенств, и поэтому только средние напряжения становятся важными при анализе состояния разрушения.

73. Испытания на растяжение пластических материалов

Механические свойства пластических материалов, например стали и других металлов, применяемых в конструкциях, обычно определяются опытами на растяжение. Рис. 260 представляет диаграмму растяжения для мягкой строительной стали. Из этой диаграммы можно получить такие важные характеристики, как *предел текучести*, *предел прочности* и *величина пластического удлинения*.

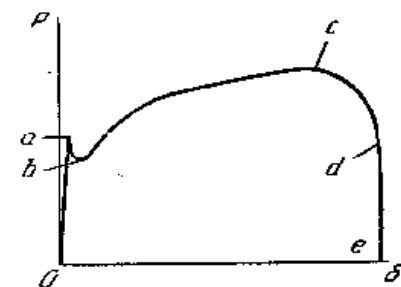


Рис. 260.

При определении *предела пропорциональности* нужны чувствительные экстензометры для того, чтобы обнаружить малейшее отклонение от прямой линии на диаграмме растяжения. Очевидно, положение этого предела на диаграмме в значительной степени зависит от чувствительности инструмента. Чтобы получить большее однообразие результатов, за основу для определения

предела пропорциональности часто принимают определенную величину остаточной деформации или определенную степень отклонения от пропорциональности. Международный конгресс по испытанию материалов в Брюсселе (1906 г.) определил предел пропорциональности как растягивающее напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,001%. Позднее наметилась тенденция повысить это предельное значение остаточной деформации до 0,01%¹⁾.

Предел текучести является весьма важной характеристикой для таких материалов, как строительная сталь. При напряжении, соответствующем пределу текучести, образец удлиняется на значительную величину без какого-либо увеличения нагрузки. В случае мягкой стали это удлинение может быть больше двух процентов. Иногда текучесть сопровождается резким уменьшением нагрузки, и диаграмма растяжения имеет форму, показанную на рис. 260. В таком случае верхний и нижний пределы нагрузки в *a* и *b*, разделенные на первоначальную площадь поперечного сечения, называются соответственно верхним и нижним пределами текучести. Положение верхнего предела текучести зависит от скорости испытания, формы образца и формы поперечного

сечения (см. п. 77). Нижний предел текучести обычно рассматривается как истинная характеристика материала и поэтому принимается за основу для определения рабочих напряжений.

Благодаря относительно большому удлинению материала на пределе текучести нет необходимости пользоваться чувствительными экстензометрами для определения этой точки. Ее можно определить с помощью простейших инструментов или можно взять непосредственно из диаграммы растяжения. Для строительной углеродистой стали напряжение, соответствующее пределу текучести, приблизительно составляет 55—60% от предела прочности. Строительная сталь приблизительно с 1% кремния имеет напряжение предела текучести, равное до 70—80% предела прочности. Предел прочности для кремниевой стали приблизительно такой же, как и для углеродистой стали; высокое же значение для предела текучести оправдывает обычную практику применения более высоких рабочих напряжений для кремниевой стали.

Резко выраженный предел текучести является характеристикой не только строительной стали, но также и таких материалов, как бронза и латунь. Однако существуют другие материалы, которые не имеют вполне определенного предела текучести. Для этих материалов за предел текучести иногда принимается напряжение, при котором остаточная деформация (пластическое удлинение) достигает значения 0,2%. Нужно помнить, что предел текучести, определяемый таким образом, не представляет определенной физической характеристики материала, но зависит от произвольно выбранной величины остаточной деформации. В случае строительной стали с ясно выраженным пределом текучести величина удлинения на пределе текучести обычно значительно больше 0,2%, и в таком случае действительный предел текучести совпадает с пределом текучести, найденным по величине 0,2% остаточной деформации.

Предел прочности обычно определяется как напряжение, получаемое путем деления наибольшей нагрузки образца (точка *c* на рис. 260) на первоначальную площадь поперечного сечения. Эта величина часто принимается за основу для определения рабочих напряжений.

Площадь, ограниченная диаграммой растяжения *Oacde* (рис. 260), представляет работу, необходимую для того, чтобы произвести разрушение. Этой величиной также пользуются как характеристикой свойств материала, зависящей не только от прочности, но также и от пластичности материала.

Пластичность металла обычно характеризуется *удлинением* расчетной длины образца при испытании на растяжение и *уменьшением площади* поперечного сечения, где происходит разрушение. В первой стадии пластического удлинения от *a* до *c* на рис. 260 образец удлиняется равномерно по своей длине. Это равномерное удлинение сопровождается равномерным поперечным сокращением, так что объем

¹⁾ См. статью P. Ludwig's, Bruchgefahr und Materialprüfung, Schweiz. Verband f. Materialprüf. d. Technik (Zürich), Ber., № 13, 1928.

образца остается практически постоянным¹⁾. В точке c растягивающая сила достигает наибольшего значения; дальнейшее растяжение образца сопровождается уменьшением нагрузки. В этой стадии пластического удлинения деформация становится местной, т. е. сосредоточивается в некотором месте, и начинается образование *шейки*, причем образец принимает форму, показанную на рис. 261. Трудно определить точно момент, когда начинается образование шейки, и поэтому трудно установить отдельно величину равномерного удлинения и отдельно величину удлинения, вызванного образованием шейки. Поэтому обычно измеряют полное увеличение расчетной длины после разрыва образца. Тогда *относительное удлинение* определяется как отношение этого полного удлинения расчетной длины к ее первоначальной длине. На практике удлинение при разрушении обычно дается в процентах. Если l есть начальная расчетная длина и δ — полное удлинение, то относительное удлинение при разрушении в процентах будет

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \cdot 100. \quad (a)$$

Это удлинение обычно принимается за меру пластичности материала. Относительное удлинение, полученное таким образом, зависит от размеров образца. Увеличение δ расчетной длины вследствие образования шейки представляет большую часть полного увеличения и практически оно одно и то же как для короткой расчетной длины, так и для длинной расчетной длины. Следовательно, относительное удлинение, определяемое уравнением (a), оказывается большим по мере уменьшения расчетной длины. Для стали относительное удлинение образцов при $l=5d$ приблизительно в 1,22 раз больше удлинения образца из того же материала при $l=10d$. Опыты также показывают, что форма поперечного сечения влияет на местную деформацию в шейке и, следовательно, влияет на удлинение образца. Из этого следует, что сравнимые результаты в отношении удлинения можно получить, лишь применяя геометрически подобные образцы.

Относительное сужение площади поперечного сечения при разрыве определяется формулой

$$q = \frac{F_0 - F_1}{F_0}, \quad (b)$$

в которой F_0 есть первоначальная площадь поперечного сечения и F_1 — конечная площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Таблица, дающая результаты большого количества статических испытаний на растяжение различных сталей, приведена в конце главы.

¹⁾ Малая упругая деформация изменения объема значительно меньше сравнительно большой пластической объемной деформации, и поэтому ее можно не учитывать.

74. Испытания образцов из монокристалла в упругой области

Металлы, которые используются в инженерной практике, обычно имеют кристаллическую структуру. Кусок металла состоит из большого числа мелких кристаллов, и механические свойства материала можно лучше понять, если изучить сначала свойства монокристалла.

Рентгеновский анализ позволяет установить, что каждый кристалл любого материала состоит из большого числа атомов, расположенных в характерном для него геометрическом порядке. Порядок этот образуется повторением *единичной ячейки*, два типа которой показаны на рис. 262. Рис. 262, а изображает *объемноцентрированную* ячейку кристаллической структуры железа при комнатной температуре;

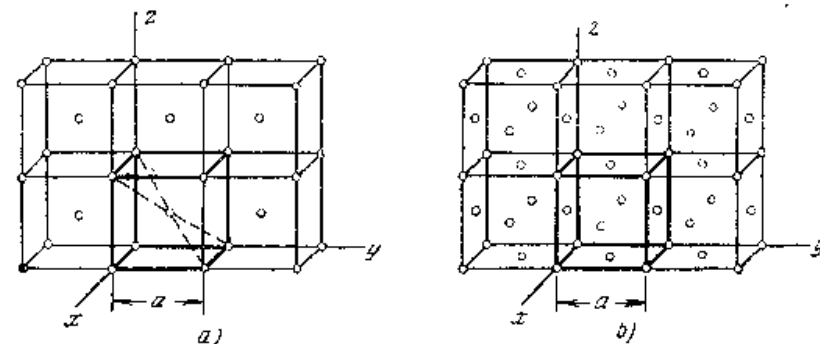


Рис. 262.

рис. же 262, б показывает *гранцентрированную* ячейку, представляющую кристаллическую структуру для алюминия, меди и некоторых других металлов. Размеры решетки, например длина a на рис. 262, постоянны для каждого материала и имеют порядок $1 \cdot 10^{-8}$ см.

Были разработаны¹⁾ различные методы для получения металлических кристаллов больших размеров для того, чтобы образцы для механических испытаний можно было вырезать из одиночного кристалла. Рис. 263 показывает²⁾ процесс получения образцов из одиночного кристалла алюминия путем рекристаллизации. Если мелкозернистый алюминиевый образец, какой показан на фотографии сверху, равномерно вытягивать на величину 1—2% и затем отжечь медленным увеличением температуры (11—28°С в день) с последовательным медленным охлаждением, мы обычно получаем образец, состоящий только из немногих кристаллов, как показано на фотографии внизу.

¹⁾ См. С. F. E. Lam, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, 1936.

²⁾ Фотографии 263 и 264 взяты из E. Schmid and W. Boas, Kristallplastizität, Berlin, 1935; английский перевод: F. A. H. ughler, London, 1950.

Тщательно отбирая материал с большим единообразием размеров зерна и опытным путем устанавливая необходимую величину удлинения при надлежащем режиме нагрева и охлаждения, можно после отжига

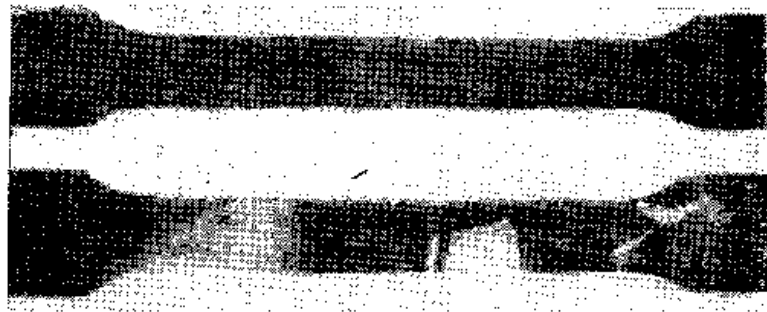


Рис. 263.

получить образцы из монокристаллов. Ориентировка кристалла относительно оси образца не поддается контролю, и главные оси кристалла (оси x, y, z на рис. 262) будут обычно составлять различные углы с осью образца для каждого отдельного образца.

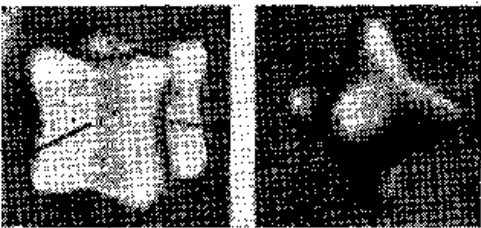


Рис. 264.

Испытания образцов из монокристаллов в упругой стадии обычно показывают значительное колебание его упругих характеристик, зависящее от ориентировки кристалла. Рис. 264 пояснен случай, когда модули упругости E и G для кристалла железа могут меняться с изменением ориентировки.

При помощи опытных данных о поведении монокристалла были в такой мере разработаны¹⁾ приемы определения средних значений модулей упругости для поликристаллических образцов, что стало возможным предсказывать с известной точностью результаты опытов.

Используя чувствительный экстензометр, можно показать, что при испытании на растяжение образца из монокристалла даже в упругой стадии существует некоторое отклонение от закона Гука. На показаниях экстензометра сказывается также влияние времени. Чтобы объяснить это явление, нужно рассмотреть термический эффект.

Если испытания на растяжение выполняются²⁾ с очень медленным увеличением нагрузки, то температура образца остается равной тем-

¹⁾ См. Boas and Schmid, Helv. phys. acta, т. 7, стр. 628, 1934.

²⁾ См. Lord Kelvin, Elasticity and Heat, Edinburgh, стр. 18, 1880.

пературе окружающей среды и зависимость между напряжением и деформацией можно представить прямой линией OA (рис. 265, а). Наклон этой линии дает величину модуля упругости E при *изотермическом* состоянии. Если же растягивающая нагрузка прикладывается так быстро, что нет достаточного времени для теплообмена, то получается прямая линия OB вместо OA и обычно модуль упругости E при *адиабатическом* состоянии больше модуля, получаемого изотермически. Вследствие своего внезапного вытягивания образец охладится¹⁾ ниже комнатной температуры. Если образец остается под постоянной нагрузкой в течение достаточного времени, он постепенно

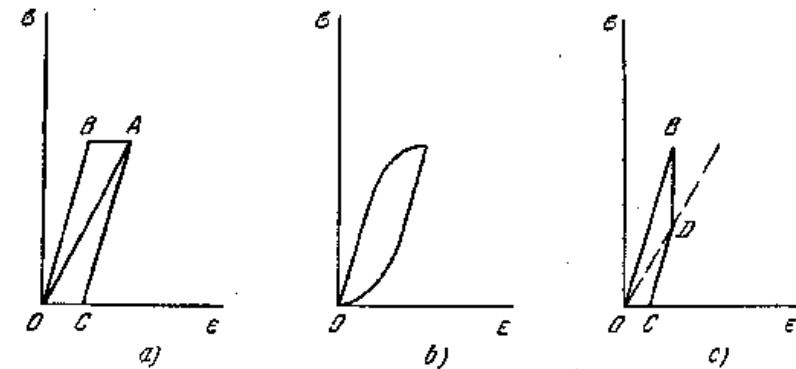


Рис. 265.

согревается до тех пор, пока не будет достигнута комнатная температура. В результате возникнет дополнительное удлинение образца (представленное на рисунке горизонтальной линией BA). Это есть *упругое последствие*, обнаруживаемое благодаря термоупругим свойствам материалов. Если после полного уравнивания температуры образец будет внезапно разгружен, то его адиабатическое сокращение будет представлено на рис. 265, а линией AC , параллельной OB . Благодаря этому внезапному укорочению образец согреется, и последующий процесс охлаждения до комнатной температуры будет вызывать дальнейшее сокращение, представленное линией CO . Видно, что деформированием образца адиабатически с последующим предоставлением достаточного времени для температурного уравнивания описывается полный цикл, представленный параллелограммом $OBAC$. Площадь этого параллелограмма представляет потерю механической энергии за один цикл. В наших рассуждениях мы предполагали адиабатическую деформацию, тогда как на практике всегда происходит в течение цикла известный теплообмен. Таким образом, вместо параллелограмма получается петля, как показано на рис. 265, б.

¹⁾ Изменение температуры можно измерить путем присоединения термопары к образцу.

Разница между адиабатическим и изотермическим модулями упругости обычно мала¹⁾, и потеря механической энергии за один цикл также весьма мала. Но если происходит последовательно много циклов, как, например, при колебаниях, то потери механической энергии становятся значительными и должны быть приняты во внимание. Они вызываются так называемым *внутренним трением* и являются причиной затухания колебательного движения. Петля, подобная показанной на рис. 265, *b*, называется *петлей гистерезиса*, и так как после полного цикла образец возвращается к своему первоначальному состоянию, то иногда употребляется термин *упругий гистерезис*.

Выше предполагалось, что после внезапного удлинения образец продолжает оставаться под действием постоянно приложенной нагрузки. Теперь предположим, что образец будет сохранять постоянную длину. Тогда согревание образца будет иметь результатом некоторое уменьшение первоначально приложенной силы. Это процесс *релаксации*, представленный на рис. 265, *c* вертикальной линией *BD*. В таком случае после внезапной разгрузки образца наблюдается участок *DC*, а позже, вследствие охлаждения, получается замыкающая линия *CO* цикла *OBDC*.

В предыдущем изложении мы касались испытаний на растяжение, однако в действительности большинство сведений относительно отклонений от закона Гука и влияния времени в упругой стадии было получено при испытаниях на изгиб полосок, вырезанных из кристалла кварца. При этом было показано, что все отклонения от совершенной упругости можно вполне объяснить путем рассмотрения термоупругих и пьезоэлектрических свойств материала²⁾.

75. Пластическое растяжение образцов из монокристалла

Путем увеличения нагрузки при испытании образца на растяжение, наконец, достигается состояние, при котором образец начинает течь и пластически удлиняться. Диаграммы³⁾ для образцов из монокристалла алюминия, испытанных на растяжение при различных температурах, показаны на рис. 266. Видно, что предел пропорциональности очень низок и за этим пределом образец вытягивается пластически. Вследствие пластической

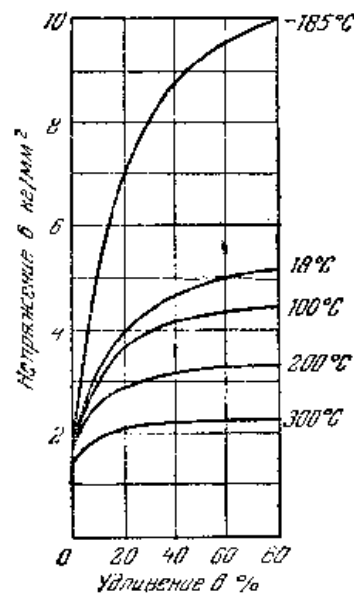


Рис. 266.

деформации материал становится жестче, и с увеличением растяжения напряжения, необходимые для продолжения деформации, становятся все большими. Это — явление *наклепа*; оно особенно ясно выражается при низких температурах. С увеличением температуры влияние наклепа уменьшается, при 300°C кривая приближается к горизонтальной линии и удлинение образца продолжается при практически постоянном напряжении.

Наблюдение за линиями (полосами скольжения), которые появляются на поверхности образцов из монокристалла во время пластической деформации, обнаруживает, что эта деформация сводится к скольжению материала по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенных направлениях. Например, при испытании образца из монокристалла алюминия, который имеет структуру гранцентрированной кубической решетки (рис. 267), скольжение будет происходить параллельно одной из октаэдральных плоскостей (как, например, плоскости *abc*) и направление скольжения будет параллельным одной из сторон треугольника *abc*. В растянутом образце скольжение будет происходить по наиболее неблагоприятно ориентированной октаэдральной плоскости скорее, чем по плоскостям под углом 45°, по которым действуют наибольшие касательные напряжения. Этим объясняется, почему при испытании образцов из монокристалла мы получаем рассеивание результатов для значений растягивающей нагрузки, при которой начинается текучесть. Эти значения зависят не только от механических свойств материала, но также и от ориентировки осей кристалла относительно оси образца.

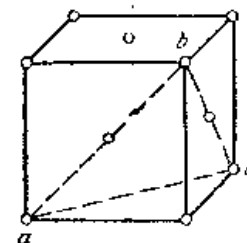


Рис. 267.

Предположим, например, что в образце из монокристалла (рис. 268), испытываемом на растяжение и имеющем площадь поперечного сечения *F*, направление наиболее неблагоприятно ориентированной октаэдральной плоскости скольжения определяется нормалью *n*, а направление скольжения линией *pq*. Касательное напряжение, которое действует по плоскости скольжения, равно

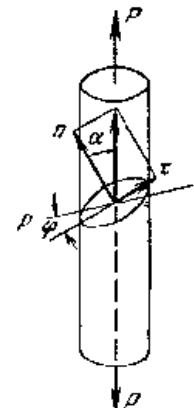


Рис. 268.

$$\tau = \frac{P}{F} \cos \alpha \sin \alpha. \quad (a)$$

Опыты показывают, что начало скольжения происходит не при напряжении τ , а от действия составляющей $\tau \cos \varphi$ этого напряжения в направлении скольжения *pq*. Скольжение начинается, когда эта составляющая достигает определенного значения $\tau_{кр}$. Тогда из выражения

¹⁾ Для стали он составляет 1/3%.

²⁾ См. статью А. И. Ф. Ф. е, Журнал физики (серия 4, т. 20, 1906).

³⁾ Рис. 266 взят из Schmid and Boas, цит. на стр. 335.

(а) мы получим

$$\tau_{кр} = \tau \cos \varphi = \frac{P}{F} \cos \alpha \sin \alpha \cos \varphi. \quad (b)$$

Видно, что в то время как $\tau_{кр}$ постоянно для данного материала, нагрузка P , при которой начинается текучесть образца, зависит от значений углов α и φ .

Процесс, при котором образец удлиняется вследствие скольжения по кристаллографическим плоскостям, иллюстрирован рис. 269. Мож-

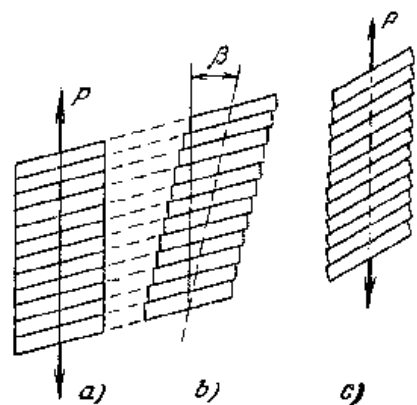


Рис. 269.

но допустить, что растяжение выполняется в два этапа: 1) поступательным движением по плоскостям скольжения (рис. 269, б) и 2) вращением образца на угол β к его начальному направлению (рис. 269, в). Из такого представления о механизме растяжения следует, что угол между направлением растягивающей силы P и плоскостями скольжения изменяется при растяжении. Более того, первоначально круговое поперечное сечение образца становится эллиптическим с отношением длин главных осей, равным $1 : \cos \beta$. Многочисленные опыты с монокристаллами дали результаты,

которые подтверждают эти заключения. Например, рис. 270 представляет вытянутый образец из монокристалла¹⁾ меди — алюминия.

Опыты также показали, что величина $\tau_{кр}$, при которой начинается скольжение, обычно очень мала²⁾. Однако вычисления значения $\tau_{кр}$

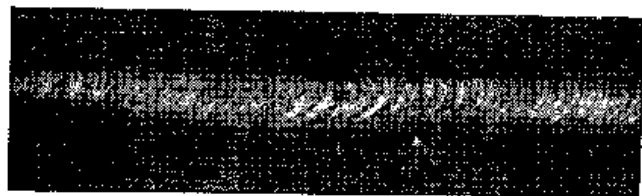


Рис. 270.

основанные на рассмотрении молекулярных сил³⁾, дают большие значения — порядка $G/30$. Это указывает на то, что процесс скольжения не состоит только в жестком поступательном движении атомных

¹⁾ См. С. Ф. Елам, The Distortion of Metal Crystals, Oxford, стр. 182, 1936.

²⁾ Там же.

³⁾ См. И. Френкель, Журнал физики, т. 37, стр. 572, 1926.

плоскостей одной относительно другой. Необходимо допустить существование местных несовершенств, которые позволяют начать скольжение под действием малой силы и затем распространиться по всей плоскости скольжения. Модель, показывающая возможность скольжения, которая начинается в месте несовершенств, была описана Л. Прандтлем¹⁾. Другая механическая модель была предложена Г. И. Тейлором²⁾. Допуская местную неправильность в распределении атомов, называемую *дислокацией*, он показал, что эта неправильность, распространяясь по плоскости скольжения в кристалле под влиянием малого напряжения $\tau_{кр}$, вызывает относительное перемещение одной части кристалла относительно другой. Пользуясь своей моделью, Тейлор был в состоянии объяснить не только начало скольжения при очень малых значениях $\tau_{кр}$, но также и явления наклепа³⁾.

76. Испытания на растяжение мягкой стали в упругой области

Ограничившись приведенным в ил. 74 и 75 кратким описанием механических свойств монокристаллов, перейдем теперь к рассмотрению испытаний на растяжение поликристаллических образцов, например образцов из строительной стали. На рис. 260, стр. 332, показана типичная диаграмма испытания на растяжение стали. Для области низких напряжений соответствующий участок диаграммы можно представить с удовлетворительной точностью прямой линией; наклон этой линии определяет значение модуля упругости E . Как результат различных ориентировок, модули упругости отдельных кристаллов по осевому направлению образца будут различными. Поскольку же зерна весьма малы, мы можем игнорировать этот факт и рассматривать материал как изотропный. Значение E является, таким образом, средним из полученных в испытаниях на растяжение поликристаллического образца.

С помощью чувствительного экстензометра можно наблюдать некоторое отклонение от закона Гука и обнаружить явление последствия в упругой стадии испытания на растяжение. Объяснение сводится к учету термоупругого влияния, как и в случае образца из монокристалла (см. стр. 336). Однако нужно заметить, что термоупругие свойства кристалла зависят от ориентировки кристалла, и поэтому

¹⁾ Модель была рассмотрена Прандтлем на семинаре по теории упругости в Геттингене в 1909 г., и ее описание было опубликовано в Z. angew. Math. u. Mech., т. 8, стр. 85—106, 1928.

²⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 145, стр. 362—404, 1934.

³⁾ Работа Тейлора вызвала интерес у физиков, и в настоящее время имеется большая литература по дислокациям. О новейшей библиографии этого предмета см. A. H. Cottrell, Dislocations and Plastic Flow in Crystals, Oxford, 1953.

изменения температуры, вызываемые растяжением поликристаллического образца, колеблются от зерна к зерну. Это значит, что мы должны рассматривать не только теплообмен между образцом и окружающей средой, но также течение теплоты между отдельными кристаллами. Так как теплота, образованная в зерне, пропорциональна его объему, и теплообмен зависит от величины его поверхности, то очевидно, что уравнивание температуры будет облегчено и потери механической энергии увеличатся при уменьшении размеров зерен. Это имеет большее практическое значение, так как имеются случаи, в которых затухание колебаний в упругой системе зависит главным образом от внутреннего трения материала. Для того чтобы увеличить затухание в такой системе, должны применяться материалы с малым размером зерна.

В проведенном анализе предполагалось, что деформация образца идеально упруга, как и надо было ожидать при малых напряжениях. Явление внутреннего трения при больших напряжениях становится более сложным, так как мы должны рассмотреть не только потери механической энергии вследствие теплообмена, как описано выше, но также и потери, вызванные пластической деформацией в отдельных зернах¹⁾.

Путем полирования и протравливания поверхности поликристаллического образца можно увидеть кристаллическую структуру материала и обнаружить, что при нагрузках меньших той, которая соответствует пределу текучести, появятся полосы скольжения на поверхности некоторых зерен. Полосы указывают на скольжение по определенным кристаллографическим плоскостям в этих зернах, причем они того же типа, что и рассмотренные ранее при испытаниях монокристаллов. Так как упругие свойства монокристалла различны в разных направлениях и так как кристаллы ориентированы случайно, то напряжения в растянутом образце распределяются неравномерно и скольжение может произойти в наиболее неблагоприятно ориентированных отдельных кристаллах прежде, чем среднее растягивающее напряжение достигнет значения предела текучести. Если такой образец разгрузить, то кристаллы, которые испытывали скольжение, не могут свободно вернуться к своей первоначальной форме, и в результате этого в разгруженном образце будут оставаться некоторые остаточные напряжения. Такая податливость отдельных кристаллов содействует

¹⁾ Значительное количество исследовательской работы по измерению демпфирующей способности различных материалов выполнено Rowlett'ом, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 89, стр. 528, 1913 и O. Förrl'ем и его сотрудниками по Wöhler-Institut, Braunschweig; см. Z. Ver. deut. Ing., т. 70, стр. 1291, 1926; т. 72, стр. 1293, 1928; т. 73, стр. 766, 1929. Важное значение термоупругой причины внутреннего трения было показано исследованиями C. Zener'a и его сотрудников; см. Phys. Rev., т. 52, стр. 230, 1937; т. 53, стр. 90, 1938; т. 60, стр. 455, 1941. Результаты этих исследований представлены в книге: C. Zener, Elasticity and Inelasticity of Metals, 1948.

также потерям энергии при нагрузке и разгрузке, и будет увеличивать площадь петли гистерезиса (см. рис. 265, б, стр. 337).

Если после разгрузки образец подвергнется испытанию на растяжение во второй раз, то зерна, в которых происходило скольжение при первом испытании, не будут испытывать текучести до тех пор, пока растягивающая нагрузка не достигнет значения нагрузки, приложенной при первом нагружении. Когда же нагрузка превзойдет это значение, снова начнется скольжение. Если образец подвергнется сжатию после предыдущего нагружения при растяжении, то приложенные сжимающие напряжения в сочетании с остаточными напряжениями, созданными предыдущим испытанием на растяжение, будут вызывать

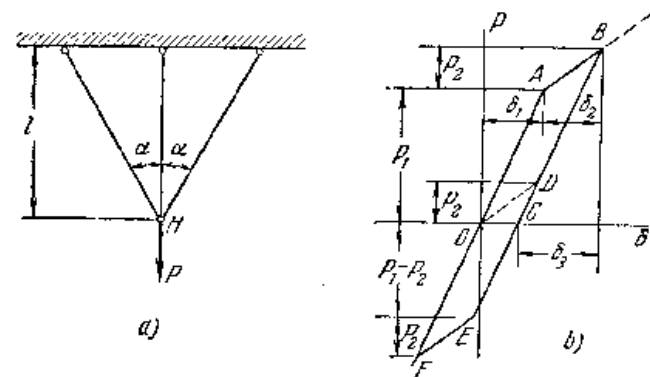


Рис. 271.

текучесть в наиболее неблагоприятно ориентированных кристаллах прежде, чем среднее сжимающее напряжение достигнет значения, при котором полосы скольжения вызывались в образце в его первоначальном состоянии. Таким образом, цикл испытания на растяжение вызывает возрастание предела упругости при растяжении, но понижает предел упругости при сжатии. Это явление было изучено Баушингером¹⁾ и называется *эффектом Баушингера*. Мы видим, что эффект Баушингера объясняется скольжением в отдельных кристаллах и остаточными напряжениями, вызываемыми этим скольжением.

Появление остаточных напряжений, введенных в материал текучестью наиболее неблагоприятно ориентированных зерен, а также эффект Баушингера можно иллюстрировать с помощью модели, изображенной на рис. 271. Модель состоит из трех стержней, сделанных из одного и того же материала, с одной и той же площадью F поперечного сечения. Материал имеет один и тот же предел текучести σ_y при растяжении и сжатии. Если вертикальная нагрузка P

¹⁾ См. Mitt. Mech.-tech. Lab. München, 1886; см. также Dinglers Polytech. J., т. 266, 1886.

приложена к модели, то будут появляться растягивающие усилия S_1 и S_2 соответственно в вертикальном и наклонных стержнях. В упругой стадии эти усилия будут (см. т. I, стр. 27):

$$S_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad S_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}. \quad (a)$$

Благодаря упругой деформации шарнир H модели передвинется вертикально вниз на величину

$$\delta = \frac{Pl}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (b)$$

Зависимость между нагрузкой и перемещением представлена на рис. 271, *b* линией OA . Из выражений (а) следует, что усилие в вертикальном стержне больше, чем усилие в каждом наклонном стержне. Вертикальный стержень модели соответствует наиболее неблагоприятно ориентированному кристаллу поликристаллического образца. Постепенным увеличением нагрузки мы достигаем состояния, при котором вертикальный стержень начинает течь, в то время как наклонные стержни продолжают упруго деформироваться. Соответствующее значение P_1 груза и соответствующее перемещение δ_1 найдутся из выражений

$$S_1' = F\sigma_1 = \frac{P_1}{1 + 2 \cos^2 \alpha}, \quad \delta_1 = \frac{P_1 l}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}, \quad (c)$$

что дает

$$P_1 = F\sigma_1(1 + 2 \cos^2 \alpha), \quad \delta_1 = \frac{\sigma_1 l}{E}. \quad (d)$$

Это состояние соответствует точке A на рис. 271, *b*.

Если мы будем продолжать увеличивать нагрузку, то вертикальный стержень будет вытягиваться пластически¹⁾ при постоянном напряжении σ_1 и дополнительная нагрузка P_2 будет воспринята упругими наклонными стержнями. Дополнительные усилия S_2' в этих стержнях и дополнительное вертикальное перемещение δ_2 будут

$$S_2' = \frac{P_2}{2 \cos \alpha}, \quad \delta_2 = \frac{P_2 l}{2FE \cos^2 \alpha}. \quad (e)$$

Зависимость между P_2 и δ_2 показана на рис. 271, *b* наклонной линией AB . Если мы начнем разгружать модель после достижения точки B на диаграмме, то все три стержня будут вести себя упруго, и зависимость между снимаемой нагрузкой и перемещением узла H вверх будет определяться выражением (b). Поэтому на диаграмме мы получим линию BC , параллельную OA , полное же вертикальное

¹⁾ При этом рассмотрении наклепом пренебрегаем.

перемещение вверх при разгрузке будет

$$\delta_3 = \frac{(P_1 + P_2)l}{FE(1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (f)$$

Мы видим, что вследствие пластического вытягивания вертикального стержня модель не возвращается в свое первоначальное положение, и создается остаточная деформация OC . Величина остаточной деформации находится из формулы

$$\overline{OC} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 = \frac{P_2 l}{2FE \cos^2 \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (g)$$

Благодаря этой остаточной деформации в наклонных стержнях возникают растягивающие усилия S_2'' , причем эти усилия будут уравновешиваться сжимающим усилием S_1'' в вертикальном стержне. Таковы усилия, которые остаются в системе после полной разгрузки модели и которые иллюстрируют остаточные напряжения в поликристаллическом образце после цикла испытания на растяжение.

Чтобы найти значения остаточных усилий в модели, отметим прежде всего, что наклонные стержни оставались в упругой стадии на протяжении всего цикла нагружения. Поэтому зависимость между усилием S_2 в наклонных стержнях и перемещением δ можно получить путем использования выражений (а) и (b), что дает

$$S_2 = \frac{\delta FE \cos^2 \alpha}{l}. \quad (h)$$

Подставляя вместо δ значение остаточной деформации (уравнение (g)), получаем остаточное растягивающее усилие S_2'' в наклонных стержнях

$$S_2'' = \frac{P_2}{2 \cos \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (i)$$

Уравновешивая вертикальные силы в шарнире H , найдем остаточное сжимающее усилие S_1'' в вертикальном стержне

$$S_1'' = 2S_2'' \cos \alpha = \frac{P_2}{1 + 2 \cos^2 \alpha}. \quad (j)$$

Чтобы иллюстрировать эффект Баушингера, рассмотрим второй цикл нагружения. При малых значениях нагрузки все три стержня деформируются упруго, и на рис. 271, *b* график процесса второго нагружения будет начат в точке C и пойдет по прямой CB . Когда он дойдет до точки D , вертикальный стержень будет освобожден от остаточного сжимающего усилия S_1'' и в течение дальнейшего нагружения будет испытывать растяжение. Соответственно точке B растягивающее напряжение в этом стержне достигнет значения σ_1 , и начнется пластическая деформация стержня. Видно, что предел

пропорциональности модели возрастает благодаря остаточным напряжениям. В первом цикле предел пропорциональности был при нагрузке P_2 , а во втором цикле — при нагрузке $P_1 + P_2$. Процесс разгрузки во втором цикле полностью упругий и следует линии BC .

Теперь изменим направление силы на обратное, приложив нагрузку P вверх. Тогда деформация будет происходить в соответствии с прямой CE графика, являющейся продолжением линии BC . Сжимающее усилие в вертикальном стержне создается нагрузкой P , направленной вверх и остаточным сжимающим усилием S_1 . Точке E отвечает направленная вверх полная сила $P_1 + P_2$, а сжимающее усилие в вертикальном стержне будет вызывать напряжение, равное пределу текучести. Если нагрузка увеличивается, процесс деформации соответствует линии EF . Если модель разгружается после достижения на графике точки F , то она вернется в первоначальное положение, представленное точкой O . Видно, что нагружение модели на растяжение до точки B графика повышает ее предел пропорциональности при растяжении от P_1 до $P_1 + P_2$. В то же самое время предел пропорциональности при сжатии уменьшается от P_1 до $P_1 - P_2$. Это иллюстрирует эффект Баушингера.

Если модель подвергается циклическим усилиям, изменяющимся от $P_1 + P_2$ при растяжении до P_1 при сжатии, то мы получаем петлю гистерезиса, представленную на рис. 271, b параллелограммом $OABCEFO$. Площадь этого параллелограмма дает величину потери механической энергии за один цикл¹⁾.

В этом параграфе мы касались испытаний на растяжение образцов из мягкой стали, в которых деформации малы и измеряются чувствительными экстензометрами. В следующем параграфе мы рассмотрим большие деформации, приводящие к пластической деформации не только отдельных неблагоприятно ориентированных кристаллов, но и всего материала образца.

77. Предел текучести

Изучая прочность строительной стали при растяжении, инженеры особенно интересуются явлением внезапного удлинения образцов на пределе текучести. Хорошо известно, что при некотором значении растягивающего напряжения имеет место внезапное падение растягивающей нагрузки, сопровождаемое значительным удлинением металла при несколько более низком напряжении. К. Бах ввел²⁾ термины верхнего и нижнего пределов текучести для этих двух значений на-

пряжения, обозначенных на рис. 272 точками A и B . Дальнейшие опыты показали, что на нижний предел текучести форма образца оказывает меньшее влияние, чем на верхний предел текучести. Таким образом, большее практическое значение придается нижнему пределу текучести.

Форма диаграммы напряжение — деформация (рис. 272) у предела текучести зависит в значительной степени от технических особенностей испытательной машины. Если растяжение образца вызывается увеличением расстояния между захватами машины, смещающимися с постоянной скоростью, то внезапное пластическое удлинение будет несколько уменьшать растягивающее усилие в образце и на диаграмме получится острая вершина A . Если вставить упругую пружину между образцом и захватом, то угол наклона кривой AB диаграммы можно уменьшить, как показано пунктирной линией AB_1 . С другой стороны, если растягивающая нагрузка приложена непосредственно к образцу, то растягивающее усилие при текучести будет зависеть от малого перемещения груза при внезапном удлинении и на диаграмме могут отразиться малые вибрации.

Чтобы изучить более подробно деформации, которые имеют место на пределе текучести, применяют образцы с полированными поверхностями. Такие опыты показывают, что за время падения растягивающего напряжения от точки A к точке B (рис. 272) на поверхности образца начинают появляться тонкие темные линии. Эти линии наклонены приблизительно под углом 45° к направлению растяжения и называются *линиями Людерса*¹⁾ (см. рис. 205, стр. 274). При дальнейшем удлинении линии увеличиваются по ширине и по числу, и за время удлинения от B до B_1 (рис. 272) они покрывают всю поверхность образца. Первые линии обычно начинаются в точках концентрации напряжений. На рис. 206 (стр. 274) показана, например, линия Людерса, которая начинается у точки наибольшей концентрации напряжений в выкружке. Вместо полирования иногда применяют специальные краски (называемые покрытием для напряжений), чтобы выявить линии Людерса. Краски эти хрупки и не могут выдержать больших деформаций; они растрескиваются при нагружении, причем образуется сетка линий Людерса.

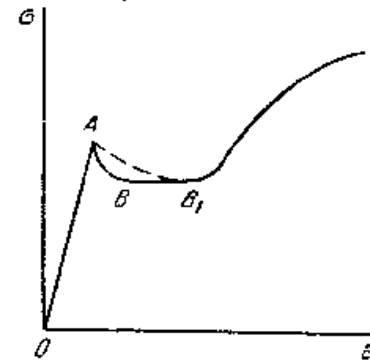


Рис. 272.

¹⁾ Другая модель для иллюстрации петли гистерезиса и эффекта Баушингера была предложена С. F. Jellison'ом, см. Engineering, т. 114, стр. 603, 1922.

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., т. 58, стр. 1040, 1904; т. 59, стр. 615, 1905.

¹⁾ Эти линии впервые были описаны L. J. Leders'ом, Dinglers Polytech. J., 1854. См. также L. Hartmann, Distribution des déformations, etc., Paris, 1896 и A. Nadai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, 1950; русский перевод: Пластичность и разрушение твердых тел, Москва, 1954.

Исследование с помощью микроскопа показывает, что линии Людера образуют пересечения у боковой поверхности образца тонких слоев материала, в которых имеет место пластическая деформация, между тем как смежные участки материала остаются совершенно упругими. Путем разрезания образца и применения специального протравливания¹⁾ можно сделать видимыми тонкие пластические слои внутри образца. Под микроскопом видно, что эти слои состоят из кристаллов, которые были разрушены скольжением, как описано ранее (см. п. 75).

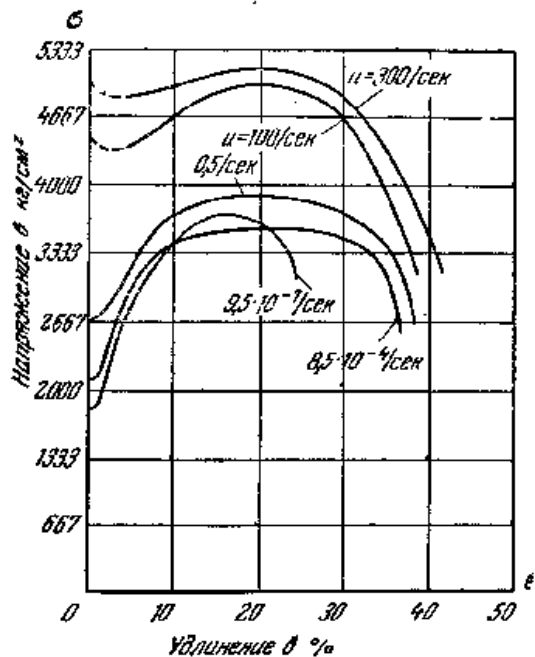


Рис. 273.

Для объяснения внезапного удлинения стали на пределе текучести высказывалось мнение²⁾, что поверхности зерен состоят из хрупкого материала и образуют жесткий скелет, который препятствует пластической деформации зерен при низком напряжении. Без такого скелета диаграмма растяжения была бы похожа на обозначенную пунктирной линией на рис. 274. Благодаря наличию жесткого скелета материал остается совершенно упругим и следует закону Гука до точки А, где скелет разрушается. Тогда пластический материал зерен внезапно

¹⁾ См. статью А. Фгу, цит. на стр. 276.

²⁾ М. J. Manjoine, J. Appl. Mech., т. 11, стр. 211, 1944; см. также R. C. Smith, T. E. Pardue and I. Vigness, U. S. Naval Research Lab. Repl. 4468, 1954.

³⁾ См. P. Ludwik und Scheu, Werkstoffanschuss, Ver. deut. Ing. Ver., 70, 1925; W. Köster, Archiv Eisenhüttenw., 47, 1929. См. также Н. Н. Давиденков, Некоторые проблемы механики материалов, Ленинград, 1943.

получает остаточную деформацию АВ, после чего следует обычной для пластического материала кривой ВС. Эта теория объясняет состояние неустойчивости материала при верхнем пределе текучести. Теория объясняет также тот факт, что материалы с малым размером зерна обычно показывают более высокие значения напряжения на пределе текучести. В результате такие материалы претерпевают большее удлинение на пределе текучести, определяемое длиной горизонтальной линии АВ на рис. 274. Кроме того, теория объясняет и то явление, что при высокой скорости испытаний увеличение напряжения при пределе текучести сопровождается увеличением пластического удлинения текучести, что показано кривыми на рис. 273.

Линии Людера появляются в стальных образцах, испытываемых на сжатие так же точно, как и в случае растяжения. Кроме того, опыты на изгиб и кручение показывают, что линии Людера наблюдаются и в этих случаях, но при гораздо более высоком значении напряжения, чем при однородном распределении напряжений. На основании предположения, что текучесть начинается, когда хрупкий скелет (образованный поверхностями зерен) изламывается, была выдвинута¹⁾ теория, что напряжение на пределе текучести зависит от размера образца. Опыты с маленькими образцами показали более высокие значения напряжения предела текучести, чем было найдено для образцов обычного размера.

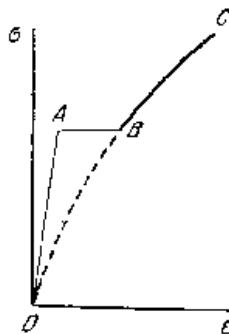


Рис. 274.

78. Растяжение стали за пределом текучести

При растяжении стального образца за пределом текучести материал упрочняется и напряжение, требуемое для вытягивания стержня, увеличивается, как показано участком ВС диаграммы напряжение — деформация (рис. 275). Удлинение образца сопровождается равномерным сужением площади поперечного сечения, и объем образца остается практически постоянным. Работа, произведенная при удлинении, превращается в большой степени в теплоту, образец становится горячим. Однако калориметрические измерения показывают, что не вся механическая энергия превращается в теплоту; часть ее остается в образце в форме энергии деформации. Вследствие разницы в ориентировке кристаллов напряжения неравномерно распределяются по поперечным сечениям и после разгрузки в образце остается некоторое остаточное напряжение и некоторое количество энергии деформации.

¹⁾ С. W. Richards, Статья, представленная 57-му Годичному собранию Американского общества испытания материалов, 1954.

Если после разгрузки мы нагрузим образец во второй раз, то найдем, что его предел текучести повысился. Это характерное явление

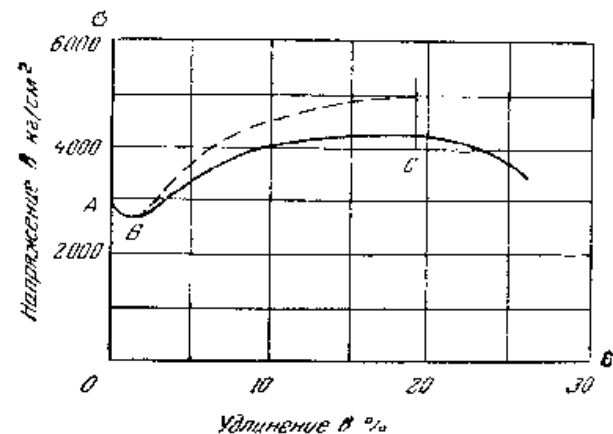


Рис. 275.

показано на рис. 276, который представляет диаграмму испытания на растяжение мягкой стали¹⁾. После растяжения стержня соответственно

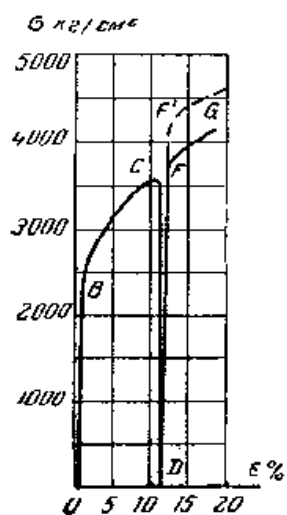


Рис. 276.

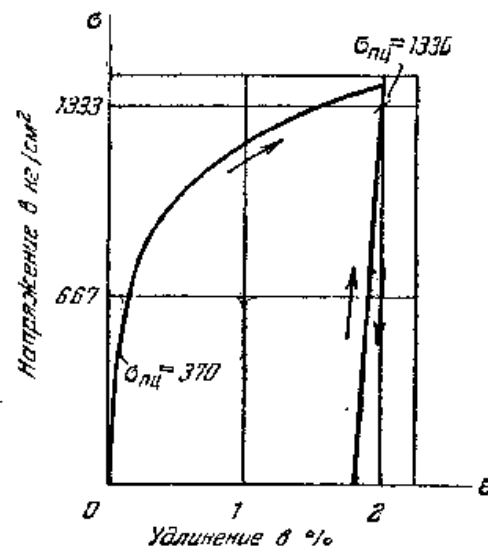


Рис. 277.

точке С он был разгружен. При разгрузке материал следовал приблизительно прямолинейному закону, как показано линией CD на диаграмме. Когда нагрузка была приложена к стержню по второй раз, материал снова следовал приблизительно закону Гука и была

¹⁾ См. Ewing, Strength of Materials, стр. 35, 1914.

получена линия DF. В точке F, которая соответствует точке C предварительной нагрузки, кривая резко изменила характер и вычертила участок FG, который можно рассматривать, как продолжение кривой BC. Это указывает на *повышение предела текучести*, вызванное предварительным вытягиванием образца. Если после первой разгрузки пройдет несколько дней, то при повторной нагрузке можно получить еще большее повышение предела текучести, как это показано пунктиром у т. F' (рис. 276). Рис. 277 показывает результаты испытания на растяжение образца из литого алюминия¹⁾. Первоначальный предел пропорциональности материала был равен 370 кг/см^2 . После предварительного растяжения образца на 2%, предел пропорциональности при повторной нагрузке был найден равным 1330 кг/см^2 , а предел текучести — около 1400 кг/см^2 .

Более подробные исследования показывают, что промежуток времени, протекающий между разгрузкой и повторной нагрузкой, значительно влияет на кривую напряжение — деформация при новом нагружении. Если повторное нагружение начинается немедленно после разгрузки, то, как показывают точные измерения, отклонение от прямолинейного закона происходит при очень низком напряжении, т. е. предел пропорциональности сильно понижается. Но если пройдет значительный промежуток времени между разгрузкой и повторной нагрузкой, то материал полностью восстанавливает свои упругие свойства. Рис. 278 изображает кривые, полученные²⁾ при испытании образцов из мягкой стали; из рассмотрения кривых видно, что если повторное нагружение происходит через 10 минут после разгрузки за предел упругости, то материал не следует закону Гука, но через 5 дней он частично восстанавливает свою упругость, а через 21 день — почти полностью восстанавливает ее.

Опыты также показывают, что если материал после разгрузки подвергнуть слабой термической обработке, например в ванне при 100°C , то восстановление упругих свойств происходит в гораздо более короткий промежуток времени. Рис. 279 показывает результаты таких испытаний, произведенных над стальным бруском³⁾. Первоначальное испытание на растяжение представлено кривой А. Кривая В представляет растяжение при повторном нагружении того же бруска через 10 минут после разгрузки и значительное отклонение

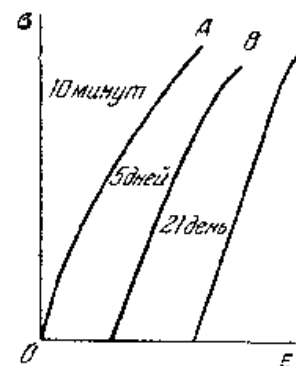


Рис. 278.

¹⁾ Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse El. Corp.».

²⁾ См. Ewing, цит. на стр. 350.

³⁾ I. Muir, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, 1899.

от закона Гука. Кривая *C* получена для того же бруска после вторичной разгрузки и после нагревания его в продолжение 4 минут при температуре 100°С. В этом случае материал совершенно восстановил свои упругие свойства.

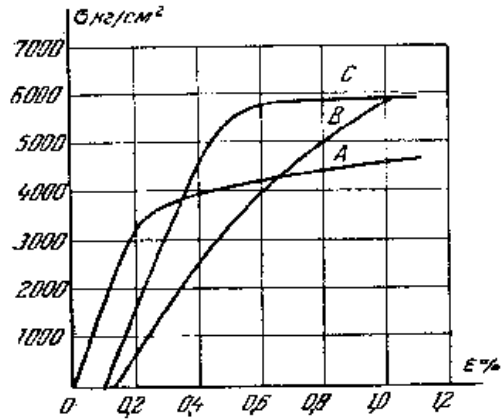


Рис. 279.

Явление наклепа в результате пластической деформации встречается во многих технологических процессах, как, например, прокатка стержней, вытяжка труб и волочение проволоки при низкой температуре, резание листового металла и протягивание, пробивание отверстий. Во всех этих случаях часть материала, которая подвергается пластической деформации, становится более жесткой и ее пластичность значительно уменьшается¹⁾. Для устранения этого нежелательного влияния наклепа обычно материал отжигают, после чего восстанавливается его пластичность²⁾.

Иногда наклеп пластических материалов находит себе практическое применение в производстве. Обычно на практике цепи и канаты подъемных машин предварительно растягивают на некоторую остаточную величину для того, чтобы устранить нежелательное вытягивание этих частей в работе. Цилиндры гидравлических прессов подвергают иногда предварительному внутреннему давлению, достаточному для того, чтобы произвести остаточную деформацию в стенках. Деформация наклепа и остаточные напряжения, вызываемые этим способом, препятствуют возникновению какой-либо остаточной деформации во время службы. Предварительное вытягивание металла производят и при изготовлении артиллерийских орудий (см. стр. 179, 323). Растягивая металл в стенках орудия за первоначальный предел текучести и затем подвергая его умеренной термической обработке, можно улучшить упругие свойства материала; в то же самое время возникают первоначальные напряжения, которые в сочетании с напряжениями, возникающими при выстреле, дают более благоприятное распределение напряжений в стенках орудия. Турбинные диски и роторы подвергают иногда аналогичной обработке. При вращении этих частей

¹⁾ Об общем анализе свойств холодно обработанных металлов см. статью: Z. Jeffries and R. S. Archer, Chem. and Metallurg. Engrg., т. 27, стр. 747, 1922. См. также G. Masling und M. Polanyi, Kaltreckung und Verfestigung, Berlin, 1923.

²⁾ См. статью Rees's'a, Iron and Steel, Inst. J., 1923.

со скоростью, выше обычной, получают вокруг центрального отверстия остаточную деформацию, которая повышает предел текучести материала и вызывает первоначальные напряжения, действующие в благоприятном направлении¹⁾. Литые алюминиевые лопасти прокатлера иногда подвергаются перенапряжению у втулки, чтобы устранить какую-нибудь возможность их ослабления на валу во время работы. Значительное пластическое течение металла иногда вызывают при насаживании ступиц паровозных колес на оси и это, оказывается,

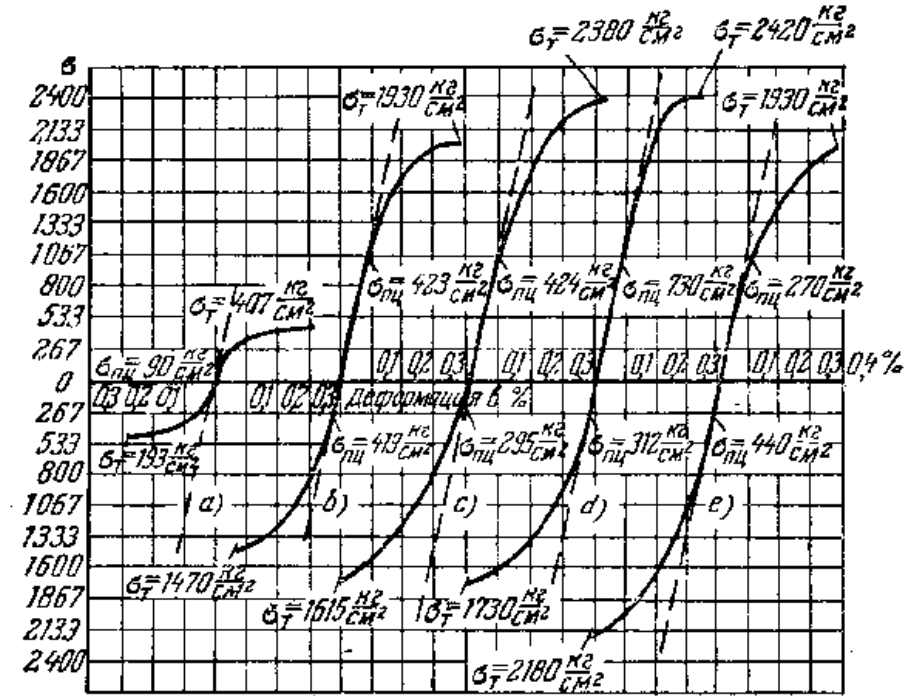


Рис. 280.

производит благоприятное действие. Медные стержни в коммутаторах электрических машин подвергают значительной холодной обработке путем вытягивания, чтобы дать им требуемую прочность.

Применяя подобное предварительное перенапряжение для повышения предела текучести и улучшения упругих свойств конструкции, необходимо иметь в виду: 1) что влияние наклепа исчезает, если конструкция подвергается отжигу и 2) что предварительное вытягивание металла в некотором направлении делает его прочнее при работе на растяжение в том же направлении, но не улучшает в такой же степени его механические свойства при работе на сжатие в этом же направлении. Это явление ясно показано на рис. 280, который

¹⁾ См. A. Nadai and L. H. Donnell, Trans. A. S. M. E., т. 51, стр. 173, 1929.

представляет результаты испытаний, произведенных над электролитической медью¹⁾. Кривая *a*) изображает механические свойства меди в отожженном состоянии. Предел пропорциональности и предел текучести²⁾ в этом состоянии очень низкие. Такой материал не может быть применен в конструкциях, которые подвергаются действию значительных напряжений. Кривая *b*) представляет результаты испытаний на растяжение и сжатие того же материала после предварительной пластической вытяжки на 15%. Предел пропорциональности и предел текучести значительно возросли, особенно при растяжении. Кривые *c*) и *d*) изображают результаты испытаний после предварительной вытяжки на 20 и 25%. Дополнительное вытягивание вызывает дальнейшее улучшение механических свойств, особенно при растяжении. В то же самое время предел пропорциональности при сжатии несколько уменьшается. Кривая *e*) представляет результаты испытаний на растяжение и сжатие стержня, который протягивали сквозь матрицу, уменьшая площадь его поперечного сечения на 15%. В процессе волочения материал подвергается не только продольному растяжению, но также поперечному сжатию. Этому обстоятельству нужно приписать разницу между кривыми *b*) и *e*). Хотя в обоих случаях брусок получил одно и то же уменьшение площади поперечного сечения, тем не менее материал, протянутый сквозь матрицу, показал лучшие механические свойства в отношении сжатия, чем материал, подверженный равномерному продольному растяжению на испытательной машине.

То обстоятельство, что предварительная вытяжка металла в некотором направлении не улучшает механических свойств при сжатии в таком же отношении, как при растяжении, нужно иметь в виду в тех случаях, когда материал подвергается действию переменных напряжений (см. п. 84). Необходимо также упомянуть имеющиеся указания³⁾ на то, что материал, который имел текучесть в некоторой области, является более чувствительным в этой области к химическому воздействию, и что наблюдается тенденция к коррозии металла по поверхностям скольжения. Это явление имеет важное значение для паровых котлов и других сосудов, подверженных одновременно химическим и силовым воздействиям.

При построении диаграммы растяжения в виде, например, кривой *ABC* на рис. 275, растягивающую нагрузку обычно делят на первоначальную площадь поперечного сечения F_0 образца для того, чтобы полу-

¹⁾ Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse El. Corp. Research Laboratory».

²⁾ Предел текучести определялся как напряжение, при котором относительное удлинение или относительное укорочение составляли 0,2%.

³⁾ См. F. Köcher und A. Pömp, Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 8, стр. 135, 1926; см. также S. W. Parr and F. G. Straub, Engineering, т. 124, стр. 216, 1927.

чить условное напряжение. Однако при большом удлинении будет иметь место значительное уменьшение площади поперечного сечения; поэтому, чтобы получить *истинное напряжение*, необходимо считаться с действительной площадью F вместо F_0 . Из условия постоянства объема образца имеем

$$l_0 F_0 = l F, \quad F = \frac{F_0 l_0}{l} = \frac{F_0}{1 + \varepsilon}, \quad (a)$$

и истинным напряжением будет

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon). \quad (b)$$

Чтобы получить диаграмму истинных напряжений, нужно ординаты условной диаграммы умножить на $1 + \varepsilon$. На рис. 275 такая диаграмма показана пунктиром. Она простирается до вертикали, проходящей через точку *C*, где нагрузка достигает своего наибольшего значения. При дальнейшем вытягивании образца начинается местное уменьшение поперечного сечения (образование шейки), и ε уже больше не является постоянным по длине образца. Тогда выражение (b) более уже неприменно, так как напряжения по наименьшей площади поперечного сечения распределяются неравномерно (см. стр. 360). В таком случае выражение (b) дает среднее значение σ . Среднее относительное удлинение ε в наименьшем сечении можно найти из выражения (a), которое дает

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F} - 1. \quad (c)$$

Пользуясь символом q для относительного сужения площади поперечного сечения (см. стр. 334), получаем

$$\frac{F_0 - F}{F_0} = q, \quad F = F_0 (1 - q);$$

из выражения (c) находим

$$\varepsilon = \frac{q}{1 - q}, \quad (d)$$

т. е. относительное удлинение в наименьшем сечении можно легко вычислить, если измерить сужение площади этого сечения. Это и называется¹⁾ *эффективным удлинением*; оно гораздо больше, чем удлинение $\varepsilon = \delta/l$, определяемое из полного удлинения δ расчетной длины.

Рассмотрим теперь более подробно понятие об относительном удлинении ε . Для его вычисления обычно пользуются выражением $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, так что приращение относительного удлинения

¹⁾ См. P. Ludwik, Elemente der technologischen Mechanik, Berlin, 1909.

определяется формулой

$$dz = \frac{dl}{l_0}, \quad (e)$$

в которой приращение длины делится на первоначальную длину l_0 . Кажется более логичным во многих случаях определять приращение относительного удлинения по уравнению

$$dz' = \frac{dl}{l}, \quad (f)$$

где l есть длина, к которой добавлено приращение dl . Тогда полное относительное удлинение получается в таком виде:

$$\epsilon' = \int_{l_0}^l dz' = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) = \ln \frac{F_0}{F}. \quad (g)$$

Это удлинение называется *естественной деформацией*¹⁾. Для малых удлинений естественная деформация ϵ' очень близка к ϵ . Но для больших деформаций, как в случае каучука или пластического удлинения стального образца, разница между ϵ' и ϵ становится значительной и имеется некоторое преимущество в использовании понятия естественной (истинной) деформации.

Рассмотрим в качестве примера изменение объема куба из материала, имеющего первоначальный объем, равный 1 кубическому сантиметру и претерпевающего равномерные удлинения ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z по направлению его сторон. После деформации объем куба будет равен

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z).$$

Если деформация такова, что объем не изменяется, как в случае пластической деформации металлов, то условие постоянства объема будет

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) = 1. \quad (h)$$

Если деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z не малы, так что их степенями пренебречь нельзя, то условие в уравнении (h) будет очень сложно. Но если мы воспользуемся понятием естественной деформации, то это же условие принимает очень простой вид. Для этой цели мы возьмем логарифм от обеих частей уравнения (h) и получим

$$\ln(1 + \epsilon_x) + \ln(1 + \epsilon_y) + \ln(1 + \epsilon_z) = 0.$$

Используя определение естественной деформации (формулу (g)), получаем условие постоянства объема в простом виде

$$\epsilon'_x + \epsilon'_y + \epsilon'_z = 0. \quad (i)$$

¹⁾ Это было впервые предложено Mesnager'ом; см. Proc. Congr. Internat. Phys., Paris, т. 1, стр. 348, 1900.

Диаграммы испытания на растяжение для наименьшего сечения в шейке растянутого¹⁾ образца можно строить, откладывая истинное напряжение (выражение (b)) в зависимости от естественной деформации ϵ' . Эти диаграммы (рис. 281) показывают, что за напряжением, при котором начинается образование шейки, зависимость между истинным напряжением и естественной деформацией является практически линейной.

Рис. 282 иллюстрирует приемы измерения условной деформации ϵ и истинной деформации ϵ' . Экстензометр на рис. 282, a прикреплен к образцу в двух фиксированных точках A и B. Расстояние между A и B изменяется при растяжении образца в пределах от начальной длины l_0 до конечной длины l . Экстензометр на рис. 282, b (называемый *экстензометром Баушингера*) прикреплен к образцу в A и имеет каток в B, так что длина AB остается равной l_0 . Если два одинаковых образца (рис. 282) растянуты от l_0 до l , а затем к ним приложены два одинаковых приращения нагрузки, то изменения в

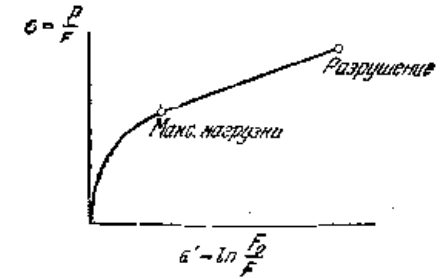


Рис. 281.

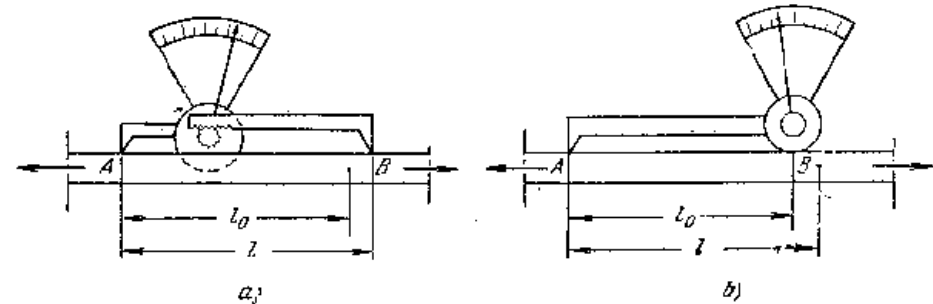


Рис. 282.

показаниях двух инструментов, являясь, очевидно, неравными, будут находиться в отношении $l/l_0 = 1 + \epsilon$. Но это отношение (на основании выражений (e) и (f)) равно отношению ds/ds' . Следовательно, инструмент на рис. 282, a дает условное относительное удлинение, в то время как экстензометр Баушингера дает естественную деформацию ϵ' .

¹⁾ Такие диаграммы были применены С. W. MasGleгогом, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 40, стр. 508, 1940; см. также его статью в издании M. H. E. t'enyi, Handbook of Experimental Stress Analysis, 1950.

79. Типы разрушений при растяжении¹⁾

Имеются два рода разрушений, которые необходимо различать при испытаниях на растяжение образцов из монокристалла. Для таких материалов, как каменная соль, например, мы имеем хрупкое разрушение без существенной пластической деформации, причем оно наблюдается, когда величина нормального напряжения на одной из главных плоскостей кристалла достигает критического значения. Такой вид разрыва называется *разрушением отрывом*. Монокристаллические образцы металла обычно показывают перед разрушением большую пластическую деформацию, состоящую из скольжения по определенным кристаллографическим плоскостям. Разрушение этого типа называется *разрушением сдвигом*.

Зависимость между сопротивлением *разъединению* (при разрушении отрывом) и сопротивлением *скольжению* (при разрушении сдвигом) не остается постоянной для одного и того же материала. Она зависит от температуры образца и от скорости, при которой производилось испытание. Очевидно, что сопротивление скольжению возрастает с понижением температуры и с повышением скорости деформации. Однако сопротивление разъединению не зависит в одной и той же степени от этих двух факторов. Этим объясняется, почему каменная соль, которая является хрупкой при комнатной температуре, показывает разрушение вследствие сдвига, если испытывать ее в горячей воде, когда сопротивление скольжению уменьшается вследствие более высокой температуры. Этим объясняется также, почему брусок из такого металла, как цинк, может быть согнут при медленном деформировании подобно бруску из пластического материала, между тем как тот же самый брусок оказывается хрупким и разрушается без пластической деформации, если нагрузка приложена внезапно²⁾.

В случае поликристаллических материалов необходимо рассматривать опять два рода разрушения: 1) *хрупкое разрушение*, как в случае чугуна или стекла, и 2) *разрушение сдвигом*, как в случае мягкой стали, алюминия и других металлов. В первом случае разрушение происходит практически без пластической деформации по поперечному сечению, перпендикулярному оси образца. Во втором случае разрушение происходит после значительной пластической вытяжки, и место разрыва имеет приблизительно форму «чашки и конуса» (рис. 283). При обсуждении этих двух типов разрушения была снова выдвинута теория, что прочность материала может быть описана двумя характеристиками — сопротивлением материала *разъединению* и сопро-

тивлением *скольжению*. Если сопротивление скольжению больше, чем сопротивление разъединению, то мы имеем хрупкий материал, и разрушение будет происходить в результате преодоления сил сцепления без какой-либо заметной деформации. Если сопротивление разъединению больше, чем сопротивление скольжению, то мы имеем пластический материал. Тогда сначала начинается скольжение по наклонным плоскостям, и разрушение в форме «чашка и конус» происходит лишь после значительной равномерной вытяжки и последующего местного уменьшения площади поперечного сечения (образования шейки) образца.

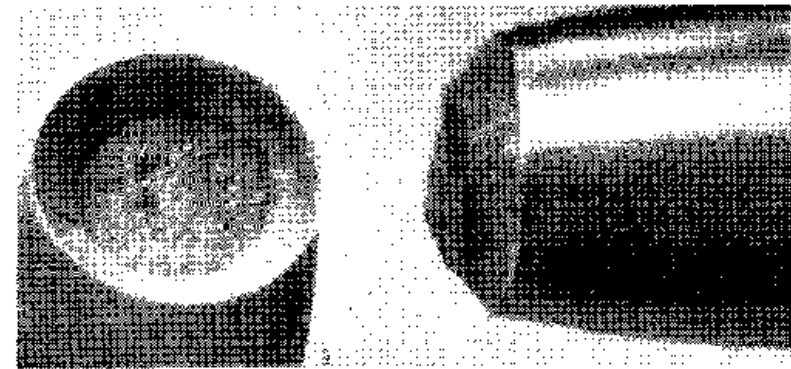


Рис. 283.

Распределение напряжений в наименьшем сечении шейки³⁾ для типа разрушения «чашка и конус» было исследовано, и найдено, что вблизи шейки растягивающие усилия в продольных волокнах имеют направления, указанные стрелками на рис. 284, а. Горизонтальные составляющие этих усилий в шейке вызывают радиальные и окружные напряжения, так что каждый бесконечно малый элемент, выделяемый у плоскости наименьшего поперечного сечения, находится в трехмерном напряженном состоянии, показанном на рис. 284, б. Предполагая, что пластическое течение требует постоянного наибольшего касательного напряжения, мы заключаем, что осевые растягивающие напряжения неравномерно распределяются по наименьшему поперечному сечению образца, но имеют наибольшее значение в центре поперечного сечения, где σ_r и σ_t являются также наибольшими. Распределение осевых напряжений показано на рис. 284, а заштрихованной площадью. Величины σ_{\max} и σ_{\min} зависят от радиуса a наименьшего поперечного сечения и радиуса кривизны R шейки, и

¹⁾ Полная библиография по этому предмету дана в статье P. Ludwig's, Eidg. Materialprüfungsanstalt (Zürich) Ber., № 35, 1928. См. также Forschungsarb., № 295, 1927.

²⁾ P. Ludwig, Stahl u. Eisen, т. 43, стр. 1427, 1923.

³⁾ См. статью Н. Н. Давиденкова, английский перевод, Proc. Am. Soc. Test. Mat., 1946. См. также P. Bridgman, Trans. Am. Soc. Metals, т. 32, стр. 553, 1944.

даются формулами

$$\sigma_{\max} = \sigma_a \frac{1 + \frac{a}{2R}}{1 + \frac{a}{4R}}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_a \frac{1}{1 + \frac{a}{4R}},$$

где $\sigma_a = P/\pi a^2$ есть среднее напряжение.

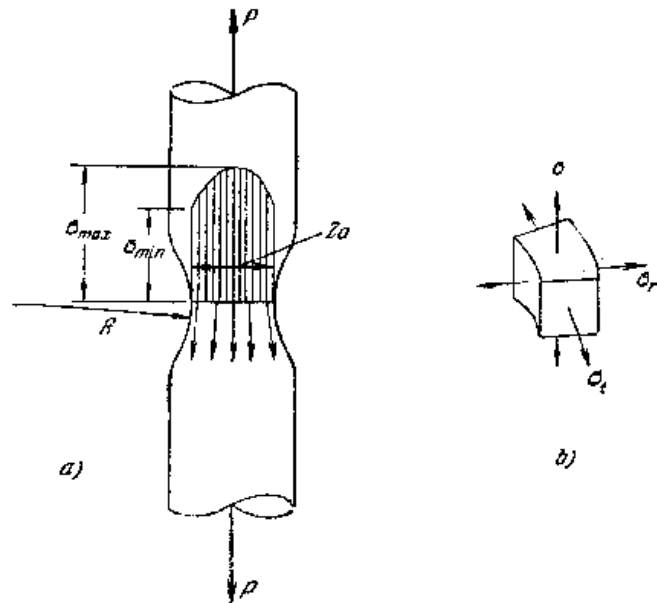


Рис. 284.

Вследствие трехмерного напряженного состояния материал вблизи центра наименьшего поперечного сечения обладает настолько пониженной способностью к пластической деформации, что при растяжении в этой области¹⁾ начинается образование трещины (рис. 285). Между тем как материал вблизи поверхности продолжает растягиваться пластически. Этим обстоятельством объясняется, почему центральная часть области разрушения по типу «чашка и конус» имеет хрупкий характер, между тем как вблизи поверхности наблюдается пластический тип разрушения.

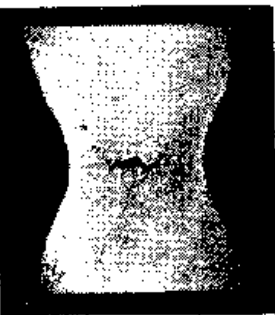


Рис. 285.

Вследствие неравномерного распределения напряжений в области шейки в образце имеют место остаточные напряжения, если он разгружен до появления трещины. Эти напряжения были исследова-

¹⁾ См. P. Ludwik, Z. Ver. deut. Ing., т. 71, 1927.

ны¹⁾ методом, применяемым в случае толстостенных цилиндров (см. стр. 322). Было вычислено распределение напряжений, имеющих в образце перед разгрузкой, и установлено, что оно удовлетворительно согласуется с результатами теории И. Н. Давиденкова (рис. 284). Кроме того, изучение разрушений с помощью микроскопа показало, что они происходили поперек зерен и были разрушениями сдвигом по типу «чашка и конус» как во внутренней, так и во внешней частях шейки.

Предыдущие рассуждения относятся к испытаниям на растяжение стандартных круглых образцов цилиндрической формы. Результаты, полученные с другими формами образцов, совершенно иные, что можно показать на образце с выточкой²⁾, изображенном на рис. 286. При испытаниях на растяжение наблюдается, что уменьшению площади поперечного сечения у выточки частично препятствует наличие участков

Таблица 21

Предел прочности (кг/см²) цилиндрических образцов и образцов с выточками

δ	Углеродистая сталь		Хромоникелевая сталь	
	вычислен по первоначальной площади	вычислен по уменьшенной площади	вычислен по первоначальной площади	вычислен по уменьшенной площади
дюймы мм				
1/32 = 0,8	11 450	12 350	13 550	16 650
1/16 = 1,6	11 550	12 450	12 950	16 300
1/8 = 3,2	10 050	11 100	10 850	14 000
Норм. образец	7 150	15 050	7 600	24 450

большого диаметра D . Естественно, что это действие должно возрастать с уменьшением ширины δ выточки. В табл. 21 даны результаты, полученные в испытаниях образцов из двух различных материалов³⁾: 1) углеродистой стали при пределе пропорциональности 3950 кг/см², пределе текучести 4550 кг/см², пределе прочности 7150 кг/см², удлинении 26,5%, сужении площади 55% и 2) хромоникелевой стали

¹⁾ См. статью E. R. Parker'a, H. E. Davis'a и A. E. Planigan'a, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 46, стр. 1139, 1946.

²⁾ Первые опыты с образцами с выточками были проделаны Д. Киркальди. Таким путем он показал, что хрупкий тип разрушения можно произвести в пластическом материале. См. его книгу Results of an Experimental Inquiry, etc., Glasgow, 1862.

³⁾ Эти испытания были проведены в Исследовательской лаборатории фирмы Westinghouse. См. также испытания, проделанные Р. Ludwik'ом и R. Schreuz, Stahl und Eisen, т. 43, стр. 999, 1923.

при пределе пропорциональности 5600 кг/см^2 , пределе текучести 5900 кг/см^2 , пределе прочности 7600 кг/см^2 , удлинении 27% , сужения площади 69% . Эти цифры были получены из обычных испытаний на растяжение нормальных цилиндрических образцов диаметра 0,5 дюйма и расчетной длины 2 дюйма. При вычислении напряжений была принята первоначальная площадь поперечного сечения. Образцы с выточками типа, показанного на рис. 286, имели $d=0,5$ дюйма и $D=1,5$ дюйма.

Таблица показывает, что во всех случаях разрушающая нагрузка для образцов с выточками была большей, чем для соответствующих цилиндрических образцов. В образцах с выточками имели место лишь небольшое уменьшение площади, и по внешнему виду разрушение было подобно характерному для хрупких материалов. *Истинный* предел прочности цилиндрических образцов был больше, чем для образцов с выточками, потому что разрушение цилиндрических образцов происходило после значительного пластического течения. В результате этого появился наклеп и увеличилось не только сопротивление скольжению, но также и сопротивление раздвиганию.

Подобные условия иногда встречаются в инженерной практике. Влияние, аналогичное влиянию узкой выточки по рис. 286, можно вызвать внутренними раковинами в больших поковках, например в турбороторах. Термические и остаточные напряжения могут сочетаться с влиянием концентрации напряжений у раковины и вызвать появление трещины. Последующее затем разрушение будет иметь характер хрупкого разрыва без заметного пластического течения, хотя материал мог оказаться пластичным при обычных испытаниях на растяжение.

Так как большинство образцов с выточками (рис. 286), оставаясь упругим при испытании на растяжение до разрушения, будет иметь малое удлинение, то только малое количество работы потребуется, чтобы произвести разрушение. Малая сила удара может легко создать работу, необходимую для разрушения. Образец оказывается хрупким вследствие его формы, но не вследствие каких-либо механических свойств материала. В манионных частях, подверженных удару, все резкие изменения в поперечных сечениях опасны, и их нужно избегать.

80. Испытания на сжатие

Испытания на сжатие производят обычно над хрупкими материалами, как-то: камень, бетон и чугун. Образцы, применяемые при испытаниях, обычно выполняются либо кубической, либо цилиндрической формы. При сжатии образцов между плоскими поверхностями

испытательной машины обычно предполагается, что сжимающее усилие равномерно распределяется по поперечному сечению. Действительное же распределение напряжений значительно сложнее, если даже поверхности приходят в полное соприкосновение, а нагрузка приложена центрально. Благодаря трению на поверхностях соприкосновения между образцом и плитами машины поперечное расширение, которое сопровождает сжатие, устраняется на этих поверхностях, и материал в этой области находится в более благоприятном напряженном состоянии. В результате получается тип разрушения при испытании на сжатие кубического образца из бетона, показанный на рис. 287¹⁾. Материал, находящийся в соприкосновении с машиной, остается нетронутым, в то время как материал на гранях крошится.

Чтобы получить истинное сопротивление сжатию такого материала, как бетон, нужно исключить или уменьшить влияние трения на поверхностях соприкосновения. Для этой цели А. Фёлль покрывал эти поверхности парафином²⁾ и нашел, что предел прочности тогда значительно уменьшался. Тип разрушения был совершенно иным, и кубические образцы разрушались путем разделения на пластинки, параллельные одной из боковых граней. Другой метод устранения влияния сил трения заключается в использовании образцов в форме призм, имеющих длину в направлении сжатия в несколько раз большую, чем поперечные размеры. Тогда средняя часть призмы находится примерно в условиях равномерного сжатия³⁾. Очень интересный метод воспроизведения равномерного сжатия цилиндрических образцов, разработанный в Институте К. Вильгельма⁴⁾, показан на рис. 288. Опорные плиты испытательной машины и концы цилиндрического образца сделаны таким образом, что образуют конические поверхности с углом наклона α , равным углу трения. Таким образом, влияние трения компенсируется расклинивающим действием плит, и в результате наблюдается равномерное сжатие.



Рис. 287.

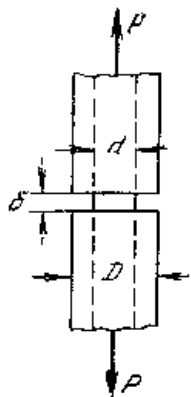


Рис. 286.

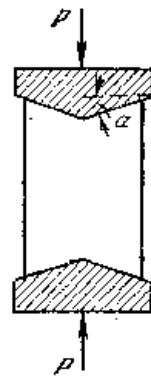


Рис. 288.

¹⁾ См. С. Vach, *Elastizität und Festigkeit*, 6-е изд., Berlin, стр. 160, 1911.

²⁾ A. Föll, *Mitt. Mech.-tech. Lab., München*, № 27, 1900.

³⁾ См. Prandtl und Rippel, *Neu. Jahrb. Mineral.*, 1907; см. также W. Gehrig, *Baugingenieur*, т. 9, стр. 21, 1928. Цилиндрические образцы высотой в два раза больше диаметра применялись при испытании бетона.

⁴⁾ *Mitt. Kaiser-Willh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf)*, т. 9, стр. 157, 1927.

Испытания на сжатие таких материалов, как бетон, камни и чугун, показывают, что эти материалы имеют очень низкий предел пропорциональности¹⁾. За пределом пропорциональности деформация увеличивается быстрее, чем нагрузка, и диаграмма сжатия имеет форму, показанную на рис. 289. Иногда желательно иметь аналитическое выражение для такой диаграммы. В этих целях Бах предложил²⁾ показательный закон в форме уравнения

$$\epsilon = \frac{\sigma^n}{E}, \quad (a)$$

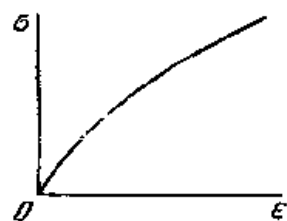


Рис. 289.

где n — число, зависящее от свойств материала. Бах нашел значения $n=1,09$ для чистого цемента и $n=1,13$ для гранита.

Испытания на сжатие пластических материалов показывают, что форма диаграммы зависит от размеров образца. Если размер в направлении сжатия уменьшается, то влияние трения на концах становится более резко выраженным и диаграмма испытания на сжатие получается круче. На рис. 290 для примера приведены результаты испытания

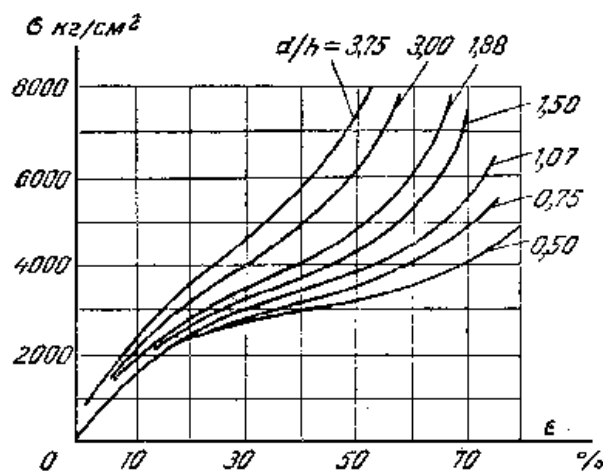


Рис. 290.

на сжатие³⁾ медных цилиндров с различным отношением d/h диаметра к высоте образца. При испытаниях на сжатие таких пластических материалов, как медь, разрушение наблюдается редко. Сжатие сопровождается поперечным расширением, и сжатый цилиндр в конечном

¹⁾ Предел пропорциональности для чугуна при растяжении был определен Губером; см. Ber. deut. physik. Ges., 1906.

²⁾ С. Bach, Elastizität und Festigkeit, 5-е изд., Берлин, стр. 67, 1905.

³⁾ См. G. Sachs, Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig, стр. 36, 1925.

счете получает форму плоского диска. Чтобы уменьшить влияние сил трения на поверхностях соприкосновения и, следовательно, получить удовлетворительную диаграмму испытания на сжатие, иногда применяется метод проведения сжатия по стадиям¹⁾. После того как образец приобретает благодаря поперечному расширению форму боченка, он подвергается обработке до своего первоначального диаметра. Далее прикладывается сжимающая сила, и процесс повторяется в каждой стадии. Таким образом, испытание происходит при непрерывном уменьшении высоты образца.

81. Испытания материалов при сложном напряженном состоянии

Заключив обсуждение вопросов об испытаниях на простое растяжение и сжатие, рассмотрим теперь случаи, когда материалы находятся под действием сложных напряжений. Мы начнем с рассмотрения материалов, испытываемых при всестороннем *равномерном гидростатическом давлении*²⁾. Такие испытания показывают, что под действием равномерного давления однородные материалы могут противостоять громадным сжимающим напряжениям и оставаться упругими. Испытания показывают, что относительное изменение объема при наличии гидростатического давления p можно представить уравнением³⁾

$$\frac{\Delta V}{V_0} = ap + bp^2.$$

Значения постоянных a и b для некоторых материалов (p измеряется в кг/см^2) даны в табл. 22. Видно, что большие давления вызывают лишь малое изменение объема.

Было сделано несколько попыток осуществить всестороннее *равномерное растяжение* материалов, но до сих пор не было получено удовлетворительного решения этой интересной задачи.

Таблица 22

Значения постоянных a и b для оценки изменения объема при всестороннем сжатии

Материал	$a \cdot 10^7$	$b \cdot 10^{12}$
Железо	5,87	-2,10
Медь	7,32	-2,70
Алюминий	13,34	-3,50
Кварц	27,74	+7,17
Стекло	30,08	+4,86

¹⁾ См. G. J. Taylor and H. Quippeny, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 143, стр. 307, 1933—1934.

²⁾ Обширные испытания такого рода были проведены П. В. Бриджменом, который разработал технику для получения огромных давлений; см. его книги The Physics of High Pressure, New York, 1931 и Studies in Large Plastic Flow and Fracture, New York, 1952; см. русский перевод, Исследования больших пластических деформаций и разрыва, 1955, ИЛ, Москва. Новые испытательные машины для трехосного напряженного состояния были описаны Н. А. В. Wiseman'ом и Joseph, Martin'ом, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 54, 1954.

³⁾ Bridgman, Studies in Large Plastic Flow and Fracture.

Испытания на растяжение различных сталей в сочетании с боковым давлением показали¹⁾, что это давление оказывает большое влияние на форму шейки и на уменьшение площади в наименьшем поперечном сечении. На рис. 291 изображено приспособление из скоб, создающее растягивающее усилие в образцах, помещаемых внутрь сосуда, в котором создается давление. Фотографии 292, а и 292, б иллюстрируют разрушения среднеуглеродистой стали (0,45% углерода) соответственно при атмосферном давлении и при поперечном давлении $10\,200\text{ кг/см}^2$. В первом случае естественное удлинение было равно $\ln F_0/F = 0,92$, а среднее истинное напряжение 8000 кг/см^2 . Во втором случае соответствующие значения были 2,37 и $33\,300\text{ кг/см}^2$. Было найдено, что с увеличением поперечного давления относительный размер плоской части на дне «чашки и конуса» уменьшался; при определенном давлении плоское дно совершенно исчезало и разрушение полностью происходило от сдвига.

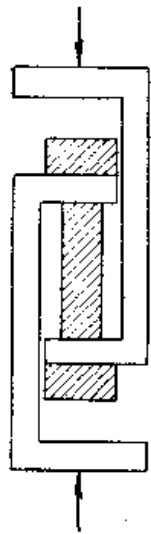


Рис. 291.

Сочетание осевого сжатия и поперечного давления было применено Т. Карманом²⁾ в испытаниях на сжатие мрамора. Эти испытания показали, что с увеличением поперечного давления мрамор становится все более и более пластичным, и первоначально цилиндрические образцы могут получить форму боченка, как показано на рис. 293.

При изучении плоского напряженного состояния были испытаны тонкостенные цилиндрические трубы. Подвергая трубы осевому растяжению в сочетании с внутренним давлением, исследователи установили³⁾ предел текучести для различных отношений двух главных

напряжений для некоторых материалов, исключая железо, медь и никель. Результаты, полученные таким путем, удовлетворительно согласовались с теорией энергии формоизменения (см. стр. 375). Дальнейшие опыты⁴⁾ с тонкими трубами из мягкой стали, подверженными внутреннему давлению и в сочетании с растяжением, сжатием или кручением, также дали результаты, согласующиеся с той же теорией. Испытания на одновременное действие растяжения и кручения тонких труб из стали, меди и алюминия показали⁵⁾, что начало текучести можно

¹⁾ Bridgman, там же; см. справку ³⁾, стр. 365. Русский перевод, стр. 94.

²⁾ Z. Ver. deut. Ing., стр. 1749, 1911.

³⁾ Такие опыты были проделаны В. Лоде под руководством А. Надаи; см. Forschungsarb., № 303, 1928; см. так же Z. Phys., т. 36, стр. 913—939, 1926.

⁴⁾ См. M. Roś and A. Eichinger, Proc. Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, 1926.

⁵⁾ G. I. Taylor and H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 230, стр. 323—362, 1931.

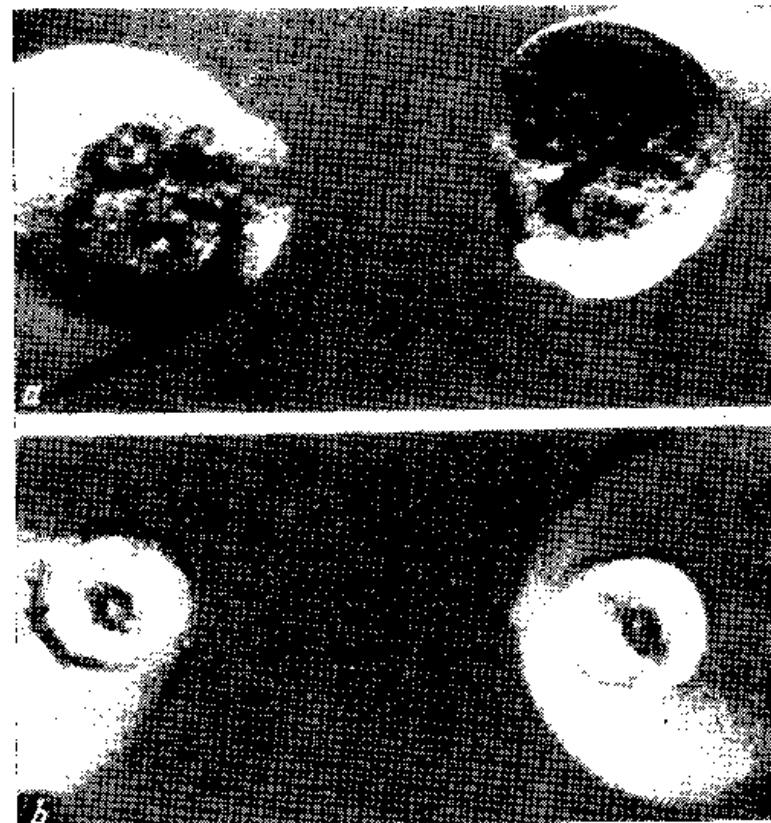


Рис. 292.

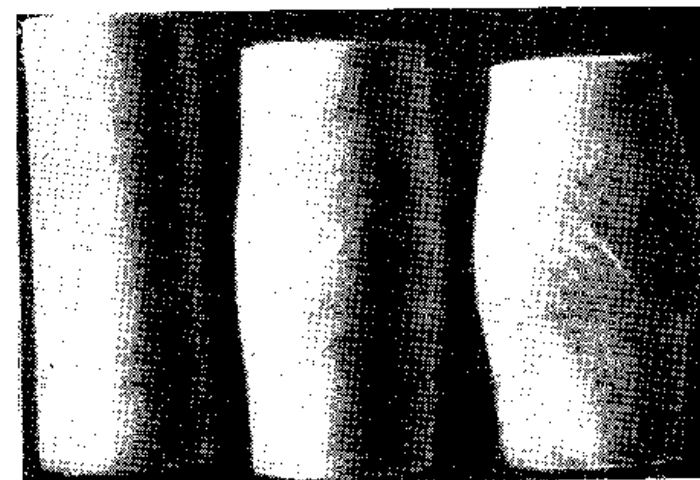


Рис. 293.

предсказать с хорошей точностью уравнением

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_t^2,$$

в котором σ есть осевое растягивающее напряжение, τ — касательное напряжение при кручении и σ_t — напряжение на пределе текучести при простом растяжении. Это уравнение также вытекает из теории энергии формоизменения.

В практических приложениях не только напряжение на пределе текучести, но свойства пластичности и наклеп также имеют важное значение при сложном напряженном состоянии. Неожиданные случаи разрушений, например взрывы больших сферических резервуаров¹⁾ и внезапные трещины в корпусах сварных грузовых судов, в последнее время привлекли внимание к этим вопросам. В обоих из указанных типов разрушения были применены листы из малоуглеродистой стали, которые показывали удовлетворительную прочность и пластичность при обыкновенных испытаниях на растяжение. Но поверхности разрушения листов во взорванных от давления резервуарах и в поврежденных судах не показали пластической деформации и носили хрупкий характер. Большинство из этих разрушений произошло при низких внешних температурах в условиях двумерного напряженного состояния.

Для оценки влияния температуры и плоского напряженного состояния на прочность и пластичность малоуглеродистой стали в последнее время в различных лабораториях было проделано значительное количество экспериментальных работ. Чтобы осуществить плоское напряженное состояние, применялись тонкостенные трубы. Эти трубы подвергались одновременно осевому растяжению и внутреннему гидростатическому давлению, благодаря чему можно было вызвать растягивающее напряжение σ_r в окружном направлении и σ_a в осевом направлении при любом желательном отношении $n = \sigma_r / \sigma_a$. Пользуясь трубами из среднуглеродистой стали (0,23% углерода) наружного диаметра 36,8 мм (1,450 дюйма) и с толщиной стенок 2,54 мм (0,1 дюйма), Е. А. Девис проделал испытания²⁾ для пяти различных значений отношения n . На рис. 294 показаны полученные типы разрушений. При малых значениях отношения n трещины были направлены по окружности, при больших же они были продольными. После ряда дополнительных испытаний было установлено, что переход от одного типа разрушения к другому имел место при значении $n = 0,76$. Было найдено, что в случае трещин по окружности разрушение происходило по плоскостям наибольшего касательного напряжения и при истинных напряжениях приблизительно такой же величины, как и в случае плоских образцов, изгото-

товленных из того же материала, что и трубы. В случае продольных трещин тип разрушения оказывался более хрупким. Разрушение обычно начиналось по плоскостям наибольшего касательного напряжения, но благодаря высокой концентрации напряжений у концов трещины оно продолжалось как хрупкое в продольной плоскости без существенной пластической деформации. Наибольшее касательное

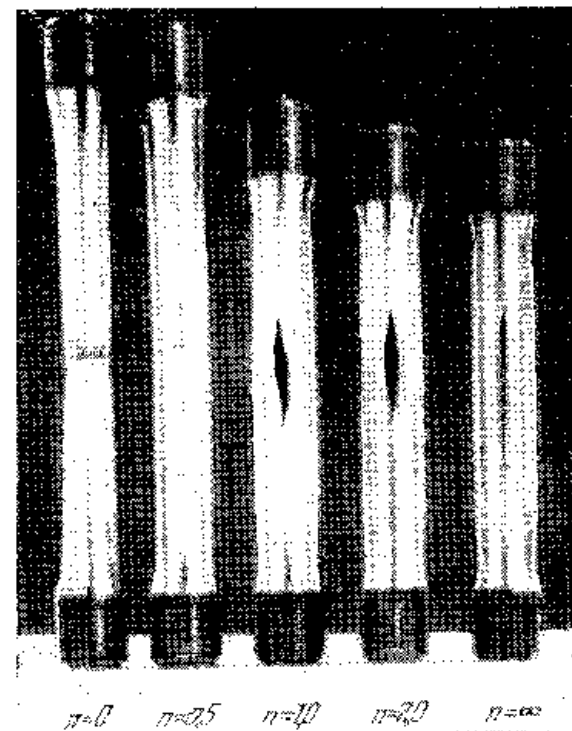


Рис. 294.

напряжение, при котором начинались продольные трещины, было всегда значительно меньше, чем в случае трещин по окружности. По-видимому, разница в двух видах разрушения была обусловлена в значительной степени формой образцов. В случае трещин по окружности материал был более способен к образованию шейки, чем в случае продольных трещин, и поэтому последние происходили с меньшей местной деформацией и меньшим падением нагрузки за пределом прочности.

Опыты Калифорнийского университета³⁾ над тонкостенными трубами из малоуглеродистой стали были проведены при двух

¹⁾ См. A. L. Brown and J. B. Smith, Mech. Engr., т. 66, стр. 392, 1944.

²⁾ См. E. A. Davis (Исследовательская лаборатория Westinghouse), J. Appl. Mech., т. 12, стр. 13, 1945 и т. 15, стр. 216, 1948.

³⁾ См. H. E. Davis and E. R. Parker, J. Appl. Mech., т. 15, стр. 201, 1948.

различных температурах. Диаметр труб был 133 мм (5 1/4 дюйма), температуры же равнялись 21,1°С и —94,4°С. Испытания при комнатной температуре всегда давали тип разрушения сдвигом со значительной пластической деформацией. Испытания при низкой температуре (при $n=1$) показали хрупкое разрушение с очень малой пластической деформацией. Эта хрупкость была приписана местным напряжениям в местах сварки концов труб.

Кроме описанных испытаний малых труб, исследовались¹⁾ больших размеров трубчатые образцы наружного диаметра 508 мм (20 дюймов) и длиной 3 м (10 футов), сделанные из корабельной обшивки толщиной в 19 мм (3/4 дюйма) при 21,1°С и —40°С. Испытания при низкой температуре, особенно при отношении $n=1$, показали хрупкое разрушение от напряжений значительно меньших, чем напряжения, полученные в испытаниях на растяжение обычных цилиндрических образцов, сделанных из того же материала.

82. Теория прочности²⁾

Механические свойства строительных материалов обычно определяются опытами, которым подвергаются образцы при сравнительно простых напряженных состояниях. Большинство наших сведений относительно прочности металлов было получено, например, из испытаний на растяжение. Подобным же образом испытания на сжатие применялись для изучения хрупких материалов, в частности камня и бетона. Кроме того, небольшое количество полезных сведений относительно прочности материалов получено в испытаниях на сдвиг. Однако прочность материалов при более сложных напряженных состояниях была исследована лишь в немногих частных случаях, например таких, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Чтобы обоснованно определять допускаемые напряжения для сложных напряженных состояний, которые имеют место при практическом проектировании, были разработаны различные теории прочности. Цель этих теорий состоит в том, чтобы предугадать, когда произойдет разрушение при сложных напряжениях, в предположении, что поведение материала при простом растяжении или сжатии известно. Под разрушением материала разумеют либо текучесть, либо появление излома в зависимости от того, что наступит раньше.

Наиболее общее напряженное состояние, которое может иметь место в теле, всегда вполне определяется величинами главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 (рис. 295). В последующем изложении растяжение

рассматривается положительным, а сжатие — отрицательным, причем оси на рис. 295 выбираются так, что зависимость между алгебраическими значениями главных напряжений будет

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (a)$$

Теория наибольших напряжений¹⁾ принимает за критерий прочности наибольшее или наименьшее главное напряжение. Для пластичных материалов это означает, что текучесть в элементе напряженного тела (рис. 295) начнется, когда наибольшее напряжение достигнет величины, соответствующей пределу текучести материала при простом растяжении, или когда наименьшее напряжение достигнет предела текучести при простом сжатии. Таким образом, условиями начала текучести будут

$$(\sigma_1)_T = \sigma_T \quad \text{или} \quad |(\sigma_3)_T| = \sigma'_T, \quad (291)$$

где σ_T и σ'_T — соответственно напряжения предела текучести при простом растяжении и сжатии. Имеется много примеров, которые противоречат теории наибольших напряжений. Уже было указано (см. стр. 339), что при простом растяжении скольжение происходит по плоскостям, наклоненным на угол 45° к оси образца. Для этих плоскостей ни растягивающие, ни сжимающие напряжения не являются наибольшими, и разрушение вызывается касательными напряжениями. Также было указано (см. стр. 365), что однородный и изотропный материал, хотя бы и слабый при простом сжатии, может противостоять очень большим гидростатическим давлениям без появления текучести. Это указывает на то, что величина наибольшего напряжения недостаточна для определения условий текучести материала или его разрушения.

Вторая теория прочности — *теория наибольших деформаций*, обычно приписываемая Сен-Венану. По этой теории предполагается, что пластичный материал начинает течь, если наибольшая деформация (удлинение) равна деформации на пределе текучести при простом растяжении или когда наименьшая деформация (укорочение) равна деформации на пределе текучести при простом сжатии. Наибольшая и наименьшая деформации (см. т. I, уравнение (43), стр. 64) будут

$$\frac{\epsilon_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \epsilon_1, \quad \frac{\epsilon_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = \epsilon_3.$$

¹⁾ Это самая старая теория разрушения и иногда называется *теорией Ренкина*.

¹⁾ См. Welding J., т. 27, стр. 348, 1948.
²⁾ Описание этих теорий можно найти в статьях: Н. М. Westergaard, J. Franklin Inst., 1920; А. J. Becker, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 85; P. Schleicher, Z. angew. Math. u. Mech., т. 5, стр. 199, 1925; А. Nadai, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 111, 1933.

Подставляя деформации предела текучести, равные σ_y/E при растяжении и σ'_y/E при сжатии, вместо ϵ_1 и ϵ_3 , получим критерий разрушения согласно теории наибольших деформаций в следующем виде:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_y \quad \text{или} \quad |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| = \sigma'_y. \quad (292)$$

Имеется много случаев, когда теория наибольших деформаций может также оказаться несостоятельной. Например, если пластину подвергать равным растягивающим напряжениям в двух перпендикулярных направлениях, то по теории наибольших деформаций следует, что напряжение предела текучести будет выше, чем при простом растяжении. Этот результат получается вследствие того, что удлинение в каждом направлении уменьшается из-за растяжения в перпендикулярном направлении. Однако это заключение не подтверждается опытами¹⁾. Результаты испытаний материалов под действием равномерного гидростатического давления также противоречат этой теории. Для такого случая второе из выражений (292) дает

$$|\sigma_3|_T = \frac{\sigma'_y}{1-2\mu},$$

где σ_3 представляет гидростатическое давление. Опыты показывают, что однородные материалы под действием равномерного всестороннего сжатия могут выдерживать более высокие напряжения и оставаться упругими (см. стр. 365).

Теория наибольших касательных напряжений дает лучшее согласование с опытами, по крайней мере для пластических материалов, для которых $\sigma_y = \sigma'_y$. Эта теория предполагает, что текучесть начнется, когда наибольшее касательное напряжение в материале становится равным наибольшему касательному напряжению предела текучести при испытании на простое растяжение. Так как наибольшее касательное напряжение в материале равняется половине разности между наибольшим и наименьшим главными напряжениями²⁾, и так как наибольшее касательное напряжение при испытании на растяжение равно половине нормального напряжения, то условием состояния текучести будет

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y. \quad (293)$$

При проектировании машин теория наибольших касательных напряжений обычно применяется для пластических материалов³⁾. Эта теория хорошо согласуется с опытами⁴⁾ и очень проста в применении.

¹⁾ См. Weibage, *Min. Tech. Versuchsanstalt*, (Berlin), стр. 89, 1888.

²⁾ См. т. I, стр. 64.

³⁾ Сравнение различных теорий прочности, примененных при проектировании машин, дано J. Maginon, *Product Engrg.*, май, 1937.

⁴⁾ Теория подтверждается опытами J. J. Guest'a, *Phil. Mag.*, т. 50, стр. 69, 1900. См. также L. V. Turner, *Engineering*, т. 86, стр. 169; W. A. Scoble, *Phil. Mag.*, декабрь 1906 и январь 1910; C. A. Smith, *Engineering*, т. 88, стр. 238.

В теории наибольшей энергии за основание для установления критерия разрушения принимается количество энергии деформации, накопленное в единице объема материала¹⁾. Пользуясь общим выражением потенциальной энергии деформации (выражение (195) т. I, стр. 277) и приравняв энергию для случая, показанного на рис. 295, энергии на пределе текучести при простом растяжении, находим критерий для начала текучести

$$U_T = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) = \frac{\sigma_y^2}{2E}. \quad (294)$$

Для сравнения описанных теорий прочности рассмотрим случай чистого сдвига. В этом особом случае двумерного напряженного состояния наибольшее растягивающее, наибольшее сжимающее и наибольшее касательное напряжения численно равны между собой (см. формулу (a) т. I, стр. 57), т. е.

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad \sigma_2 = 0.$$

Предполагая, что материал имеет один и тот же предел текучести при растяжении и при сжатии, найдем, что условиями текучести, согласно теории наибольших напряжений, теории наибольших деформаций и теории наибольших касательных напряжений, соответственно будут

$$\tau_1 = \sigma_y, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_y}{1+\mu}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_y}{2}.$$

Теория наибольшей потенциальной энергии дает зависимость

$$U_T = \frac{\tau_1^2(1+\mu)}{E} = \frac{\sigma_y^2}{2E},$$

откуда

$$\tau_T = \frac{\sigma_y}{\sqrt{2(1+\mu)}}.$$

Принимая для стали $\mu = 0,3$, приходим к следующим результатам:

по теории наибольших напряжений $\tau_T = \sigma_y$;

по теории наибольших деформаций $\tau_T = 0,77 \sigma_y$;

по теории наибольших касательных напряжений $\tau_T = 0,50 \sigma_y$;

по теории наибольшей энергии деформации $\tau_T = 0,62 \sigma_y$.

Видно, что разница между различными теориями в этом частном случае получается значительной²⁾. Например, при расчете на кручение

¹⁾ Эта теория впервые была предложена Бельтрами, *Rendiconti*, стр. 704, 1885; *Mat. Ann.*, стр. 94, 1903; см. также Girtler, *Sitzungsber. Wiener Akad.*, т. 116, 11a, стр. 509, 1907; B. P. Haigh, *Engineering*, т. 109, стр. 158, 1920 и *Brit. Assoc. Adv. Sci. Repts.* (Edinburgh), 1921.

²⁾ Сравнения теорий прочности, примененных к различным задачам проектирования, даны в статье Roth, *Z. Math. u. Phys.*, т. 48, 1902.

круглого вала придется сначала установить допустимую величину рабочего напряжения при сдвиге $[\tau] = \tau_{\max} = \tau_T/k$. Тогда диаметр вала может быть найден по формуле (152) т. I, стр. 241. Пользуясь четырьмя теориями, разобранными выше, получаем следующие отношения диаметров:

$$1 : 1,09 : 1,26 : 1,17.$$

Другой способ сравнения рассмотренных выше четырех теорий прочности приведен на рис. 296. Рисунок начерчен для материала, который имеет одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии и находится в плоском напряженном состоянии¹⁾, следовательно, $\sigma_3 = 0$. Линии на рисунке определяют значения σ_1 и σ_2 , при которых начинается текучесть. Теория наибольших напряжений представлена квадратом 1 2 3 4, в котором длины OA и OB представляют напряжения на пределе текучести при простом растяжении и в направлениях, соответствующих главным напряжениям. Таким же образом A' и B' соответствуют простому сжатию. Точкой 1 представлены равные растягивающие напряжения в двух перпендикулярных направлениях,

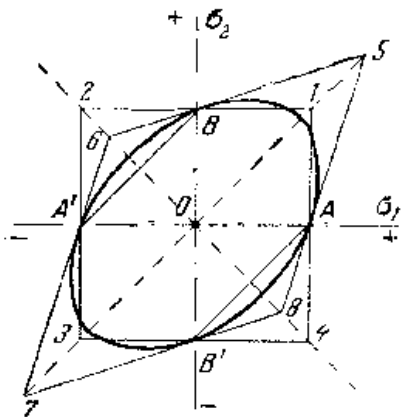


Рис. 296.

причем каждое равно пределу текучести при простом растяжении. Согласно теории наибольших напряжений текучесть не имеет места при напряжениях, представленных точками внутри квадрата 1 2 3 4.

Теория наибольших деформаций представлена ромбом 5 6 7 8 (рис. 296). Так как растяжение в одном направлении уменьшает деформацию в перпендикулярном, эта теория указывает на то, что два равных растягивающих напряжения вызовут текучесть при гораздо больших значениях напряжений (точка 5), чем указано теорией наибольших напряжений (точка 1). Координаты точки 5 на основании выражения (292) будут $\sigma_T/(1 - \nu)$. Если два главных напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, то теория наибольших деформаций указывает, что текучесть начинается соответственно точкам 6 и 8, которые имеют координаты, численно равные $\sigma_T/(1 - \nu)$. Значения напряжений в этих точках, следовательно, являются меньшими указываемых теорией наибольших напряжений (точки 2 и 4).

Теория наибольших касательных напряжений представлена неправильным шестиугольником $A'1B'A'3B'A$, который построен на

¹⁾ См. статья А. J. Весселга, цит. на стр. 370; В. Р. Наигл, цит. на стр. 373.

основании выражения (293). Пользуясь уравнением (293), нужно учитывать, что в данном случае $\sigma_3 = 0$, и поэтому σ_2 должно быть принято вместо σ_3 , когда σ_2 отрицательно. Эта теория совпадает с теорией наибольших напряжений, когда оба главных напряжения имеют один и тот же знак, но они значительно расходятся, когда главные напряжения имеют противоположные знаки.

Для плоской задачи условие (294) теории наибольшей потенциальной энергии сводится к следующему:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2.$$

Графиком этого уравнения является эллипс, показанный на рис. 296. Эллипс лишь незначительно отклоняется от шестиугольника, представляющего теорию наибольших касательных напряжений.

Когда материал подвергается равномерному гидростатическому давлению по всем направлениям ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$), теория наибольшей потенциальной энергии дает

$$p_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3(1-2\nu)}}, \tag{b}$$

где p_T — давление, при котором начинается текучесть материала. Однако этот результат не согласуется с испытаниями на всестороннее равномерное сжатие. Как уже отмечалось (см. стр. 365), однородные изотропные материалы могут противостоять большим гидростатическим давлениям, оставаясь упругими.

Чтобы получить лучшее согласование между теорией и опытом, Губер¹⁾ предложил разложить полную энергию деформации тела на два компонента: 1) энергию деформации при всестороннем равномерном растяжении или сжатии и 2) энергию деформации, соответствующую изменению формы. Затем он предложил использовать только *энергию формоизменения* для оценки состояния текучести и разрушения материала²⁾. Чтобы выполнить разделение энергии деформации на две части, начнем опять с рассмотрения объемного напряженного состояния, определяемого тремя главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 295). Закон Гука дает

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

¹⁾ М. Т. Huber, *Czasopismo techniczne*, Львов (Чемберг), 1904; см. также А. Förrpl und L. Förrpl, *Drang und Zwang*, München, 2-е изд., т. I, стр. 50, 1924.

²⁾ По-видимому, К. Максвелл был первым, который выразил мнение, что «когда (энергия формоизменения) достигнет определенного предела, тогда элемент начнет разрушаться». Это было сформулировано в письме Максвелла (1856 г.) к Вильяму Томсону и стало известным лишь после опубликования письма Максвелла.

Складывая эти уравнения, получаем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (c)$$

чем устанавливается, что относительное изменение объема пропорционально сумме трех главных напряжений. Если эта сумма равна нулю, то изменение объема отсутствует, и материал подвергается только деформации изменения формы.

Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} p. \quad (d)$$

В этом случае никакого искажения формы не будет и существует только всестороннее равномерное растяжение или сжатие.

Для общего случая введем обозначение

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = p \quad (e)$$

и затем разложим каждое из трех главных напряжений на два составляющих следующим образом:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1, \quad \sigma_2 = p + \sigma'_2, \quad \sigma_3 = p + \sigma'_3. \quad (f)$$

Складывая эти три выражения и пользуясь выражением (e), получаем

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Так как сумма σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 обращается в нуль, то эти напряжения вызывают лишь искажение формы, и выражения (f) обеспечивают разделение данной системы напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 на две: 1) равномерно растягивающее или сжимающее p , вызывающее лишь изменение объема, и 2) систему напряжений σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 , вызывающую лишь искажение формы.

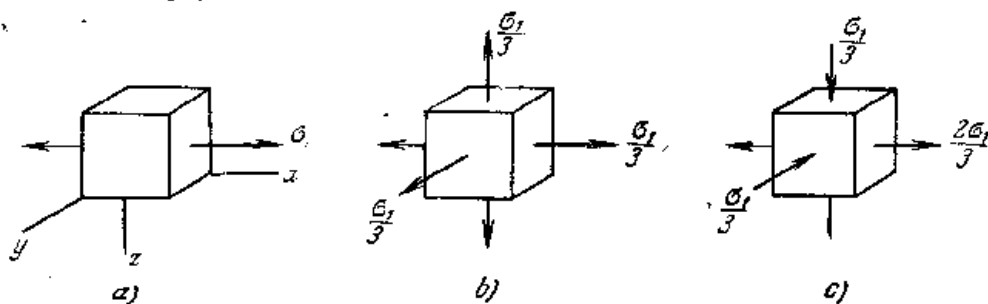


Рис. 297.

В качестве примера приложения выражений (f) рассмотрим случай простого растяжения (рис. 297, a). Подставив $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ в формулы

(e) и (f), получим

$$p = \frac{\sigma_1}{3}, \quad \sigma'_1 = \frac{2\sigma_1}{3}, \quad \sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{\sigma_1}{3}.$$

Таким образом, простое растяжение в направлении x можно разложить на равномерное растяжение (рис. 297, b) и сочетание явлений чистого сдвига по плоскостям xy и xz (рис. 297, c). Можно видеть, что работа напряжений, вызывающая лишь искажение формы (рис. 297, c), на перемещениях, возникающих от равномерного растяжения (рис. 297, b), обращается в нуль. Энергии деформации случаев (b) и (c), таким образом, не зависят друг от друга, и полная энергия деформации при простом растяжении (рис. 297, a) получается путем сложения энергии деформации при всестороннем равномерном растяжении и энергии деформации изменения формы.

Это заключение также справедливо в общем случае, когда действуют все три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Из этого следует, что энергия искажения формы получается путем вычитания энергии деформации всестороннего равномерного растяжения из полной энергии деформации. Подставив

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

в выражение (294), получим для энергии деформации при всестороннем равномерном растяжении выражение

$$\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Таким образом, энергия деформации изменения формы в общем случае будет

$$U_1 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]. \quad (295)$$

Это выражение можно принять за основу для определения разрушения пластичных материалов, имеющих ясно выраженный предел текучести σ_T при простом растяжении. Согласно этой теории в общем случае действия напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 текучесть начинается, когда энергия формоизменения (выражение (295)) достигает значения энергии этого же вида на пределе текучести в случае простого растяжения. Последняя величина получается из выражения (295) подстановкой $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, что дает

$$U_1 = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2.$$

Тогда условие для состояния текучести, основанное на теории энергии изменения формы, будет

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (296)$$

В частном случае плоской задачи мы подставим сюда $\sigma_3 = 0$, и условие текучести будет

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2. \quad (297)$$

Рассматривая, например, сочетание осевого растяжения и кручения тонких труб (см. стр. 369) и обозначая через σ и τ соответствующие напряжения, находим главные напряжения (см. формулы (31) и (32) т. I, стр. 51) в виде

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2},$$

и условием текучести (формула (297)) становится

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_T^2. \quad (298)$$

Это выражение, рассмотренное и ранее (стр. 368), хорошо согласуется с опытами. В случае одного только кручения мы имеем $\sigma = 0$, и выражение (298) дает

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} = 0,577 \sigma_T. \quad (299)$$

что опять хорошо согласуется с результатами опытов.

В настоящее время условие текучести (296) принимается вообще в качестве пригодного для пластичных материалов, причем предполагается, что материал начинает течь, когда энергия деформации изменения формы достигает определенного значения.

Эйхингером¹⁾ было показано, что то же условие текучести, определяемое теорией наибольшей энергии изменения формы (выражение (296)), можно также получить рассмотрением касательных напряжений, действующих по октаэдральной плоскости, например ABC на рис. 298, когда кубик подвергается действию главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . Из рисунка видно, что косинус угла между нормалью n к октаэдральной

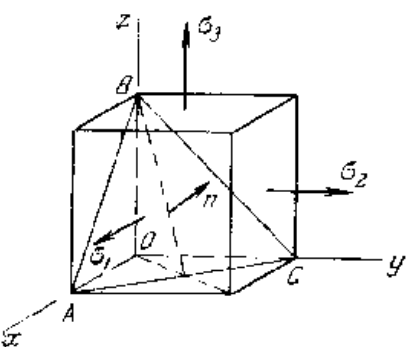


Рис. 298.

плоскости и координатными осями x , y и z равняется $1/\sqrt{3}$. Разложив результирующее напряжение S , действующее по октаэдральной

плоскости, на три составляющие X , Y , Z и написав три условия равновесия, найдем

$$X = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad Y = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad Z = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

Результирующее напряжение по октаэдральной плоскости равно

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}.$$

Нормальная составляющая N напряжения S может быть получена проектированием составляющих X , Y , Z на направление нормали n , что дает

$$N = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Тогда, касательное напряжение $\tau_{\text{окт}}$ по октаэдральной плоскости будет

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \sqrt{S^2 - N^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая этот результат с выражением (296), видим, что условие текучести, основанное на теории энергии искажения формы, эквивалентно положению, что текучесть начинается, когда октаэдральное касательное напряжение достигает критического значения, равного

$$(\tau_{\text{окт}})_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T = 0,47 \sigma_T.$$

Г. Захс принял критическое значение $\tau_{\text{кр}}$ для монокристалла (см. стр. 335) за основу для вычисления напряжения на пределе текучести для поликристаллического образца¹⁾. По выражению (b), стр. 340, мы знаем, что нагрузка на пределе текучести образца из монокристалла зависит от ориентировки кристалла. Рассматривая поликристаллический элемент как систему кристаллов, размещенных беспорядочно, Захс вычислил зависимость между σ_T для образца при растяжении и $\tau_{\text{кр}}$ для образца из монокристалла методом приближенного осереднения. В вычислениях пренебрегалось влиянием граничных поверхностей кристаллов и предполагалось, что на пределе текучести все кристаллы потекут одновременно. Для кристаллов с гранцентрированной решеткой кубической структуры (например, алюминий, медь

¹⁾ A. Eichinger, Proc. 2d Internat. Congr. Appl. Mech., Zürich, стр. 325, 1926.

¹⁾ G. Sachs, Z. Ver. deut. Ing., т. 72, стр. 734, 1928. См. также H. I. Cox and D. G. Sorwith, Proc. Phys. Soc. (London), т. 49, стр. 134, 1937 и U. Dehlinger, Z. Metallkunde, т. 35, стр. 182, 1943.

и никель) он нашел

$$\sigma_T = 2,238 \tau_{кр.}$$

Повторяя вычисления для кручения, он нашел напряжение, соответствующее пределу текучести при сдвиге для поликристаллического образца, равное

$$\tau_T = 1,293 \tau_{кр.}$$

Из последних двух соотношений получаем

$$\tau_T = \frac{1,293}{2,238} \sigma_T = 0,577 \sigma_T,$$

что совпадает с результатами теории энергии искажения формы (см. формулу (299)). Захс предположил, что подобный результат может быть получен и для кристаллов с объемноцентрированной решеткой кубической структуры (как для железа). Таким образом, мы видим, что имеется некоторое физическое обоснование для результата, полученного ранее на основании предположения, что текучесть кристаллического материала начинается, когда количество энергии формоизменения достигает определенного значения для каждого материала.

В предыдущем изложении мы касались установления критериев для начала текучести пластичных материалов в общем случае напряженного состояния. В случае хрупких материалов, которые разрушаются без пластической деформации, мы также нуждаемся в критерии разрушения в общем случае действия

напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . Такой критерий представлен теорией прочности, разработанной Мором¹⁾, в которой рассматривается не только текучесть, но также и собственно разрушение. При разработке своей теории Мор применил графическое изображение напряженных состояний в элементе тела с помощью кругов напряжений, как пояснено в п. 18, т. I, стр. 64. В этом изображении (круг Мора) нормальные и касательные составляющие напряжения, действующие по какой-либо площадке, определяются координатами некоторой точки в пределах заштрихованной площади (рис.

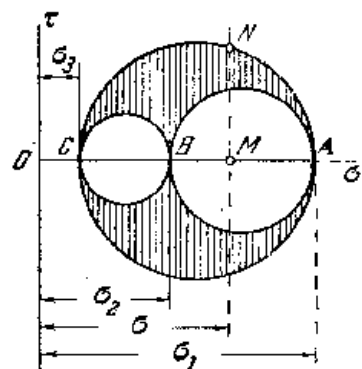


Рис. 299.

299). Точки, лежащие на одной и той же вертикальной линии (как, например, MN), представляют напряжения по площадкам с одинаковым нормальным напряжением σ и с различными касательными

напряжениями. Естественно предположить, что самая слабая из этих площадок — площадка с наибольшим касательным напряжением, представленная точкой N на внешнем круге. Повторяя те же рассуждения с точками на какой-либо другой вертикальной линии, мы окончательно приходим к заключению, что наиболее слабой площадкой должна быть одна из площадок, напряженное состояние которой представлено точками на внешнем круге ANC . Следовательно, один лишь внешний круг достаточен для определения предельного напряженного состояния, т. е. напряженного состояния, при котором имеет место либо начало текучести, либо разрушение в зависимости от того, пластичен ли материал или хрупок.

Начнем с определения напряжений текучести. Пусть на рис. 300 круг диаметром OA представляет условие текучести при простом растяжении. По тем же соображениям круг диаметром OC представит условие текучести при простом сжатии, а круг с диаметром DB представит условие текучести при чистом сдвиге. Если на основании проделанных с данным материалом опытов получить ряд кругов такого рода, то можно построить огибающие этих кругов (MN и M_1N_1). Мор далее допустил, что текучесть может начаться только при напряженных состояниях, представленных одним из кругов, касающихся этих огибающих кривых.

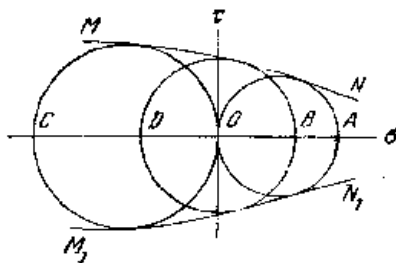


Рис. 300.

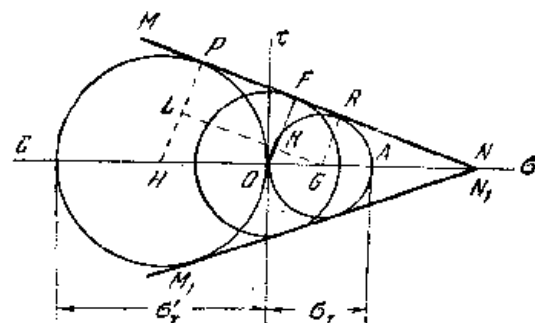


Рис. 301.

Предположим, например, что огибающие кривые MN и M_1N_1 можно заменить прямыми линиями (рис. 301). Тогда, зная предельные условия при простом растяжении ($\sigma_T = \tau_T$) и при простом сжатии ($\sigma_3 = -\sigma_T'$), можно легко получить условия текучести при чистом сдвиге. Необходимо лишь найти радиус OF круга, построенного при центре в точке O и касающегося прямой MN . Из рис. 301 имеем $\overline{OK} = \overline{OF} - \overline{KF} = \tau_T - \sigma_T/2$ и $\overline{HL} = \overline{HP} - \overline{LP} = \sigma_T'/2 - \sigma_T/2$. Тогда из подобия треугольников GOK и GHL получим

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} \quad \text{или} \quad \frac{2\tau_T - \sigma_T}{\sigma_T' - \sigma_T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_T' + \sigma_T}$$

¹⁾ O. Mohr, Z. Ver. deut. Ing., т. 44, стр. 1524, 1900. См. также его Abhandlungen aus dem Gebiet der technischen Mechanik, 2-е изд., Берлин, стр. 192, 1914.

откуда

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_1'}{\sigma_1 + \sigma_1'} \quad (g)$$

Когда $\sigma_1 = \sigma_1'$, уравнение (g) совпадает с теорией наибольших касательных напряжений.

Теперь приложим теорию Мора к случаю хрупкого материала при условии плоского напряженного состояния и предположим, что на

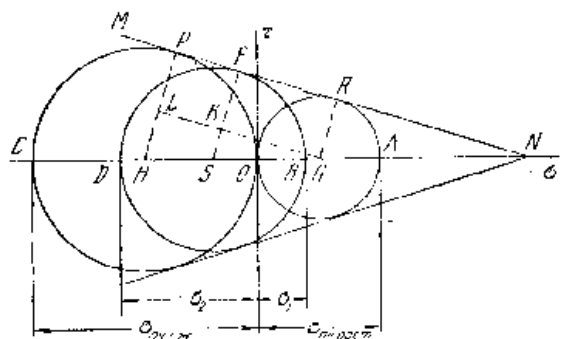


Рис. 302.

рис. 302 OA представляет предел прочности материала при растяжении $\sigma_{пл.раст}$ и OC представляет предел прочности при сжатии $\sigma_{пл.сж}$. Тогда для любого отношения $\sigma_{max}/\sigma_{min} = \sigma_1/\sigma_2$. Крайние значения этих напряжений получатся путем построения круга диаметром $\overline{BD} = \sigma_1 - \sigma_2$, касающегося линии MN ¹⁾. Из рис. 302 получим теперь следующие соотношения:

$$\overline{SK} = \overline{SF} \quad \overline{KF} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_{пл.раст}}{2};$$

$$\overline{HL} = \overline{HP} - \overline{LP} = \frac{\sigma_{пл.сж}}{2} - \frac{\sigma_{пл.раст}}{2};$$

$$\overline{GS} = \overline{GO} + \overline{OS} = \frac{\sigma_{пл.раст}}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2};$$

$$\overline{GH} = \overline{GO} + \overline{OH} = \frac{\sigma_{пл.раст}}{2} - \frac{\sigma_{пл.сж}}{2};$$

из подобия же треугольников GSK и GHL находим

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{GS}}{\overline{GH}} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_{пл.раст}}{\sigma_{пл.сж} - \sigma_{пл.раст}} = \frac{\sigma_{пл.раст} - \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_{пл.раст} + \sigma_{пл.сж}},$$

откуда

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{пл.раст}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{пл.сж}} = 1, \quad (h)$$

¹⁾ Заметим, что σ_1 и σ_2 представляют алгебраические величины и, следовательно, расстояние $OD = -\sigma_2$.

Таким образом, для любого заданного значения отношения σ_1/σ_2 можно вычислить значения σ_1 и σ_2 при разрушении.

В предыдущем параграфе предполагалось, что σ_1 представляет наибольшее главное напряжение σ_{max} и что σ_2 — наименьшее главное напряжение σ_{min} . Так как третье главное напряжение равно нулю в случае плоского напряженного состояния, то σ_1 и σ_2 должны иметь противоположные знаки, как и показано на рис. 302, и отношение σ_1/σ_2 должно быть отрицательным. Однако в случае растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям третье главное напряжение $\sigma_3 = 0$ будет представлять σ_{min} , и соответствующий круг Мора будет кругом диаметром OA на рис. 302. Тогда разрушение произойдет, когда большее из двух растягивающих напряжений достигнет значения $\sigma_{пл.раст}$. Подобным же образом в случае сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям напряжение $\sigma_3 = 0$ представляет σ_{max} и на рис. 302 получается круг диаметром OC . В этом случае разрушение произойдет, когда большее сжимающее напряжение достигнет значения $\sigma_{пл.сж}$.

Построив для теории Мора чертеж, подобный рис. 296, стр. 374, мы получим для растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям граничные линии AB и BC (рис. 303), указывающие на то, что в этом случае разрушение произойдет, если большее растягивающее напряжение достигнет значения $\sigma_{пл.раст}$. Подобным образом для сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям мы получим линии DE и EF . Если мы имеем σ_1 при растяжении и σ_2 при сжатии, то условия для разрушения будут представлены уравнением (h), которое дает линию AF на рис. 303. Линия CD получается подобным же образом. Никакого разрушения не будет происходить при напряженных состояниях, определяемых точками, лежащими внутри шестиугольника $ABCDEF$, предельные же напряжения можно получить из этого шестиугольника для любого значения отношений σ_1/σ_2 . Например, для того чтобы найти предел прочности хрупкого материала при чистом сдвиге, мы заметим, что в этом случае $\sigma_1 = -\sigma_2$, а соответствующая предельная точка будет являться точкой пересечения N линии OM (рис. 303) и стороны AF шестиугольника. Значение $\tau_{пл.раст}$ можно определить из рисунка или вычислить из уравнения (h), которое для $\sigma_1 = -\sigma_2$

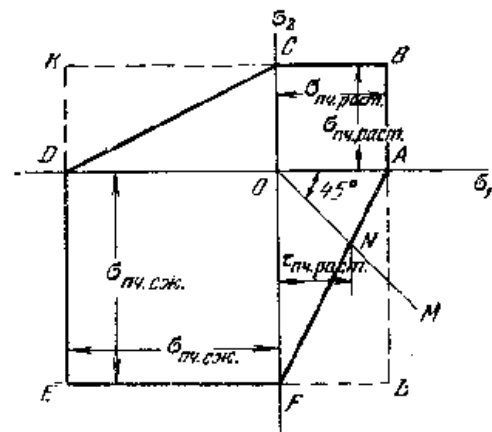


Рис. 303.

дает

$$\sigma_1 = \tau_{\text{пл.раст}} = \frac{\sigma_{\text{пл.раст}} \sigma_{\text{пл.сж}}}{\sigma_{\text{пл.раст}} + \sigma_{\text{пл.сж}}} \quad (i)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и условие (g) для текучести.

Если применить выражение (i) к такому материалу, как чугун, и допустить, что предел прочности при сжатии в четыре раза больше предела прочности при растяжении, то мы найдем предел прочности при сдвиге равным

$$\tau_{\text{пл.раст}} = 0,8\sigma_{\text{пл.раст}}$$

что удовлетворительно согласуется с опытами Баха¹⁾.

Квадрат *BKEL*, намеченный штриховыми линиями на рис. 303, представляет условия разрушения согласно теории наибольших напряжений. Видно, что, пользуясь теорией Мора, проектировщик обеспечит конструкции больший запас прочности, чем по теории наибольших напряжений, когда главные напряжения имеют противоположные знаки. Теория Мора может быть рекомендована в случае хрупких материалов, хотя предположение, что должен быть рассмотрен только внешний круг напряжений (рис. 299, стр. 380), не всегда подтверждается опытами²⁾.

83. Испытания на удар

Испытания на удар применяются для изучения вязкости материалов, т. е. способности материала поглощать энергию при пластической деформации. При статических испытаниях на растяжение эта энергия представляется площадью диаграммы кривой растяжения и можно заключить, что для того, чтобы иметь высокую вязкость, материал должен иметь высокую прочность и в то же время большую пластичность. Хрупкие материалы имеют низкую вязкость, так как они имеют лишь малую пластическую деформацию перед разрушением. Применение таких материалов в конструкциях является опасным, так как разрушение может произойти внезапно без значительной деформации.

При обсуждении вопросов о различных видах разрушений (см. п. 79) было указано, что один и тот же материал может вести себя как хрупкий или как пластический материал в зависимости от внешних условий. Испытание на растяжение образца из монокристалла каменной соли дает хрупкое разрушение (раскалывание) по одной из главных кристаллографических плоскостей при испытании в комнатной температуре. Тот же образец при испытании в горячей воде деформируется пласти-

чески путем скольжения по октаэдральным плоскостям. Подобные условия могут встретиться также в ответственных случаях применения мягкой строительной стали. При обычных испытаниях на растяжение сталь может иметь большую пластическую деформацию, в то время как в испытаниях при некоторой повышенной температуре разрушение может иметь вид, как у вполне хрупкого материала. Примеры катастрофических случаев таких разрушений наблюдались во время второй мировой войны в многочисленных разрушениях сварных торговых судов¹⁾. Последующие исследовательские работы показали, что температура охрупчивания стальных пластин, примененных в обшивках судов, была того же порядка, что и рабочая температура.

Для того чтобы пояснить переход от хрупкого разрушения к пластическому для образца из монокристалла каменной соли, испытанного на растяжение, А. Ф. Иоффе²⁾ предложил различать два рода растягивающих напряжений: 1) растягивающее напряжение σ_n , вызывающее хрупкое разрушение отрывом по одной из главных кристаллографических плоскостей, и 2) растягивающее напряжение σ_s , соответствующее началу скольжения по одной из октаэдральных плоскостей кристалла³⁾. На рис. 304 эти две величины представлены в функции температуры t образца. В опытах Иоффе сопротивление отрыву оставалось практически независимым от температуры. На рис. 304 диаграмма для σ_n дана горизонтальной линией. В то же самое время сопротивление скольжению зависело в значительной степени от температуры образца, и ординаты кривой для σ_s уменьшались с увеличением температуры. Точка C пересечения двух кривых определяет критическое значение $t_{кр}$ температуры. Если температура при испытании выше $t_{кр}$, то сопротивление скольжению меньше, чем сопротивление отрыву, и образец будет течь пластически. Для температур ниже, чем $t_{кр}$, мы имеем $\sigma_n < \sigma_s$, и образец будет разрушаться отрывом без пластической деформации.

Имеются другие важные выводы, которые можно сделать на основании диаграммы, представленной на рис. 304. Рассмотрим влияние

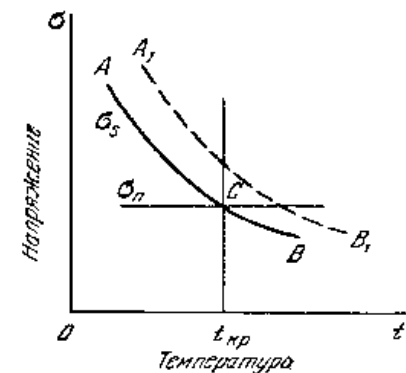


Рис. 304.

¹⁾ См. статью Finn Jonassen'a в W. M. Murray (изд.), Fatigue and Fracture of Metals, 1952.

²⁾ Z. Phys., т. 22, стр. 286, 1924.

³⁾ Предполагается, что ось образца параллельна одной из кристаллографических осей.

¹⁾ C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 7-е изд., стр. 362.

²⁾ Th. v. Kármán, Forschungsarb., № 118 и Z. Ver. deut. Ing., т. 55, 1911. См. также R. Böcker, Forschungsarb., № 175/176.

скорости нагружения на результаты испытания. Известно, что с увеличением скорости сопротивление материала скольжению увеличивается, в то время как его сопротивление отрыву остается практически постоянным. В результате этого ординаты σ_x кривой будут увеличиваться и кривая будет смещаться в новое положение A_1B_1 (рис. 304), в то время как линия σ_n остается стационарной. Таким образом, точка пересечения двух кривых смещается вправо, указывая на то, что с увеличением скорости нагружения критическая температура растет. Это заключение подтверждается в испытаниях на удар, которые дают хрупкое разрушение при более высоких температурах, чем в статических испытаниях.

Предположим теперь, что образец подвергается кручению и что ось образца принята перпендикулярной к одной из октаэдральных плоскостей. Текучесть образца при сдвиге начнется приблизительно при том же значении касательного напряжения, как и при испытаниях на растяжение, но соответствующее значение наибольшего нормального напряжения σ_n , равного в этом случае наибольшему касательному напряжению, будет составлять приблизительно половину значения σ_n при испытании на растяжение. Следовательно, при построении диаграммы для испытания на кручение, подобной диаграмме на рис. 304, мы должны принять значения ординат σ_x кривой приблизительно вдвое меньшими, чем значения для испытаний на растяжение. В результате этого точка C пересечения кривых будет смещена влево, и мы заключаем, что при испытаниях на кручение критическая температура должна быть ниже, чем при испытаниях на растяжение. Это заключение согласуется с опытами.

Рассматривая далее влияние напряженного состояния на значение критической температуры, предположим, что равномерное растяжение по всем трем направлениям накладывается на простое растяжение, так что мы получаем пространственное напряженное состояние. Известно (см. предыдущий параграф), что такое положение не влияет на значение наибольшего касательного напряжения, при котором начинается текучесть. Однако значение σ_x увеличивается, ординаты σ_x кривой, представленной на рис. 304, увеличиваются, а точка C пересечения перемещается вправо. Таким образом, критическая температура для принятого пространственного напряженного состояния будет выше, чем для простого растяжения. Подобное трехмерное напряженное состояние возникает в надрезе образца с выточкой. Такие образцы имеют более высокие значения $t_{кр}$, чем гладкие образцы¹⁾.

Фундаментальные идеи относительно критической температуры, при которой происходит переход от хрупкого к пластическому раз-

рушению, были развиты Н. Н. Давиденковым и применены к кристаллическим материалам, особенно к различного рода сталям. Пользуясь диаграммой, подобной диаграмме, изображенной на рис. 304, он предусмотрел влияние различных факторов на значение критической температуры и показал своими экспериментальными работами, что предвычисления удовлетворительно согласовывались с опытными фактами¹⁾. Для определения критической температуры были использованы испытания на удар. Так как количество работы, необходимой для случая хрупкого разрушения, во много раз меньше, чем для пластического разрушения, опыты показали при критической температуре резкое изменение количества поглощенной энергии. Рис. 305 представляет результаты испытаний на растяжение при ударе гладких цилиндрических стальных образцов. Можно видеть, что имеет место резкое изменение поглощенной энергии в интервале от -130° до -110° C.

Изменением процесса тепловой обработки может варьироваться в значительной степени величина зерна стали, и исследование влияния размера зерна на величину критической температуры представит практический интерес. Ведь известно, что с увеличением размера зерна сопротивление стали отрыву уменьшается. Следовательно, для крупнозернистых сталей горизонтальная линия для σ_n (рис. 304) будет понижаться, и критическая температура будет выше, чем для мелкозернистых сталей. Для того чтобы проверить это заключение, образцы из среднеуглеродистой стали (0,23% углерода) были подвергнуты двум различным температурным обработкам. В первом случае температура была поднята до 1100° C и течение двух часов, а затем образцы были медленно охлаждены в печи. Во втором случае после пребывания образцов при температуре 950° C в течение двадцати минут, они были охлаждены на воздухе. В этом процессе в первом случае были получены крупные зерна, во втором — мелкие зерна. Затем были испытаны на удар гладкие цилиндрические образцы, и результаты опытов представлены на рис. 306. Видно, что критическая температура для крупнозернистой стали была приблизительно равна -95° C, в то время как в случае мелкозернистой она была равна -160° C.

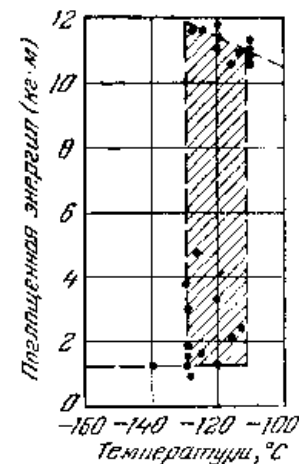


Рис. 305.

¹⁾ См. в книге Н. Н. Давиденкова «Динамические испытания металлов», 1936 и «Вопросы удара при изучении металла», изд. Акад. наук, Москва, 1938. Результаты, приведенные в последующем изложении, если нет особых указаний, взяты из последней книги.

¹⁾ О более подробных сведениях о напряжениях в канавках см. статью E. Orowan'a в изд. W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, 1952.

Было также исследовано влияние размера образца на значение критической температуры. Но здесь простая диаграмма на рис. 304 не дает ясного представления о результатах опытов. С увеличением размеров можно ожидать уменьшения сопротивления хрупкому разрушению, так как вероятность наличия решающих несовершенств увеличивается с увеличением объема¹⁾ (см. стр. 331). Следовательно, при больших объемах горизонтальная линия σ_n будет понижена на рис. 304, вызывая смещение точки С вправо. Но вместе с тем оказывается, что увеличение объема уменьшает значение σ_s (см. стр. 331), и соответствующее понижение кривой σ_s на рис. 304 повлечет за собой смещение С в противоположном направлении.

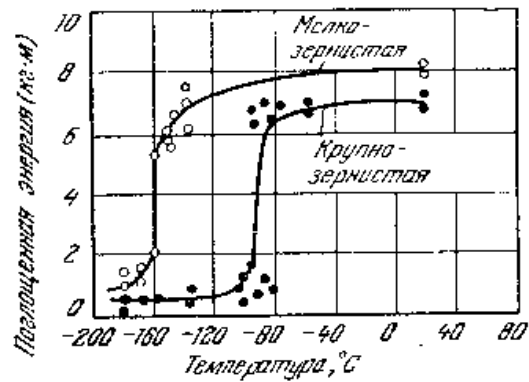


Рис. 306.

Таким образом, окончательный результат зависит от относительного значения этих двух факторов. Опыты с гладкими цилиндрическими образцами показывают, что понижение линии σ_n является более важным, и точка С перемещается вправо, показывая, что критическая температура увеличивается с увеличением объема образца. Этот фактор нужно учитывать, когда применяют результаты испытаний над малыми образцами в процессе проектирования конструкций больших размеров.

В предыдущем изложении мы рассмотрели только испытания на растяжение цилиндрических образцов, в которых распределение напряжений было равномерным. Однако на практике при испытаниях на удар применяются образцы с надрезами и имеется наличие концентрации напряжений. Чтобы исследовать влияние неравномерного распределения напряжений на величину критической температуры, начнем со случая изгиба гладкого цилиндрического образца. Опыты на изгиб при статической нагрузке показывают, что текучесть стали начинается при более высоких напряжениях, чем в случае равномерного растяжения. Напряжение, соответствующее пределу текучести, сначала достигается в тонких слоях волокон, находящихся на наибольшем расстоянии от нейтральной оси, и образование участков текучести у этих волокон задерживается наличием смежного материала с более низким напряжением. Последующий затем рост величины предела текучести нужно рассмотреть, используя диаграмму рис. 304 приме-

¹⁾ О распространении критерия Гриффиса на пластические материалы см. E. Orowan, цит. на стр. 386.

нительно к испытаниям на изгиб. Ординаты σ_s кривой должны увеличиться, в результате чего происходит смещение точки С вправо. Критическая температура, полученная из испытаний на изгиб, будет тогда выше, чем значение, полученное из испытаний на растяжение. Это заключение согласуется с результатами опытов.

Подобные рассуждения можно применить и к случаям концентрации напряжений, вызываемых выточками и надрезами (см. стр. 254), причем надо ожидать увеличения $t_{кр}$ для стержней с надрезами. На рис. 307 даны результаты испытаний на удар при изгибе для тех же двух сталей (мелко- и крупнозернистых), рассмотренных ранее¹⁾ (см. рис. 306). Примененный тип выточки показан на рис. 308.

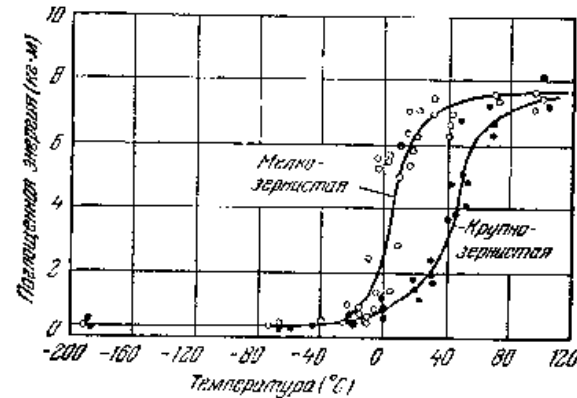


Рис. 307.

Сравнивая рис. 306 и 307, видим, что вследствие наличия выточки критическая температура значительно увеличилась. Мы видим также,

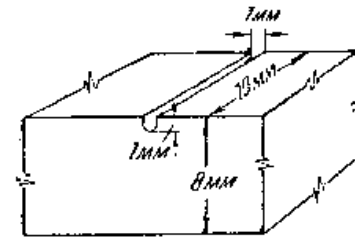


Рис. 308.

что интервал температуры, при котором происходит переход от хрупкого к пластическому разрушению, гораздо больше в случае образцов с надрезами, и критическая температура не так четко определяется, как для образцов без надрезов. Статические испытания образцов с надрезами в интервале²⁾ перехода показали, что характер разрушения изменялся постепенно, и часть поверхности разрушения, которая имела хрупкий характер, увеличивалась при понижении температуры. В то же самое время количество работы, потребное для того, чтобы произвести разрушение, уменьшалось. Рис. 309 представляет несколько диаграмм нагрузка—смещение, полученных при статических испытаниях на изгиб образцов с надрезами при различных температурах. Н. Н. Давиденков предложил принять за критическую такую температуру, при которой поглощаемая работа при испытаниях на удар составляет 40% наибольшей работы, получаемой

¹⁾ См. Н. Н. Давиденков и Ф. Ф. Витман, Журнал технической физики, Ленинград, т. 7, стр. 343, 1937.

²⁾ Давиденков и Витман, там же.

при несколько более высокой температуре. Для того чтобы получить диаграммы нагрузка—смещение при испытаниях на удар, были сконструированы специальные пьезокварцевые динамометры.

После этих общих рассуждений рассмотрим теперь тип испытаний на удар, который должен применяться на практике для определения $t_{кр}$. Точное определение $t_{кр}$ важно для того, чтобы избежать опасного положения, при котором критическая температура материала является такой же, как рабочая температура конструкции. Очевидно, что испытания на удар при комнатной температуре недостаточны, и в ответственных случаях должна быть проделана серия испытаний для ряда температур. Должна быть построена кривая перехода, подобная изображенной на рис. 307, и по ней должно быть определено $t_{кр}$. Испытания на изгиб стержней с надрезами предпочтительны, так как они дают переходную кривую при высоких температурах и этим самым уменьшают количество работы, затрачиваемой на проведение опытов при очень низких температурах. Если критическая температура определена и известна рабочая температура t_0 конструкции, то за меру безопасности Н. П. Давиденков рекомендует принять отношение

$$\frac{T_0 - T_{кр}}{T_0}, \quad (a)$$

где T_0 и $T_{кр}$ являются абсолютными температурами, соответствующими t_0 и $t_{кр}$. Это отношение уменьшается и приближается к нулю, когда T_0 приближается к $T_{кр}$. Результат говорит о весьма опасном положении, при котором малый внешний импульс может вызвать хрупкое разрушение конструкции. С другой стороны, отношение приближается к единице, когда $T_{кр}$ приближается к абсолютному нулю. В этом случае хрупкие разрушения не будут иметь места, и необходимо лишь выбрать размеры конструкции так, чтобы она была достаточно прочной для несения нагрузки без пластической деформации.

При выборе приемлемого значения отношения (a) для использования при проектировании нужно рассмотреть условия, которые действительно существуют в конструкции. Такие факторы, подни-

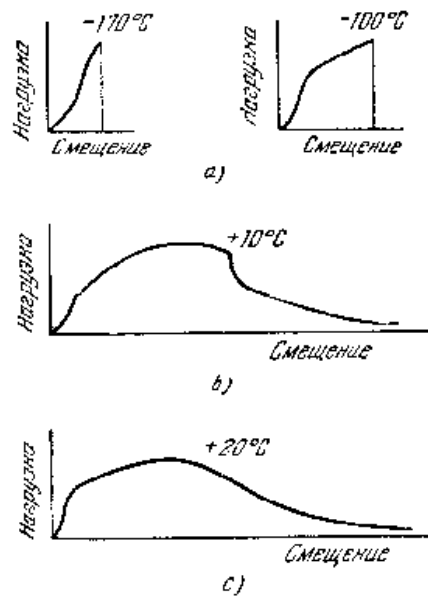


Рис. 309.

мающие напряжение, как резкие входящие углы и несовершенства при сварке, содействуют увеличению $t_{кр}$ температуры. Увеличение размеров конструкции имеет то же влияние. Для того чтобы иметь достаточную безопасность и сохранить отношение (a) по возможности большим, нужно использовать материалы с низким значением $t_{кр}$. Критическая температура может быть понижена не только путем изменения химического содержания материала, но также надлежащей тепловой обработкой. Мелкозернистая сталь имеет более низкое значение $t_{кр}$, чем крупнозернистая сталь. В последнее время проявился значительный интерес к хрупкому характеру металлов при низких температурах, и мы можем ожидать усовершенствования наших знаний по этому важному предмету ¹⁾.

84. Усталость металлов ²⁾

Части машин часто подвергаются действию переменных усилий, поэтому важно знать прочность материалов при таких условиях работы ³⁾. Хорошо известно, что под действием повторной нагрузки и разгрузки или под действием знакопеременных напряжений материалы разрушаются при напряжениях меньших, чем предел прочности материала в условиях его статического нагружения. Величина усилий, необходимого для того, чтобы произвести разрушение, уменьшается с увеличением числа циклов напряжений. Это явление уменьшения сопротивления материала повторным напряжениям называется *усталостью*, а испытание материала путем приложения таких напряжений называется *испытанием на выносливость*.

Если σ_{max} и σ_{min} представляют наибольшее и наименьшее значения повторного напряжения, то алгебраическая разность

$$R = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (a)$$

¹⁾ Библиографию по этому предмету можно найти в книге: Н. П. Давиденков, Вопросы удара при изучении металлов, 1938. См. также статью С. W. MacGregor'a в издании W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, стр. 229, 1952.

²⁾ Этот предмет разобран у H. J. Gough, The Fatigue of Metals, London, 1924 и H. F. Moore and J. B. Conners, The Fatigue of Metal, New York, 1927. Эти книги содержат библиографии по предмету. О дополнительных сведениях см. литографированное издание лекций H. J. Gough'a в Масачусетском технологическом институте, лето 1937. См. также R. S. A. and Fatigue of Metals (английский перевод), London, 1953, Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New York, 1941, M. Roš and A. Bichinger, Die Bruchgefahr fester Körper bei wiederholter Beanspruchung Ermüdung, Eidg. Materialprüfungsanstalt (Zürich) Ber., № 173, 1950.

³⁾ J. O. Ross нашел из испытаний большого количества разрушений частей машин, что 80% можно приписать усталости; см. Proc. Internat. Assoc. Test. Mat., 1912.

называется *диапазоном напряжений*. Цикл вполне определяется, если даны диапазон и наибольшее напряжение. Среднее напряжение равно

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}). \quad (b)$$

В частном случае симметричного цикла напряжений $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$, $R = 2\sigma_{\max}$ и $\sigma_m = 0$. Любой цикл переменных напряжений можно получить путем наложения симметричного цикла напряжений на постоянное среднее напряжение. Наибольшее и наименьшее значения переменного напряжения тогда определяются следующими формулами:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \frac{R}{2}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \frac{R}{2}. \quad (c)$$

Существуют различные способы приложения нагрузки при испытании на выносливость. Образец может подвергаться осевому растяжению и сжатию, изгибу, кручению или некоторым их сочетаниям. Простейшим способом деформирования является знакопеременный изгиб. На рис. 310 показан общепринятый для испытания на усталость

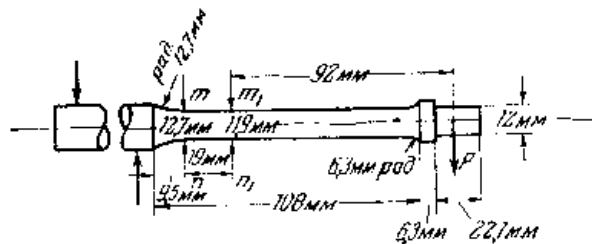


Рис. 310.

стержень¹⁾ в форме консоли. Поперечное сечение образца изменяется по длине таким образом, что наибольшее напряжение имеет место между сечениями m_1 и m_2 , и практически постоянно в этой области. Влияние концентрации напряжений исключено с помощью выкружки большого радиуса и увеличением диаметра стержня вблизи выкружки. Нагрузка P всегда направлена вниз, а образец вращается с постоянной скоростью. Поэтому напряжение изменяет знак через каждые пол оборота, и число циклов напряжения равно числу оборотов машины. Этот цикл напряжений является строго симметричным, знакопеременным при среднем напряжении, равном нулю, и диапазоне, равном удвоенному σ_{\max} .

Взяв несколько образцов и испытав их при различных грузах P , можно получить кривую, подобную показанной на рис. 311. Здесь

¹⁾ См. M c A d a m, Chem. and Metallurg., Engrg. 1921.

σ_{\max} представлено как функция числа циклов n , необходимого для того, чтобы произвести излом образца. Изображенная кривая была получена из опытов над образцами из мягкой стали. Вначале σ_{\max} уменьшается быстро с увеличением n , но после примерно четырех

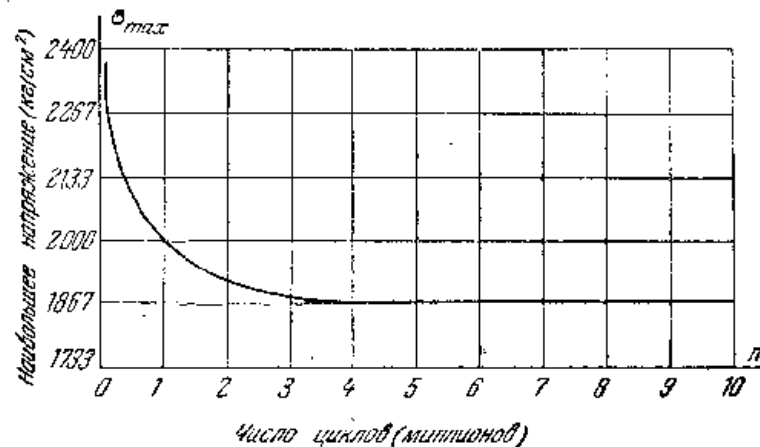


Рис. 311.

миллионов циклов нет уже какого-либо заметного изменения σ_{\max} и кривая асимптотически приближается к горизонтальной линии $\sigma_{\max} = 1900 \text{ кг/см}^2$. Напряжение, соответствующее этой асимптоте, называется *пределом выносливости* материала. Теперь в обычной практике

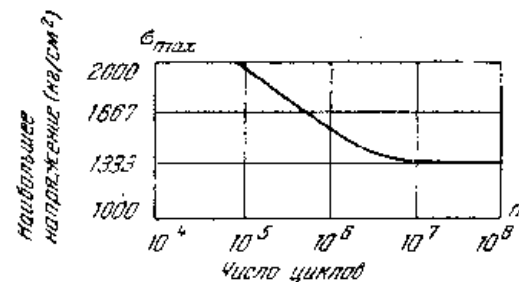


Рис. 312.

испытаний на выносливость вычерчивают σ_{\max} как функцию $\lg n$. В этом приеме величина предела выносливости обнаруживается определенным надломом кривой¹⁾. Пример такой кривой показан на рис. 312.

¹⁾ Результаты испытаний на усталость обычно весьма разрознены. Чтобы улучшить их изложение и истолкование, некоторыми исследователями было рекомендовано использование статистических методов. См. Симпозиум по статистическим аспектам усталости, Американское общество испытания материалов, 1951.

Существует значительная разница между разрушениями мягких стальных образцов, испытанных статически, и тех же образцов, испытанных при повторно переменных напряжениях. В первом случае значительное пластическое течение предшествует разрушению и поверхности разрушенного сечения имеют вследствие большой вытяжки кристаллов шелковистую волокнистую структуру. Трещина же усталости выглядит совершенно иначе. Она начинается в некоторой точке материала из-за местного дефекта или концентрации напряжений, вызванной резким изменением поперечного сечения. Раз образовавшись, трещина распространяется вследствие концентрации напряжений на ее концах. Это распространение прогрессирует под действием переменных напряжений до тех пор, пока в поперечном сечении площадь не уменьшится до такой степени, что оставшаяся ее часть разрушится внезапно под влиянием нагрузки.

Обычно можно различить две зоны в изломе усталости: одну, возникшую при постепенном развитии трещины, и другую, образовавшуюся при внезапном разрушении. Последняя зона походит на излом при испытании на растяжение образца с глубокой узкой выточкой (см. стр. 362), в которой форма образца препятствует скольжению, и поэтому разрушение происходит в результате преодоления сил сцепления. Это разрушение имеет вид хрупкого, если даже материал является пластичным. В случае испытания консольных образцов (рис. 310) наибольшие напряжения будут в наружных волокнах. Следовательно, трещина усталости обычно начинается на периферии и распространяется к центру. Там, где имеется концентрация напряжений вследствие выточек, выкружек или отверстий, трещина обычно начинается в наиболее высоко напряженном месте и распространяется от него в стороны. В таких случаях на поверхности излома видны концентрические относительно этой начальной точки кольца. Это весьма общий тип разрушения в частях машин, которые подвергаются действию переменных напряжений. Таким образом, очевидно, что хрупкий тип усталостного разрушения обязан своеобразному механизму разрушения, но не кристаллизация материала, как думали ранее.

В. Фэрбэрн первый установил на основании опытов над балкой из сварочного железа натуральных размеров¹⁾, что имеется *предельное напряжение*, которое можно прикладывать безопасно бесконечное число раз. Хотя это нельзя доказать непосредственным опытом, все опытные данные²⁾ подтверждают это положение, и теперь считается общепринятым, что для сталей и сплавов железа имеется определенный предельный диапазон напряжений, действию которого мож-

но сопротивляться в течение бесконечно большого числа циклов без разрушения.

Практически очень важно знать, как быстро кривая $\sigma - n$ приближается к асимптоте, так как это определит число циклов, необходимых для установления предела выносливости. Опыты показывают, что для черных металлов предел выносливости можно установить с достаточной точностью на основании 6—10 миллионов циклов. Для цветных металлов, например алюминия, нет определенного предела выносливости, и ординаты $\sigma - n$ кривой уменьшаются беспрестанно с возрастанием числа циклов.

Из предыдущих рассуждений следует, что определение предела выносливости для любого материала требует большого числа испытаний и значительного времени. Следовательно, практический интерес заключается в том, чтобы установить зависимость между пределом выносливости и другими механическими свойствами, которые можно определить при помощи статических испытаний. Но, хотя накоплено большое количество опытных данных, все еще нет возможности установить такую связь³⁾. В грубом приближении предел выносливости для черных металлов при симметричном цикле напряжений может быть принят равным от 0,40 до 0,55 предела прочности, полученного обычным испытанием на растяжение. Когда имеем дело с материалами, механические характеристики которых очень хорошо известны, например с углеродистыми сталями, оценки этого типа могут считаться достоверными. В противном случае такие оценки могут ввести в заблуждение, и необходимо пользоваться непосредственными испытаниями на выносливость. Некоторые результаты испытаний на выносливость сталей даны на рис. 313, а также в табл. 26 в конце главы.

В большинстве случаев испытания на выносливость выполняются для симметричного цикла напряжений ($\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$), в то время как во многих случаях расчета машин имеют дело с напряжениями, заменяющимися не по симметричному циклу. Необходимо знать пределы выносливости при этих переменных напряжениях. Велер — первый

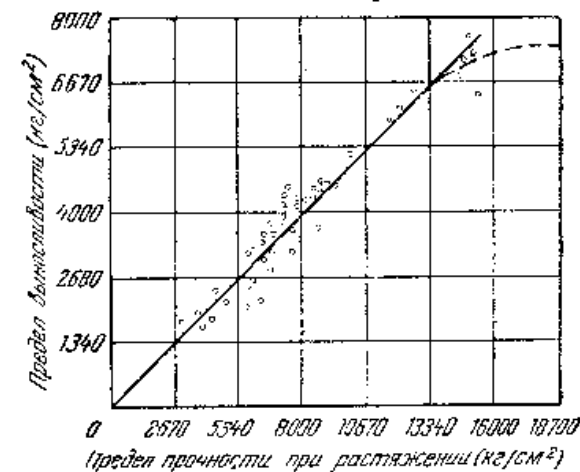


Рис. 313.

¹⁾ См. W. Fairbairn, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1864.

²⁾ Большое число кривых испытаний на выносливость было построено О. Н. Вагнером, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 10, 1910.

³⁾ См. книгу Н. J. Gough'a, цит. на стр. 391; см. его лекции, там же.

экспериментатор, систематически изучивший явление усталости¹⁾. Он показал, что диапазон напряжений R , необходимый для того, чтобы произвести разрушение, уменьшается с увеличением среднего напряжения σ_m . На основании этих опытов и работы Баушингера²⁾ Гербер предложил³⁾ параболический закон, связывающий диапазон напряжений R и среднее напряжение σ_m . Эта связь изображена параболическими кривыми на рис. 314, где среднее напряжение и диапазон напряжений выражены в долях предела прочности. Диапазон напряжений оказывается наибольшим при симметричном цикле напряжений

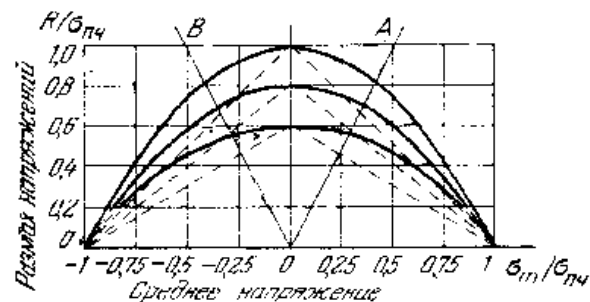


Рис. 314.

($\sigma_m = 0$) и приближается к нулю, когда среднее напряжение приближается к пределу прочности. Если предел выносливости для симметричного цикла напряжений и предел прочности известны, то предел выносливости для любого несимметричного цикла напряжений можно получить из приведенных кривых. Другие исследования показывают, что не существует общего закона, связывающего среднее напряжение и диапазон напряжений⁴⁾. Например, имеются материалы⁵⁾, для которых зависимость между R и σ_m представляется более точно пунктирными линиями (закон Гудмана) на рис. 314, а не параболой.

Прямые OA и OB на рис. 314 имеют уклон, равный 2, и определяют область AOB , в которой напряжение изменяет знак в течение цикла. Вне этой области напряжение всегда остается растягивающим или сжимающим. Определенные опытным путем значения вну-

¹⁾ A. Wohler, Z. Bauwesen, тт. 8, 10, 13, 16 и 20, 1858—70. Оценка этой работы на английском языке дана в Engineering, т. 11, 1871; см. также Uplwin, The Testing of Materials of Construction, 3-е изд., 1910.

²⁾ J. Bauschinger, Mitt. Mech.-tech. Lab. München, № 13 и 25.

³⁾ W. Gerber, Z. bay. Architekt. Ind.—Ver., 1874; см. также Uplwin, Elements of Machine Design, т. 1, гл. 2.

⁴⁾ Широкое обсуждение этого вопроса можно найти в книге H. J. Gough'a, цит. на стр. 391. См. также его лекции, там же.

⁵⁾ См. статью В. Р. Haigh, J. Inst. Metals, т. 18, 1927.

три области AOB обычно лежат между параболой и соответствующими прямыми¹⁾. Если напряжение всегда растягивающее или всегда сжимающее, значения диапазона напряжений R , как найдено опытом, лежат иногда не только ниже параболы Гербера, но даже ниже и соответствующих прямых.

Вместо того чтобы представлять диапазон напряжений R как функцию σ_m (рис. 314), иногда вычерчивают σ_{max} и σ_{min} в функции σ_m (рис. 315). Напряжения σ_{max} и σ_{min} получаются из уравнений (с)

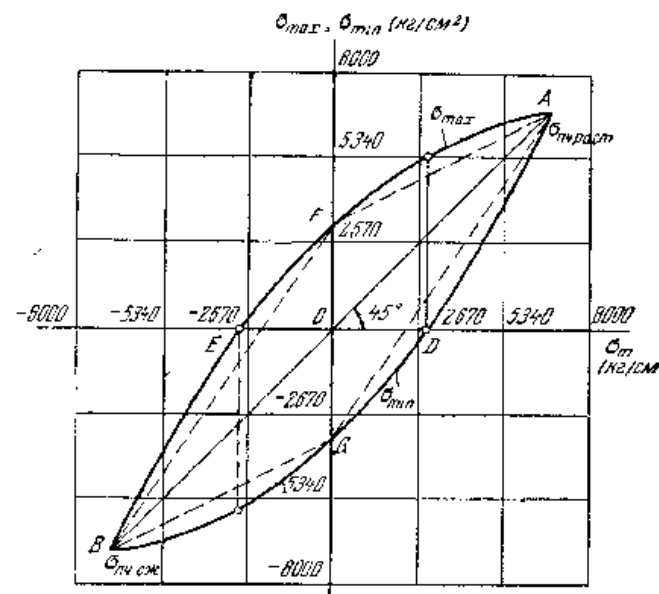


Рис. 315.

и изображаются графическим путем добавлением $\pm R/2$ к ординатам прямой линии AOB , наклоненной под углом 45° . Вертикальная линия, проходящая через точку O (рис. 315), соответствует симметричному циклу напряжений. Вертикаль, проходящая через точку D , соответствует пульсирующему растягивающему напряжению, при котором нагрузка изменяется от нуля до максимума и затем возвращается к нулю.

Подобно этому, вертикальная линия, проходящая через E , соответствует пульсирующему сжимающему напряжению. Точка A представляет предел прочности материала при растяжении, а точка

¹⁾ Некоторые опыты с мягкой сталью указывают на то, что среднее напряжение σ_m имеет малое влияние на величину диапазона напряжений R . См. лекции H. J. Gough'a, цит. на стр. 391, и его статью в J. Appl. Mech., т. 17, стр. 113, 1950.

B — предел прочности при сжатии. Кривые для σ_{\max} и σ_{\min} представляют предельные состояния для переменных напряжений. Если точки, соответствующие некоторому действительному переменному напряжению, лежат внутри площади $AEBDA$, то материал может противостоять этому напряжению бесконечное число циклов без разрушения. Кривые для σ_{\max} и σ_{\min} (рис. 315) получены из параболической кривой, представленной на рис. 314. Но, как упомянуто ранее, парабола замещается во многих случаях двумя наклонными линиями, и область безопасности на рис. 315 тогда получается в виде параллелограмма $AFBGA$.

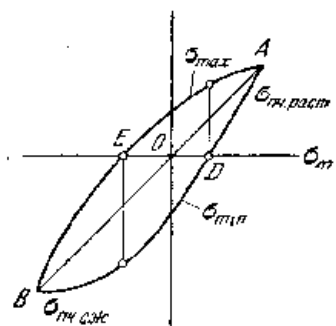


Рис. 316.

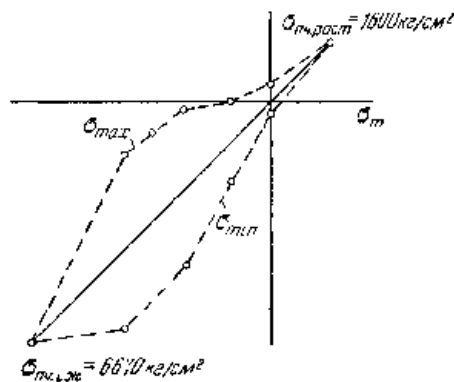


Рис. 317.

В предыдущем изложении предполагалось, что график диапазона напряжений является симметричной кривой, например в виде парабол рис. 314; однако многие опыты показывают, что диапазон напряжений зависит не только от величины, но также и от знака среднего напряжения σ_m . Когда это напряжение является сжимающим, то материал может противостоять большим значениям диапазона напряжений, чем в том случае, когда оно является растягивающим. Кроме того, часто предел прочности при сжатии $\sigma_{\text{пр.сж}}$ выше предела прочности при растяжении $\sigma_{\text{пр.рст}}$. Тогда вместо симметричных парабол (рис. 314) мы получаем несимметричные кривые¹⁾, и область безопасности для пластического материала имеет форму, показанную на рис. 316. Разность между $\sigma_{\text{пр.рст}}$ и $\sigma_{\text{пр.сж}}$ особенно велика для хрупких материалов, и график области безопасности имеет большую выпуклость на стороне сжатия, как показано на рис. 317 для чугуна²⁾.

¹⁾ См. статью R. E. Peterson'a в Fatigue and Fracture of Metals, 1952.

²⁾ A. Pommer und M. Hempel, Mitt. Kaiser-Wilhelm Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 22, стр. 169, 1940.

85. Усталость металлов при сложном напряженном состоянии

Большинство наших опытных сведений по усталостной прочности материалов получено для случая одноосного напряженного состояния, как, например, в испытаниях на изгиб вращающихся образцов. Но в практических задачах мы часто встречаем случаи действия сложных напряжений, и весьма важно для этих условий также знать предел выносливости. Чтобы получить данные об усталостной прочности

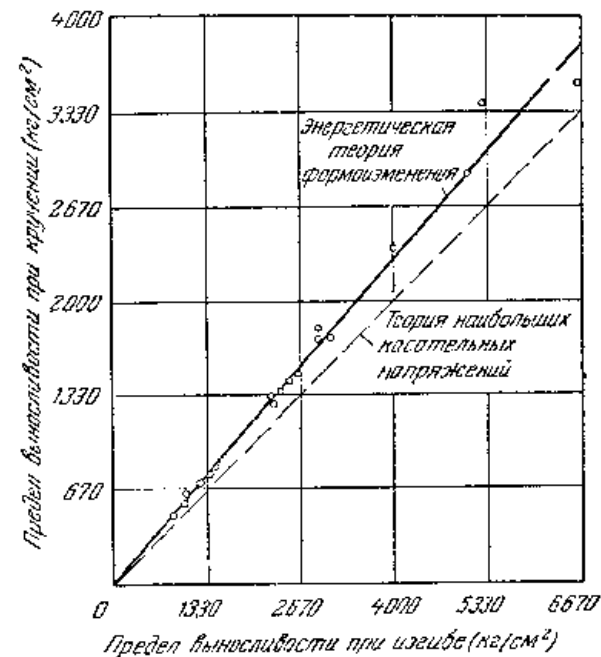


Рис. 318.

различных пластических материалов при чистом сдвиге, были проделаны испытания на кручение, в которых угол закручивания был знакопеременным. Результаты некоторых из этих испытаний показаны¹⁾ на рис. 318. С целью сравнения предел выносливости при изгибе здесь принят за абсциссу, а предел выносливости при сдвиге — за ординату. Видно, что отношение этих пределов для всех испытанных материалов весьма близко к $\sqrt{3}$. Это значение для отношения пределов текучести при изгибе и сдвиге (см. выражение (299)) даст теория наибольшей энергии изменения формы.

¹⁾ Этот рисунок взят из книги: R. E. Peterson, Stress Concentration Design Factors, New York, 1953.

Испытания на усталость под действием сложных напряжений, вызываемых одновременным действием переменных изгиба и кручения¹⁾, были также проведены, и результаты показаны²⁾ на рис. 319. Здесь снова результаты испытаний хорошо согласуются с теорией наибольшей энергии формоизменения, что и можно было ожидать, поскольку сдвиг обычно предшествует развитию трещины усталости³⁾.

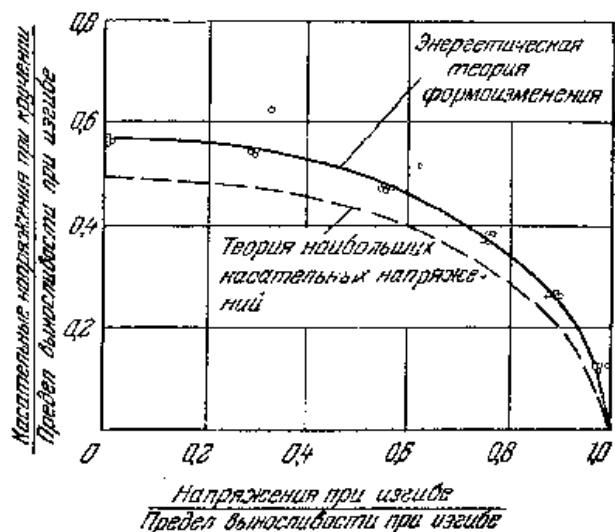


Рис. 319.

Для того чтобы получить уравнение для вычисления предела выносливости при одновременном действии изгиба и кручения следует лишь подставить в соответствующее условие текучести (см. уравнение (298)) значение предела выносливости σ_r для знакопеременного изгиба вместо σ_r , что дает

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_r^2. \quad (a)$$

Соответствующий эллипс показан на рис. 319, из которого видно, что результаты испытаний хорошо согласуются с уравнением.

Другие испытания⁴⁾ на усталость при двухосном растяжении или растяжении со сжатием для отношения σ_1/σ_2 , остающегося постоянным в течение цикла, также удовлетворительно согласуются с тео-

рией наибольшей энергии формоизменения. Таким образом, мы можем воспользоваться для определения предела выносливости в случае симметричного цикла напряжений следующим уравнением (см. стр. 378):

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_r^2, \quad (b)$$

в котором σ_r — предел выносливости для одноосных напряженных состояний. Предполагая, что $\sigma_1 > \sigma_2$ и пользуясь обозначением $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$, из уравнения (b) получаем

$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} = \sigma_r, \quad (c)$$

В случае пульсирующих напряжений, в которых напряжение изменяется от нуля до некоторого наибольшего значения, соответствующее одноосное пульсирующее напряжение σ_{\max} должно быть подставлено¹⁾ в уравнение (c) вместо σ_r .

Чтобы установить предельные условия в случаях трехосного напряженного состояния, воспользуемся уравнением (296). Подставляя $\sigma_2 = \alpha\sigma_1$ и $\sigma_3 = \alpha_1\sigma_1$, получаем следующее уравнение для симметричного цикла напряжений:

$$\sigma_1 \sqrt{1 - \alpha - \alpha_1 + \alpha^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha\alpha_1} = \sigma_r, \quad (d)$$

Из этого уравнения можно вычислить предельное значение σ_1 для любых данных значений α и α_1 .

Имеется лишь небольшое количество достоверных сведений, которые можно приложить к примерам, в которых отношения σ_1/σ_2 и σ_1/σ_3 не остаются постоянными во время цикла нагружения. Гаф исследовал²⁾ случай, в котором статический изгиб и кручение были наложены на симметричный цикл напряжений. Было найдено, что влияние моментов статического нагружения на предельные значения переменных моментов было весьма мало³⁾ и что для вычисления предельных значений переменных напряжений можно воспользоваться эллипсом того же типа, что и на рис. 319. Оси эллипса равны диапазонам переменных напряжений⁴⁾ при изгибе и кручении. Диапазоны находятся в соответствии с приложенными статическими напряжениями, так как последние являются в этом случае средними напряжениями.

¹⁾ См. H. J. Gough and H. V. Pollard, Engineering, т. 140, стр. 566, 1935. См. также Nishihara and Kawamoto, Trans. Soc. Mech. Engr. (Japan), т. 6, стр. 2, 1940.

²⁾ См. R. E. Peterson, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 118, 1943.

³⁾ H. J. Gough, Proc. Am. Soc. Test. Mat. т. 32, стр. 3, 1933.

⁴⁾ A. F. Maier, Stahl u. Eisen, т. 54, стр. 289, 1934; C. W. MacGregor, J. Appl. Mech., т. 16, стр. 269, 1949.

¹⁾ Если не имеется опытных данных, то для определения σ_{\max} можно воспользоваться параболой Гербера или законом Гудмана.

²⁾ H. J. Gough, J. Appl. Mech., т. 17, стр. 113, 1950.

³⁾ Использованным материалом был сплав стали при высоком значении отношения $\sigma_1/\sigma_{\text{нч}}$.

⁴⁾ Эти диапазоны можно взять из рис. 318, если пределы выносливости для изгиба и кручения определяются порознь опытным путем.

Для хрупких материалов при вычислении предельных сложных напряжений от усталости применяется теория Мора. Если эти напряжения имеют один и тот же знак, нужно рассматривать только численно большее напряжение. Его предельное значение можно получить из диаграммы одноосных напряжений, показанной на рис. 317 для чугуна. Если напряжения имеют противоположный знак, то мы можем воспользоваться уравнением (1) стр. 382, выведенным для статических нагрузок. Обозначая численно большее главное напряжение через σ_1 , а меньшее через $\sigma_2 = -\alpha\sigma_1$, получаем

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{пч. раст}} \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \alpha\sigma_{\text{пч. раст}}}$$

Теперь можно допустить¹⁾, что для предельного значения σ_1 при переменных напряжениях будет пригоден

$$\sigma_1 = \sigma_r \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \alpha\sigma_{\text{пч. раст}}}, \quad (e)$$

где σ_r - предел выносливости для одноосного напряженного состояния. Применяя это уравнение к случаю чистого сдвига ($\alpha = 1$), получаем

$$\tau_r = \sigma_r \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}},$$

которое удовлетворительно согласуется с результатами испытаний²⁾.

Имеются лишь скудные сведения относительно усталостной прочности хрупких материалов для случаев, в которых статические напряжения накладываются на переменные напряжения. Одноосные испытания по пульсирующему циклу, в которых напряжение меняется от нуля до максимума, были проделаны с чугуном³⁾. Испытания были произведены как при растяжении, так и при сжатии и показали, что предельные значения напряжений для этих двух случаев (обозначим их через $\sigma_{\text{пч. раст}}$ и $\sigma_{\text{пч. сж}}$) находятся в том же отношении, что и $\sigma_{\text{пч. раст}}/\sigma_{\text{пч. сж}}$ при статических испытаниях. Таким образом, для пульсирующего крутящего момента, применяя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, мы можем написать

$$\tau_{\text{пч}} = \sigma_{\text{пч. раст}} \frac{\sigma_{\text{пч. сж}}}{\sigma_{\text{пч. сж}} + \sigma_{\text{пч. раст}}}$$

Для чугуна $\sigma_{\text{пч. сж}}/\sigma_{\text{пч. раст}}$ находится обычно в пределах между 3 и 4.

¹⁾ Это равносильно предположению, что влияние σ_2 на значение σ_1 одинаково как при усталостном, так и статическом испытаниях.

²⁾ H. J. Gough and H. V. Pollard, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 131, стр. I и т. 132, стр. 549, 1935.

³⁾ H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 164, 1927. См. также статью A. Rompa and M. Hempel'a, цит. на стр. 398.

86. Факторы, влияющие на предел выносливости

После общего обсуждения вопроса в предыдущих параграфах рассмотрим теперь различные факторы, которые влияют на результаты, получаемые при испытаниях на выносливость.

Влияние холодной обработки. При анализе поведения пластичных металлов в процессе вытяжки, волочения и прокатки при комнатной температуре было отмечено (см. п. 78), что благодаря холодной обработке материал становится более жестким, предел текучести повышается, несколько увеличивается и предел прочности. Следовательно, мы можем ожидать, что холодная обработка будет также влиять и на предел выносливости материала. Опыты, проделанные со стальными образцами, подвергнутыми холодной вытяжке¹⁾, показали, что умеренная степень вытяжки вызывает некоторое увеличение предела выносливости. При дальнейшем увеличении холодной обработки можно достичь положения, при котором имеет место падение предела выносливости вследствие перегрузки²⁾. Улучшение состояния холодно обработанного материала можно получить, подвергнув материал после холодной обработки слабой термической обработке, например, оставив материал в кипящей воде на некоторое время.

Влияние перенапряжения и недонапряжения. Были проделаны опыты, в которых циклы напряжений выше предела выносливости были приложены неоднократно, до начала обычного испытания на выносливость. Это *перенапряжение* образцов показало, что имеется *предельное число* циклов перенапряжения, зависящее от величины перенапряжения. Перенапряжение с числом циклов ниже предельного не оказывает влияния на предел выносливости, в то время как превышение этого числа влечет уменьшение предела выносливости. Построив график зависимости перенапряжения от предельного числа циклов, получим *кривую ущерба*³⁾ для испытываемого материала. В качестве примера на рис. 320 показана кривая⁴⁾ для материала, имеющего предел выносливости, равный 2340 кг/см². Площадь ниже этой кривой определяет все те степени перенапряжения, которые не причиняют ущерба (повреждения).

¹⁾ H. F. Moore and J. B. Comments, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 124, 1921; O. J. Horger, Trans. A. S. M. E., т. 57, стр. A-128, 1935. В опытах Мура углеродисто-стальные образцы (0,18% углерода) были подвергнуты вытяжке на 80% и 180%. В опытах Хорджера был применен тот же процент вытяжки, но со сталью, содержащей 0,48% углерода.

²⁾ См. H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 136 и R. M. Brown, Trans. Inst. Engrs, Shipbuilders Scot., 1928.

³⁾ H. J. French, Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 21, стр. 399, 1933 и H. W. Russell and W. A. Wejcker, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 36, 1936.

⁴⁾ См. H. F. Moore, Metals and Alloys, т. 7, стр. 297, 1936. О библиографии по этому предмету см. Battelle Memorial Institute, Prevention of the Failure of Metals under Repeated Stress, New York, 1941.

Кривая ущерба имеет практическое значение для частей машин, которые нормально действуют при циклах напряжения ниже предела выносливости, но подвергаются время от времени циклам перенапряжения.

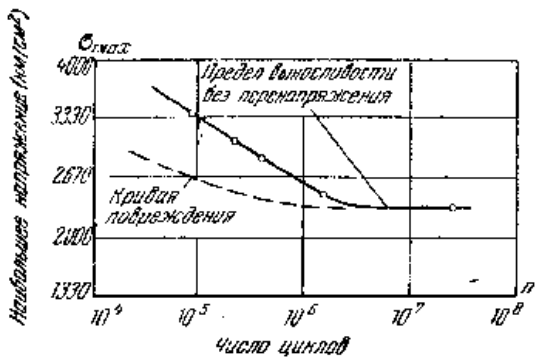


Рис. 320.

Если величина перенапряжения известна, то безопасное число циклов перенапряжения легко получить из кривой ущерба¹⁾. По кривой на рис. 320 можно видеть, например, что циклы перенапряжения $\pm 2700 \text{ кг/см}^2$ не производят повреждения, если число циклов перенапряжения меньше чем 100 000.

В области проектирования самолетов вопрос об

усталостной прочности становится более сложным, так как части в работе подвергаются циклам напряжений различных интенсивностей. При проведении необходимых испытаний на усталость применяются статистические методы. На основании измерений напряжения и ускорения, сделанных в полете, возможно установить вероятное число циклов каждой интенсивности. Затем производятся испытания на усталость, в которых интенсивность напряжения изменяется согласно статистическим данным²⁾.

Производя опыты на выносливость при нагрузке, несколько меньшей предела выносливости, а затем увеличивая ее малыми порциями, можно повысить предел выносливости. Это явление называется влиянием *недонапряжения*. Величина, на которую можно повысить предел выносливости таким путем, зависит от материала³⁾. Для мягкой стали эта величина иногда превышает 30% первоначального предела выносливости, в то время как на железо Армко и медь недонапряжение практически не оказывает влияния.

Влияние частоты. Воздействие частоты циклов было также изучено при испытаниях на выносливость, но заметного влияния не наблюдалось до частоты около 5000 циклов в минуту. Для более

высоких частот было найдено некоторое увеличение наблюдаемого предела выносливости. Очень интересные опыты такого рода были проделаны К. Ф. Дженкином¹⁾. Увеличивая частоту свыше миллиона циклов в минуту, он нашел увеличение предела выносливости более чем на 30% для таких материалов, как железо Армко и алюминий. Чтобы получить эти высокие частоты, Дженкин применил вынужденные колебания малых образцов. Машина, вращающая образец, была использована Г. П. Кроусом²⁾ для высокоскоростных испытаний при 30 000 циклов в минуту. Для алюминия и латуни он нашел при этой скорости увеличение предела выносливости на 8%.

Влияние температуры. Выше мы рассматривали испытания на предел выносливости, сделанные при комнатной температуре. Однако имеются случаи, когда материалы подвергаются действию циклических напряжений при низкой температуре, как, например, некоторые части самолетов. Наоборот, в паровых турбинах и двигателях внутреннего сгорания, материалы подвергаются действию очень высоких температур. Следовательно, испытания на выносливость при низких и высоких температурах имеют практическое значение. Сравнительные испытания на выносливость, проделанные при $+20^\circ \text{C}$ и -40°C ³⁾ с монель-металлом, нержавеющей сталью, никелевой сталью и хромо-молибденовой сталью показали во всех случаях увеличение предела выносливости с уменьшением температуры. Подобные выводы были также получены для других материалов⁴⁾.

Испытания на выносливость при высоких температурах, проделанные с различного рода сталями на машинах, вращающих образец⁵⁾, а также на машинах, производящих знакопеременные осевые напряжения⁶⁾, указывают, что вплоть до $300-400^\circ \text{C}$ температура не оказывает большого влияния на предел выносливости. Наибольший предел выносливости обычно получается в промежутке от 300°C до 400°C , между тем как от 100°C до 200°C предел выносливости обычно несколько меньше, чем при комнатной температуре. Опыты также показывают, что кривые $\sigma-n$ не приближаются к своим асимптотам так быстро, как при комнатной температуре, и что для определения величины предела выносливости требуется более чем 10^7 циклов.

Усталость при коррозии. Явление усталости при коррозии также имеет практическое значение. Этот термин применяется для обозна-

¹⁾ В. P. Langer предложил формулу для вычисления числа циклов перенапряжения, которому часть машины может противостоять до разрушения. См. J. Appl. Mech., т. 4, стр. A-160, 1937. См. также M. A. Miner, там же, т. 12, 1945.

²⁾ О библиографии см. статью: H. L. Dryden, R. V. Rode and P. Kuhnl в изд. W. M. Murray, Fatigue and Fracture of Metals, 1952, см. также A. M. Freudenthal, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 53, стр. 896, 1953.

³⁾ H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 142, 1924; J. B. Kometz, Engng. News Record, 1932.

¹⁾ C. F. Jenkin, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 109, стр. 119, 1925 и C. F. Jenkin and G. D. Lehmann, там же, т. 125, 1929.

²⁾ G. N. Krause, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 34, 1934.

³⁾ H. W. Russell and W. A. Weicker, там же, т. 31, стр. 122, 1931. См. также Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Notes, № 381, 1931.

⁴⁾ W. D. Boone and H. B. Wishart, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 35, 1935.

⁵⁾ H. F. Moore and T. M. Jasper, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 152, 1925 и H. F. Moore, S. W. Lyon and N. P. Inglis, там же, № 164, 1927.

⁶⁾ H. J. Tapscott and J. Bradley, J. Inst. Metals, т. 35, 1926.

чения одновременного действия коррозии и усталости. В 1917 г. Хэг¹⁾ опубликовал результаты некоторых очень интересных испытаний на выносливость латуни, в которых он нашел понижение предела выносливости под действием переменных усилий, когда образец подвергался действию соленой воды, аммиака или соляной кислоты. Он также указал, что вредное действие аммиака на латунь не проявляется, если не было одновременного воздействия разъедающих веществ и переменных усилий.

Дальнейший прогресс в исследовании усталости при коррозии был достигнут Мак-Адамом²⁾, который исследовал одновременное действие коррозии и усталости на различные металлы и сплавы. Эти испытания показали, что в большинстве случаев сильная коррозия, предшествовавшая испытанию на выносливость, гораздо менее вредна, чем слабая коррозия, которая имеет место одновременно с испытанием. Испытания были проведены на сталях с различным содержанием углерода, имеющих пределы выносливости³⁾ в симметричных циклах напряжений от 1400 до 2800 кг/см². Когда образцы при испытаниях были подвергнуты действию пресной воды, пределы выносливости значительно уменьшились, варьируясь от 1120 до 1400 кг/см². Эти пониженные пределы выносливости называются *пределами усталости при коррозии*. Испытания показали, что, в то время как при испытании на воздухе предел выносливости стали растет приблизительно пропорционально росту предела прочности, результаты, полученные при испытании в пресной воде, оказываются иными. Предел выносливости при коррозии стали, имеющей углерода более 0,25%, не растет после горячей обработки⁴⁾, а может даже уменьшиться. Было также показано, что добавление хрома, достаточное для увеличения сопротивления стали обычной коррозии, увеличивает и предел выносливости при коррозии до значения большего предела выносливости углеродистой или никелевой сталей⁵⁾.

Испытания на выносливость в атмосфере сухого пара⁶⁾ показали, что сухой пар не оказывает влияния на предел выносливости, но в случае пара, содержащего воздух или воду, наблюдалось понижение предела выносливости. Опыты в вакууме⁷⁾ показали, что предел выносливости стали приблизительно такой же, как в воздухе, в то

¹⁾ В. P. Haigh, там же, т. 18, 1917.

²⁾ D. J. McAdam, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 26, 1926; т. 27, 1927; Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 2, 1927; Proc. Internat. Congr. Test. Mat., Amsterdam, т. I, стр. 305, 1928. См. также Н. F. Moore в Metals Handbook, Американское общество мет., стр. 147-153, 1939.

³⁾ Определенные при помощи испытаний на воздухе.

⁴⁾ McAdam, Proc. Internat. Congr. Test. Mat., Amsterdam, т. I, стр. 308, 1928.

⁵⁾ См. McAdam, Trans. A. S. M. E., Appl. Mech. Div., 1928.

⁶⁾ См. T. S. Fuller, Trans. Am. Soc. Steel Treat., т. 19, стр. 97, 1931.

⁷⁾ H. J. Gough and D. G. Sopwith, J. Inst. Met., т. 49, стр. 93, 1932.

время как опыты с медью и латунью в вакууме показали увеличение выносливости по меньшей мере на 14 и 16% соответственно.

Известно много случаев разрушений во время работы, которые можно приписать усталости при коррозии. Эти случаи включают поломки таких частей, как валы судовых двигателей, охлаждаемые водой поршневые штоки судовых нефтяных двигателей внутреннего сгорания, лопатки турбин, рессоры локомотивов, штанги насосов нефтяных скважин, паровые котлы, трубы пароперегревателей и т. д. Во многих случаях разрушения от усталости при коррозии были устранены введением материалов, сопротивляющихся коррозии. Опыты Мак-Адама со сталями, сопротивляющимися коррозии, показали, что такие стали дают весьма удовлетворительные результаты при испытаниях на усталость при коррозии. Более поздние опыты со специальными бронзами¹⁾ показали, что фосфористая бронза и алюминиевая бронза, испытанные при крайне тяжелых коррозионных условиях, обладают значительным сопротивлением усталости при коррозии и выдерживают сравнение с лучшими нержавеющей сталями.

Защитные покрытия²⁾ и холодная обработка³⁾ поверхности элементов, подверженных усталости при коррозии, также были успешно применены для предупреждения разрушений.

Влияние остаточных напряжений. Остаточные напряжения обычно вызываются горячей обработкой частей машин и наблюдаются при сварке конструкций, причем возникает вопрос о влиянии этих напряжений на предел выносливости. Опыты с закаленными стальными образцами, испытанными на машине для испытания на усталость вращающихся образцов, показали⁴⁾, что остаточные напряжения падают до значения, меньшего 1/4 их первоначальной величины в результате приложения симметричного цикла напряжений; влиянием остаточных напряжений на предел выносливости можно было пренебречь. Подобные же заключения были получены из испытаний на усталость сварных двутавровых балок⁵⁾. Е. Е. Вейбель отметил неблагоприятное влияние остаточных напряжений, возникающих в витках пружин⁶⁾.

Влияние обработки поверхности. Влияние обработки поверхности на предел выносливости также было изучено. Были проведены испытания из стали, содержащей 0,49% углерода, имеющей

¹⁾ H. J. Gough and D. G. Sopwith, J. Inst. Metals, т. 60, стр. 143, 1937.

²⁾ D. G. Sopwith and H. J. Gough, J. Iron and Steel Inst., 1937.

³⁾ O. Föppel, O. Behrens und T. Dusold, Z. Metallkunde, т. 25, 1933.

⁴⁾ См. H. Bühler und H. Buchholtz, Stahl u. Eisen, т. 53, стр. 1330, 1933 и Mitt. Forsch.-Inst. Verein. Stahlwerke (Dortmund), т. 3, стр. 235, 1933.

⁵⁾ E. H. Schulz und H. Buchholtz, Stahl u. Eisen, т. 53, стр. 545, 1933.

⁶⁾ Trans. A. S. M. E., т. 57, стр. 501, 1935. См. также E. Wever und G. Martin, Mitt. Kaiser-Wilh. Inst. Eisenforsch. (Düsseldorf), т. 21, стр. 218, 1939 и C. W. MacGregor в изд. W. R. Osgood, Residual Stresses in Metals and Metal Construction, New York, 1954.

предел прочности, равный 6700 кг/см^2 , и обычный предел выносливости 3400 кг/см^2 . Если принять за 100 предел выносливости для тщательно полированных образцов, то были получены следующие результаты для образцов с различным качеством обработки¹⁾: с обработкой шлифовкой — 89; с обработкой гладкой обточкой — 84, с обработкой грубой обточкой — 81. Испытания стали, содержащей 0,02% углерода (железо Армко), дали для последних двух типов обработки соответственно 92 и 88. Подобные опыты были проделаны В. Н. Томасом²⁾ со сталью, содержащей 0,33% углерода; он измерял величину царапин при различных обработках с помощью микроскопа. Другие опыты были проведены В. Цандером³⁾.

Табл. 26, помещенная в конце этой главы, дает результаты, полученные при статических испытаниях и испытаниях на выносливость некоторых сталей, применяемых в технике.

87. Усталость и концентрация напряжений

При обсуждении вопросов концентрации напряжений, вызываемой резкими изменениями поперечных сечений стержней и валов (см. гл. VIII),

было указано, что такая концентрация напряжений особенно вредна в случае переменных напряжений. В машинах концентрация напряжений всегда имеет место из-за выточек, выкружек, отверстий, шпоночных канавок и т. д., и опыты показывают, что большинство трещин усталости начинается в местах концентрации напряжений. Несколько примеров таких разрушений будет теперь кратко разобрано.

Фото на рис. 321 дает⁴⁾ картину разрушений от усталости круглых валов с поперечными отверстиями, подверженных дей-

ствию знакопеременного кручения. Наибольшее напряжение в этом случае имеет место по краю отверстия на площадке, наклоненной на 45°

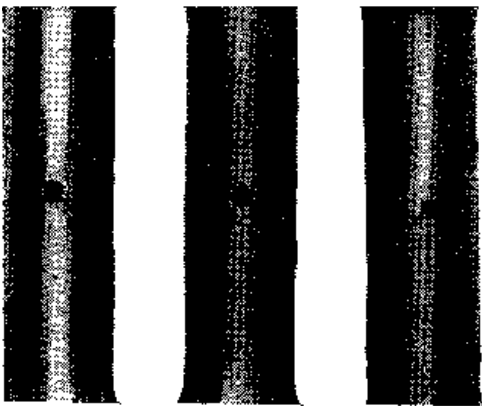


Рис. 321.

¹⁾ См. H. F. Moore and J. V. Kommers, Univ. of Illinois Eng. Exp. Sta. Bull., № 124, стр. 683, 1921.

²⁾ Engineering, т. 116, стр. 483, 1923. Более поздние исследования шероховатости поверхности рассмотрены в статье S. Wau, цит. на стр. 423.

³⁾ Диссертация, Техническая высшая школа, Брауншвейг, 1928.

⁴⁾ См. статью A. Глиш'a, Forschung, т. 9, стр. 57, 1938.

к оси вала (см. стр. 252). В этих точках трещины начинаются и постепенно развиваются по винтовой линии, следуя направлению одного из главных напряжений.

Фото на рис. 322 показывает разрушение от усталости при кручении вала большого мотора-генератора, который плохо работал вблизи резонанса¹⁾. Трещина началась у шпоночной канавки, где имела место высокая концентрация напряжений, и постепенно развивалась по винтовой линии. Винтовую трещину, соответствующую направлению главного напряжения, можно видеть на фото. Фото на рис. 323 дает картину разрушения от кручения вала генератора дизельмашины. Высокая



Рис. 322.

Рис. 323.

концентрация напряжений у малой выкружки вызвала появление нескольких винтовых трещин, которые в целом придают трещине пилообразную форму. На фото рис. 324 показаны трещины усталости, которые развивались постепенно у корней зубьев зубчатой передачи. Места пунктов высокой концентрации напряжений отвечают характеру изгиба зубьев как консолей.

Наконец, фото на рис. 325 дает представление о характерном разрушении от усталости мощной винтовой пружины. Трещина началась изнутри, как предписывает теория (см. т. 1, стр. 247), и опять-таки следует направлению одного из главных напряжений. Все эти фотоснимки ясно показывают вредное действие, вызываемое

¹⁾ Фотоснимки 322—325 взяты из статьи R. E. Peterson'a, представленной на конференцию Массачусетского технологического института по проблемам сопротивления материалов—в промышленности, июль 1937. Механизм роста трещины также рассмотрен Петерсоном, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 157, 1933. Многие примеры разрушений от усталости двигателей описаны в статье L. W. Schuster'a, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), апрель 1933.

концентрацией напряжений, и понятно, что этот фактор должен быть серьезно принят во внимание при проектировании частей машин¹⁾.

Более ранние испытания на усталость, сделанные с образцами, имеющими резкие изменения поперечного сечения, показали, что имело место уменьшение прочности вследствие концентрации напряжений, но это уменьшение было обычно меньше, чем следовало ожидать, исходя от величины вычисленного коэффициента концентрации напряжений. Например, в случае плоских стальных образцов с малыми

круговыми отверстиями, подверженных действию осевого напряжения, теоретический коэффициент концентрации напряжений равен 3 (см. стр. 249). Если величина наибольшего напряжения является определяющим фактором при испытаниях на выносливость, то следовало бы ожидать, что нагрузка рас-



Рис. 324.

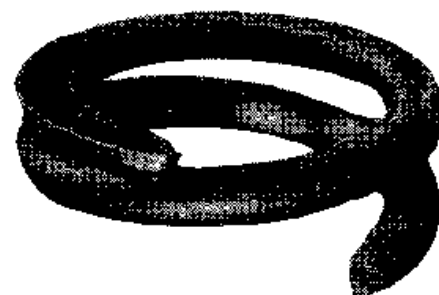


Рис. 325.

тяжение — сжатие, необходимая для разрушения от усталости образца с отверстием, должна составлять около одной трети нагрузки для образца без отверстия. Однако опыты показали, что в этом случае уменьшение прочности от концентрации напряжений менее значительно сравнительно с вычисленным²⁾.

Чтобы объяснить это расхождение и дать необходимые указания для проектировщиков, Р. Е. Петерсоном была проделана весьма большая серия испытаний в исследовательской лаборатории фирмы

¹⁾ Очень важно для практики иметь некоторые средства для обнаружения трещин, как только они появляются. Различные методы обнаружения трещин описаны Charles Lippson'ом в его статье в изд. M. Hetényi, Handbook of Experimental Stress Analysis, 1951.
²⁾ В. P. Haigh and J. S. Wilson, Engineering, т. 115, стр. 446, 1923.

«Вестингауз»¹⁾. Геометрически подобные консольные опытные образцы, изменявшиеся в диаметре от 2,54 мм до 76,2 мм с выкружкой или с поперечным круглым отверстием, из разных материалов (см. табл. 23), были испытаны на усталость²⁾ в специальных испытательных машинах. Результаты этих испытаний для образцов с выкружками даны на рис. 326. Наименьшие диаметры образцов приняты за абсциссы, между тем как ординаты представляют отношения $\alpha_{кт}$ нагрузок при испытании на выносливость гладких образцов к нагрузкам при испытаниях на выносливость для соответствующих образцов с концентрацией напряжений. Подобные же результаты были получены для образцов с поперечными отверстиями.

Таблица 23

Материал, использованный Петерсоном при испытаниях на усталость

Сталь	Химический состав, %								Предел текучести кг/см ²	Предел прочности кг/см ²	Удлинение %
	C	Mn	Si	S	P	Ni	Cr	Mo			
Среднеуглеродистая ¹⁾	0,45	0,79	0,18	0,03	0,013	—	—	—	2300	5340	32
Молибдено-никелевая ²⁾	0,52	0,68	0,19	—	0,014	2,96	—	0,38	3200	6800	26
Хромо-никелевая ³⁾	0,45	0,65	—	—	—	1,38	0,64	—	6390	8400	24

¹⁾ Нормализованная: 849° С, охлажденная на воздухе.
²⁾ Нормализованная и подвергнутая вытяжке: 954° С, охлажденная на воздухе; 793° С, охлажденная на воздухе; 627° С, охлажденная в печи.
³⁾ Закаленная и подвергнутая вытяжке: 802° С, закаленная в масле; 649° С, охлажденная в печи.

Горизонтальные линии на рис. 326 дают значения коэффициентов концентрации напряжений, полученные для каждого параметра выкружки при непосредственном измерении деформации в точках наибольшей концентрации напряжений (см. стр. 254). Эти значения обозначаются через $\alpha_{кт}$ и называются в последующем изложении *теоретическими значениями* коэффициентов концентрации напряжений. Если бы усталостная прочность образца зависела только от наибольшего напряжения, то $\alpha_{кт}$ очевидно, было бы равно $\alpha_{кд}$.

¹⁾ R. E. Peterson, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 79 и 157, 1933 и R. E. Peterson and A. M. Wahl, там же, т. 3, стр. 15, 1936. См. также Отчеты Комитета по исследованию усталости металлов, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 42, стр. 145, 1942 и т. 43, 1943.
²⁾ Описание этих машин дано в статье Р. Е. Петерсона, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 29, стр. 371, 1929.

На основании своих испытаний Петерсон пришел к следующим выводам:

1) В некоторых случаях результаты испытаний на усталость очень близко согласуются с теоретическими значениями коэффициентов концентрации напряжений. Этот вывод имеет огромное практическое значение, так как существует общее представление, основанное на некоторых ранних опытах, что данные об усталости для случаев концентрации напряжений всегда ниже теоретических значений, и, значит, при проектировании это обеспечивает больший запас прочности.

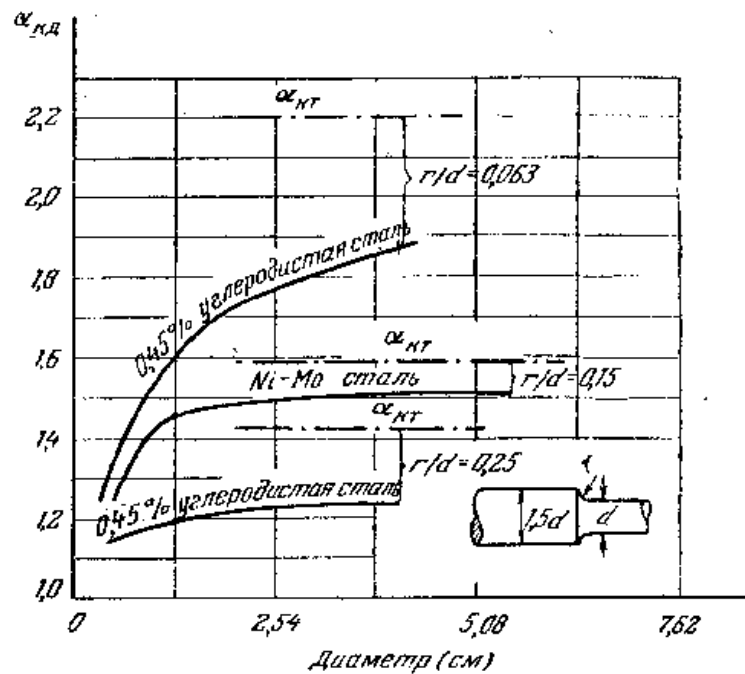


Рис. 326.

2) Результаты испытаний на усталость для стальных сплавов и закаленных углеродистых сталей обычно ближе к теоретическим значениям, чем соответствующие результаты на усталость для углеродистых не закаленных сталей. В этих испытаниях ожидалось, что теоретические значения должны быть достигнуты для всех сталей при том условии, что образцы сделаны достаточно большими, но рис. 326 показывает, что ординаты кривой для нормализованной стали, содержащей 0,45% углерода, очевидно, приближаются асимптотически к значению, лежащему гораздо ниже теоретического.

3) С уменьшением размера образца понижение усталостной прочности при наличии выкружки или отверстия становится несколько меньшим; для очень малых выкружек или отверстий уменьшение

усталостной прочности относительно мало. Это можно ясно видеть из кривых на рис. 326.

Другой путь представления результатов испытания на усталость, имеющий целью показать степень, с которой достигаются теоретические значения, состоит во введении параметра

$$q = \frac{\alpha_{Kd} - 1}{\alpha_{Kt} - 1}, \quad (a)$$

который называется коэффициентом чувствительности. Когда α_{Kd} приближается к значению α_{Kt} , значение q приближается к единице.

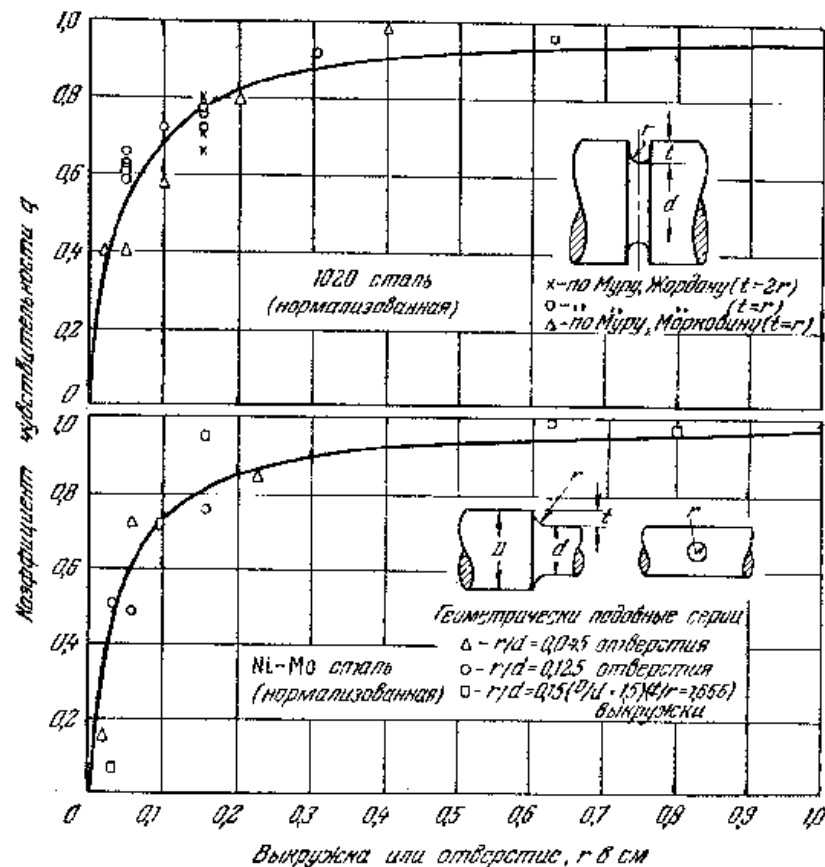


Рис. 327.

когда же концентрация напряжений имеет лишь малое влияние на усталостную прочность, α_{Kd} близко к единице и q приближается к нулю. Значения q для некоторых видов концентрации напряжений и для двух родов стали представлены¹⁾ на рис. 327, где радиус

¹⁾ См. книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 411.

выкружки или отверстия принят за абсциссу. Видно, что коэффициент чувствительности неустойчив. Он зависит не только от рода материала, но также и от размеров образцов. В случае легированных сталей и для больших образцов q приближается к единице; в то же время, для крупнозернистой стали, содержащей 0,45% углерода, q приближается к несколько меньшему значению ¹⁾.

На основании приведенных рассуждений можно рекомендовать при проектировании частей машин больших размеров применять теоретическое значение $\alpha_{кт}$, концентрации напряжений, как и в случае мелкозернистых сталей, легированных сталей, прошедших термообработку углеродистых сталей. Для частей малых размеров и для крупнозернистых материалов можно принять уменьшенное значение коэффициента концентрации напряжений. Это значение, основанное на выражении (а), будет

$$\alpha_{зд} = q(\alpha_{кт} - 1) + 1. \quad (b)$$

Значения q , полученные опытным путем для выкружек, отверстий и

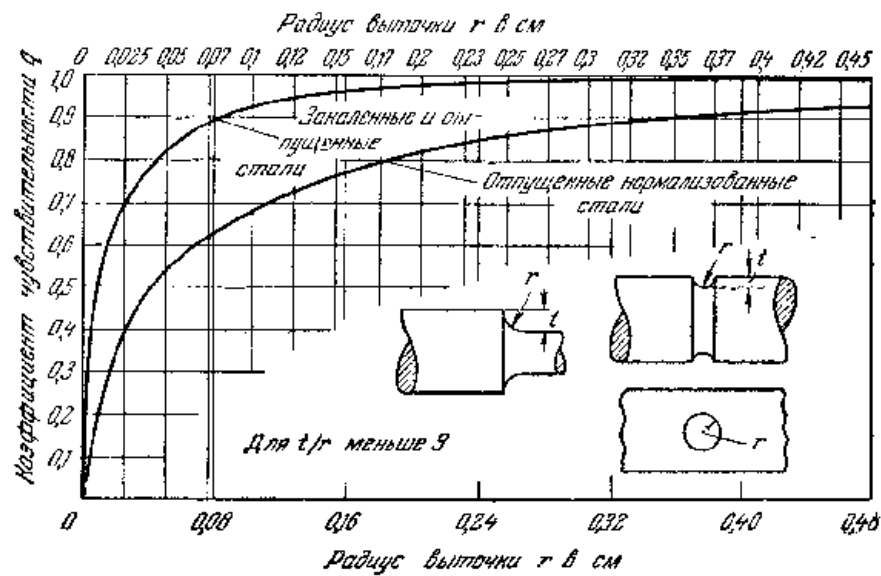


Рис. 328.

выточек, представленные на рис. 328, можно применять как руководящие при выборе надлежащих значений $\alpha_{зд}$ для других случаев концентрации напряжений ²⁾.

¹⁾ Испытания чугуна показывают, что концентрация напряжений имеет мало влияние на результаты испытаний на усталость; см. A. Thim and H. Ude, Z. Ver. deut. Ing., т. 74, стр. 257, 1930.

²⁾ См. книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 411, и С. Е. Phillips'a and R. B. New wood'a, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), Appl. Mech., т. 165, стр. 113.

Изломы усталости имеют сходство со статическими разрушениями хрупких материалов в том отношении, что они происходят практически без пластической деформации. Трещина начинается у некоторого местного несовершенства и прогрессирует в направлении, нормальном к растягивающим напряжениям. Поэтому логично ожидать, что при испытаниях на усталость ¹⁾ можно также применять теорию вероятностей, развитую при изучении разрушения хрупких материалов (см. стр. 331). Согласно этой идее можно ожидать, что предел выносливости материала будет уменьшаться с увеличением размеров испытываемого образца. Работая над испытаниями на усталость при изгибе, некоторые экспериментаторы заметили уменьшение усталостной прочности с увеличением диаметра образцов ²⁾. Гораздо большее влияние размера было найдено при испытании образцов с различного рода концентрацией напряжений, но кажется, что не было еще попытки изучать это явление при помощи теории вероятностей ³⁾. Задача становится весьма сложной, потому что объем высоко напряженного материала в таких случаях обычно очень мал, и становится необходимым рассмотреть размер зерна кристаллического материала. Хотя мы говорим о геометрически подобных образцах из одного и того же материала, но очевидно, что их металлографические структуры не являются геометрически подобными, и это обстоятельство имеет влияние на результаты усталостных испытаний. При рассмотрении области наибольших напряжений можно ожидать различных результатов в зависимости от того, мало ли содержится зерен в этой области или в ней их содержится тысячи. Зависимость между коэффициентом чувствительности q , полученным из испытания на усталость, и размерами зерен материалов рассмотрена в статье Р. Е. Петерсона ⁴⁾.

88. Уменьшение влияния концентрации напряжений на усталость

Можно считать, что вопрос об уменьшении вредного влияния концентрации напряжений является вопросом первостепенного значения для проектировщиков. Некоторое понижение концентрации

1951. Испытания на усталость при кручении валов диаметром 247,7 мм, сделанные T. W. В и J. O'Brien and H. H. Attila, Trans. Engrs. Shipbuilders Scot., 1953, показали для коэффициента чувствительности меньшие значения ($q = 2/3$), чем полученные при испытаниях на изгиб Р. Е. Петерсоном.

¹⁾ См. статью: W. Weibull, Trans. Roy. Inst. Technol. (Stockholm), № 27, 1949.

²⁾ R. E. Peterson, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 29, стр. 371, 1929; R. Faulhaber, Mitt. Forsch.-Inst. Verein. Stahlwerke (Dortmund), т. 3, стр. 153, 1933 и O. J. Hoeger and H. R. Neiferl, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 39, 723, 1939.

³⁾ Это явление было рассмотрено Р. Е. Петерсоном, Proc. Am. Soc. Metals, 1948.

⁴⁾ См. Contributions to the Mechanics of Solids, Dedicated to Stephen Timoshenko by His Friends, New York, стр. 179, 1938.

напряжений можно получить, внося подходящие видоизменения в проект. Например, проект может быть значительно улучшен устранением острых входящих углов и введением выкружек большого радиуса, приданием выкружкам надлежащей формы, введением разгружающих выточек и т. д. На рис. 329 показаны приемы уменьшения концентрации напряжений у уступа вала с сохранением при этом линии

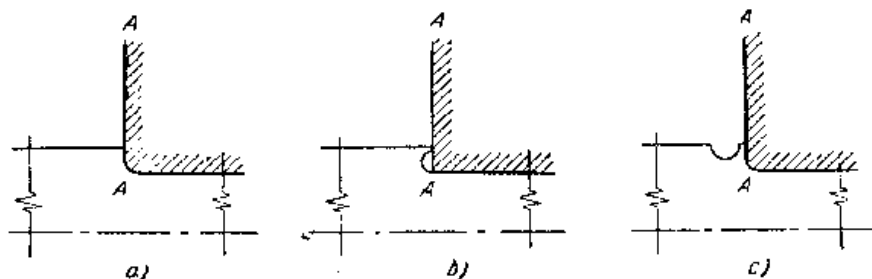


Рис. 329.

контура АА. Напряжение можно уменьшить, вырезая в уступе выкружку возможно большего радиуса и не нарушая целостности насаженного на вал элемента, как показано на рис. 329, *b*. Если же высота уступа слишком мала, то может быть применена, как показано на рис. 329, *c* разгружающая выточка.

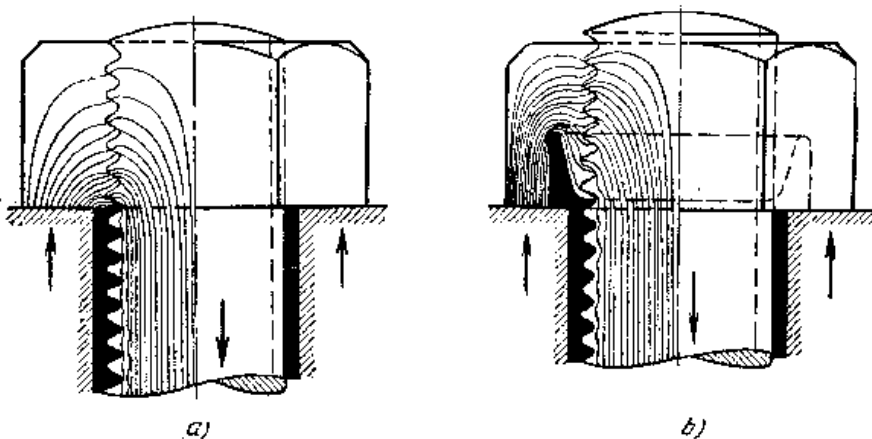


Рис. 330.

На рис. 330 показаны две различные конструкции соединения болта с гайкой. На рис. 330, *a* гайка испытывает сжатие, в то время как болт испытывает растяжение. Высокая концентрация напряжений имеет место в конце нарезки у поверхности гайки, и под действием переменных усилий разрушение от усталости происходит в этой

плоскости¹⁾. При наличии прокладки (рис. 330, *b*) наибольшее напряжение иногда ослабляется потому, что прокладка нагружена в том же направлении, что и болт. Испытания на усталость показывают²⁾, что конструкция с прокладкой прочнее приблизительно на 30%. Иногда эти меры разгрузки недостаточны для того, чтобы исключить разрушения от усталости. В качестве важного примера рассмотрим типичные разрушения, которые имеют место в подступичных частях локомотивных и железнодорожных вагонных осей, на поверхностях опирания колес или подшипников автомобильных осей, в напрессованных или насаженных сверлах длинных буровых штанг, применяемых при разработке нефтяных скважин. Во всех этих случаях насаженных элементов, подверженных действию переменных усилий, имеется

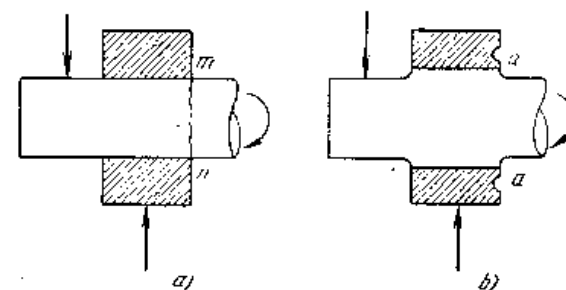


Рис. 331.

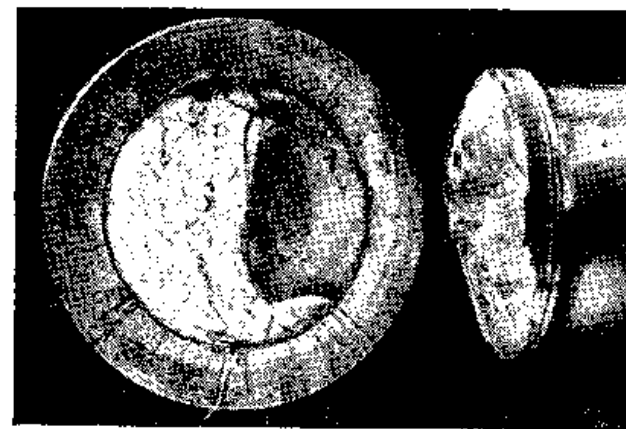


Рис. 332.

постоянный источник разрушения от усталости. Рассматривая, например, случай ступицы колеса, напрессованной на ось (рис. 331, *a*), мы можем видеть, что высокая концентрация напряжений в сочетании

¹⁾ J. H. Goodier, J. Appl. Mech., т. 62, стр. 11, 1940. См. также M. Hetényi, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 11, стр. 147, 1943.

²⁾ H. Wiegand, Диссертация, Technische Hochschule, Darmstadt, 1933. См. также S. M. Arnold, Mech. Engrg., т. 65, стр. 497, 1943.

с трением¹⁾ возникает во входящих углах m и n . При вращении оси имеют место знакопеременные напряжения в точках m и n , и в конце концов разрушение от усталости по поперечному сечению может произойти, как намечено на рис. 332. Концентрацию напряжений можно несколько уменьшить утолщением места опирания

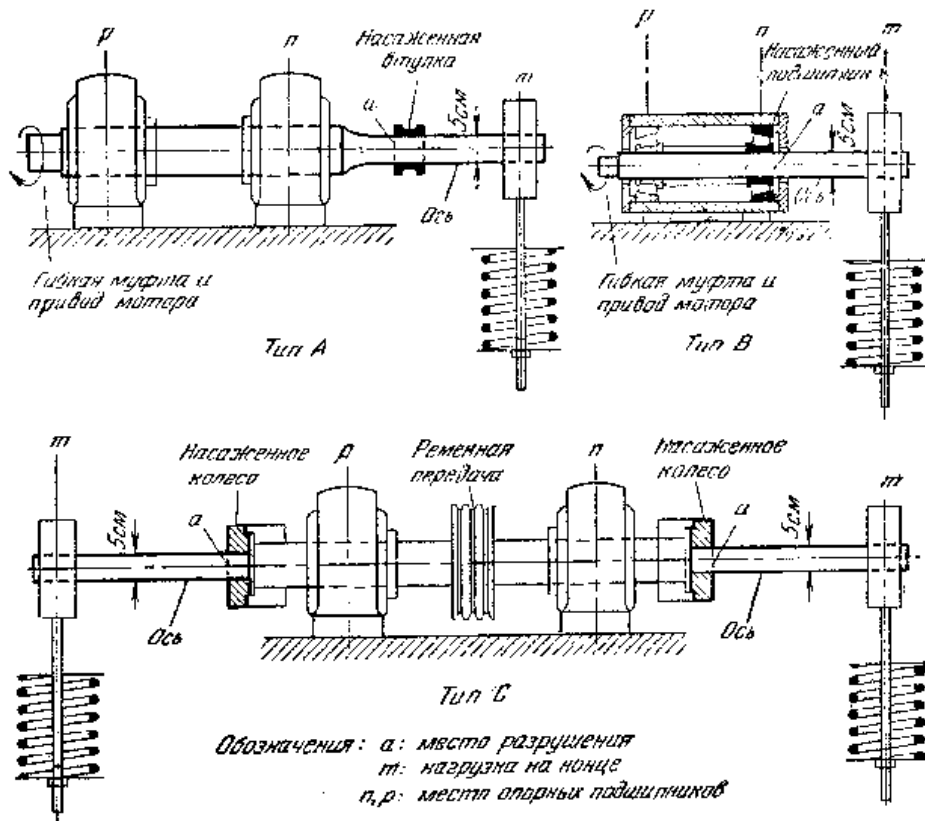


Рис. 333.

с устройством выкружек, как показано на рис. 331, *b*. Дальнейшее улучшение получается введением вспомогательной выточки (рис. 331, *b*). Хотя такие изменения и улучшают положение, в этом случае они недостаточны. Опыт показывает, что при просто напрессованной на ось ступице (рис. 331, *a*) усталостная прочность оси уменьшается до значения, меньшего половины ее первоначальной прочности, в то время как изменения, показанные на рис. 331, *b*, повышают усталостную прочность оси, может быть, не более чем на 20%.

¹⁾ Относительно изнашивания от коррозии и усталости см. G. A. Tomlinson, P. L. Thorne and H. J. Gough, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 111, стр. 233, 1939; см. также O. J. Horgert, Symposium of Fretting Corrosion, Американское общество по испытанию материалов, 1953.

²⁾ Чтобы улучшить это положение и исключить разрушения от усталости, была успешно применена холодная обкатка поверхности оси в области концентрации напряжений. Первые опыты¹⁾ при условии холодной обработки поверхностей были проведены на малых образцах, поэтому для получения достаточных данных для практических приложений, была выполнена обширная серия лабораторных испытаний с большими образцами. Три типа испытаний на усталость, сделанных O. D. Хорджером в лаборатории Мичиганского университета²⁾, представлены на рис. 333. Свойства материалов, примененных в этих испытаниях, приведены в табл. 24. Пределы выносливости, полученные для стали S.A.E и для никелевой стали из обычных испытаний на усталость консольных стержней, соответственно были равны 2400 и 3400 кг/см². После прессовой посадки муфты в испытаниях по типу А (рис. 333) предел выносливости для стали S.A.E уменьшился до 1050 кг/см². В испытаниях по типам В и С пределы

Таблица 24

Материалы, примененные в испытаниях по рис. 333

Сталь	Химический состав, %							Предел текучести, кг/см ²	Предел прочности, кг/см ²	Удлинение, %
	C	Mn	P	S	Si	Cr	Ni			
S. A. E. ¹⁾ 1045	0,47	0,72	0,015	0,034	0,23	0,03	0,05	3350	6250	32
2,75% никеля ²⁾	0,24	0,86	0,034	0,021	0,24	—	2,79	6050	7800	23

¹⁾ Нормализованная при 882° С и протянутая при 601° С.

²⁾ Закаленная при 802° С и отпущенная при 621° С.

выносливости были найдены соответственно равными 850 и 990 кг/см². Это указывает на то, что благодаря прессовой посадке усталостная прочность образцов уменьшилась до значения, меньшего половины ее первоначального значения. Подобные результаты были получены также и для образцов из никелевой стали. Для повышения

¹⁾ Улучшение усталостной прочности холодной обработкой поверхности было предложено O. Förppl'ем, Stahl u. Eisen, т. 49, стр. 575, 1929. Оно было применено в различных испытаниях на усталость в Институте Вёлера. См. Mit. Wöhler-Inst., т. 1—37, 1929—1940. См. также A. Thum und F. Wunderlich, Mit. Materialprüfungsanstalt, Tech. Hochschule, Darmstadt, т. 5, 1934 и R. Kühnel, Stahl u. Eisen, т. 110, стр. 39, 1932.

²⁾ Описание этих опытов дано в статьях O. J. Horgert'a, J. Appl. Mech., т. 2, стр. A-128, 1935 и O. J. Horgert'a and J. L. Manibetsch'a, там же, т. 3, стр. A-91, 1936. Работа, проделанная в исследовательской лаборатории Вестингауза, описана в статье Р. Е. Петерсона и А. М. Вали, там же, т. 2, стр. A-1, 1935.

усталостной прочности поверхность образцов была подвергнута перед посадкой муфт или ступиц колес холодной обработке при помощи приспособления, показанного на рис. 334.

Для операции обкатки был применен токарный станок, поддерживавший образец в своих центрах, поддерживавший и приспособление для обкатки в поперечных салазках, прикрепленных к суппорту токарного станка. Чтобы обеспечить в результате обкатки достаточно гладкую поверхность, были применены подачи, дающие более 40 ходов винта на 1 дюйм.

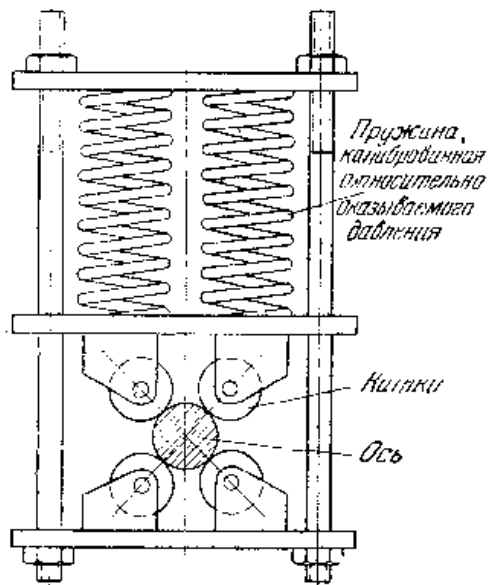


Рис. 334.

Дальнейший шаг в исследовании влияния холодной обкатки на усталостную прочность связан с появлением больших испытательных машин на усталость, в которых могли испытываться локомотивные оси в натуральном виде. Фото на рис. 336 представляет одну из этих машин ¹⁾. Устройство — подобно использованному в испытаниях типа С по рис. 333, причем такое же, какое было применено Вэллером в его знаменитых испытаниях на усталость осей. Результаты лабораторных испытаний с образцами больших размеров были настолько многообещающими, что некоторые железные дороги ввели требование обкатки поверхностей осей и других локомотивных частей, как, например, поршневых штоков, нагунов, кривошипов и баблажей ²⁾.

Чтобы получить слой наклепанного (нагартованного) материала достаточной толщины, требовалось значительное давление катка при поверхностной обкатке осей большого диаметра. В случае валов малого

¹⁾ Три машины этого типа использовались в исследовательской лаборатории Timken Roller Bearing Company, Canton, Ohio. Рис. 332 взят из одного из этих испытаний.

²⁾ См. статью О. J. Ноггера, представленную в годовом собрании Американского общества по испытанию металлов, февраль 1946.

диаметра и легких частей машин даже тонкий слой наклепанного металла будет показывать значительное улучшение усталостной прочности. Простым способом выполнения такого наклепа поверхности

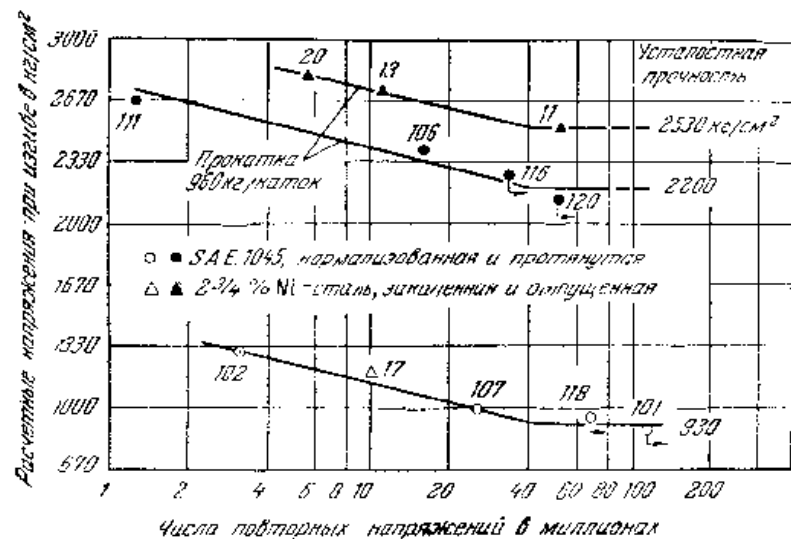


Рис. 335.

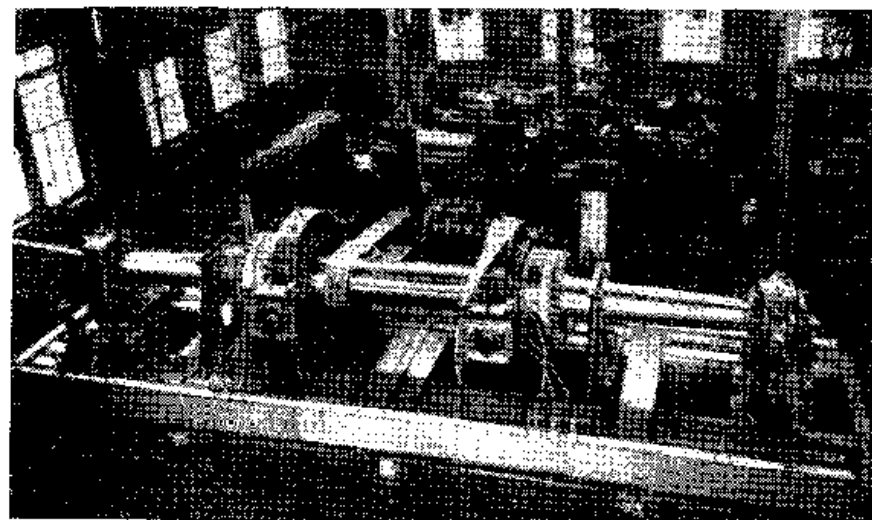


Рис. 336.

является обдувка струей дробь. Этот процесс нашел широкое применение в автомобильной промышленности ¹⁾.

¹⁾ См. O. J. Hogger and H. R. Neffert, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., т. 2₁, стр. 178, 1944

89. Разрушение поверхности при усталости

Другой случай разрушения от усталости при действии высокой концентрации напряжений представляет *разрушение поверхности* катков и зубчатых колес под повторным действием контактных давлений во время вращения. Рассматривая два вращающихся катка, прижатых друг к другу силами P (рис. 337), мы можем вычислить наибольшее сжимающее напряжение на поверхности контакта при помощи формул п. 63. В случае идеально гладкой поверхности вычисленное таким образом напряжение является истинным, и поверхностная усталостная прочность катков данного материала будет зависеть только от величины этого напряжения. В действительности поверхность катка имеет различного рода неровности, величина которых зависит от рода обработки поверхности. Несколько примеров обработки поверхности показано¹⁾ в увеличенном виде на рис. 338. Естественно, шероховатая поверхность будет влиять на распределение давления на поверхности соприкосновения катков (рис. 337). В результате местного перенапряжения у вершин наиболее резких неправильностей трещины усталости будут появляться раньше, чем в случае гладких катков. Это указывает на то, что усталостная прочность катков зависит от степени шероховатости их поверхности.

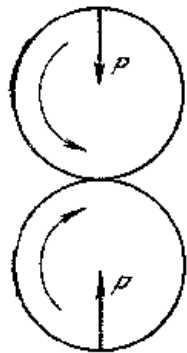


Рис. 337.

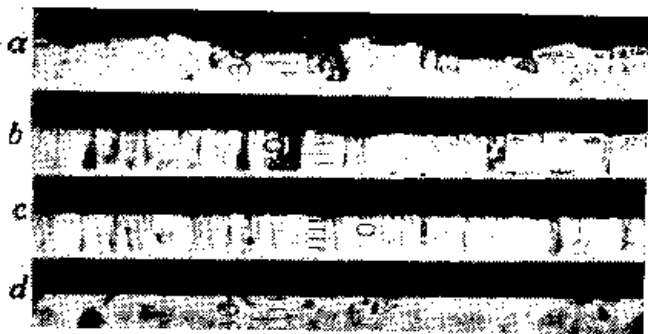


Рис. 338.

Опыты показывают, что если испытания на поверхностную усталость сделаны со смазанными катками, то трещины поверхностной

¹⁾ Этот фотоснимок и два последующих взяты из статьи С. Вэя, представленной собранию Американской ассоциации производителей зубчатых передач, май 1940. Различные методы исследования обработки поверхности описаны С. Вэем в статье, опубликованной в Proc. Special Summer Conferences on Friction and Surface Finish, Массачусетский технологический институт, июнь 1940. Библиография по предмету дана в этой статье.

усталости принимают вид ямок (раковин). *Ямкообразные трещины*, которые иногда развиваются в катках и зубчатых передачах в условиях работы, весьма нежелательны, поэтому значительные усилия были направлены на изучение причин этого явления¹⁾. Эти исследования показали, что причины развития ямкообразных трещин имеют гидродинамическую природу. Ямкообразные трещины принимают направление, уходящее наклонно внутрь металла и приобретают примерно форму конической поверхности. Трещины пересекаются с поверхностью контакта по кривой, имеющей форму параболы или буквы V, причем верх V является частью, которая первой приходит в контакт при вращении. На рис. 339, показывающем увеличенный вид поверхности катка, начальная точка ямкообразной трещины указана стрелкой. Понятно, что смазка, попадающая в трещину, будет стремиться удерживаться в ней, когда трещина проходит по нагруженной области. Высокое давление масла в трещине будет вызывать высокие растягивающие напряжения на дне трещины и трещина будет проникать дальше в металл. Так теория объясняет, почему наличие масла сопровождает рост ямкообразных трещин и почему рост трещин может быть остановлен либо изменением направления вращения, либо уменьшением давления масла в трещине.



Рис. 339.

Чтобы получить сравнительные значения сопротивления ямкообразованию различных материалов, были произведены²⁾ усталостные испытания вращением пар катков (рис. 337). В этих испытаниях один каток был диаметром 40 мм, другой диаметром 38,1 мм, ширина испытанной поверхности была 12,7 мм. Все катки имели чисто отшлифованную поверхность, на которой наибольшая глубина неправильностей была между 0,0025 мм и 0,0046 мм. Скорость вращения лежала в пределах 300 ÷ 500 оборотов в минуту, при смазке из ванны машинным маслом, вязкость которого была 700—900 секунд по Сейболту при рабочей температуре. Наибольшее

¹⁾ Такие исследования были проделаны С. Вэем в исследовательской лаборатории Westinghouse; см. его статью в J. Appl. Mech., т. 2, 1935.

²⁾ См. статью С. Вэя, там же.

сжимающее напряжение, даваемое формулой (279), стр. 284, вычислится по сжимающей нагрузке, достаточной для того, чтобы вызвать появление по меньшей мере одной ямки на квадратный дюйм испытываемой поверхности при 10 миллионах циклов; оно было принято за предел усталости при ямкообразовании. Результаты таких испытаний образцов из стали, содержащей 0,45% углерода, для различных

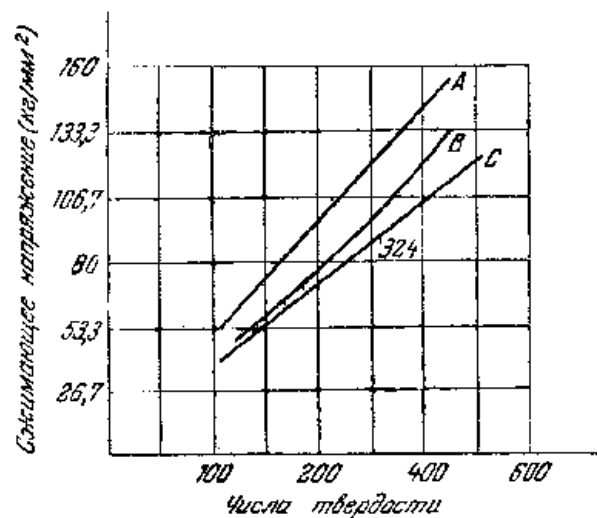


Рис. 340. Сравнение приближенного сопротивления ямкообразованию зубчатых колес и катков.

Кривая A — сжимающее напряжение в зубце колеса в потесе зацепления (вычисленное в предположении полированной поверхности зуба и при отсутствии всяких отклонений в контуре, но с учетом выпуклости и отклонения в шаге), достигаемое для того, чтобы вызвать шесть ямок, т. е. одну ямку примерно на 6 см² площади, выходящей между начальной окружностью и концом зацепления одного зуба. Исследуемый зуб совершал 10⁷ оборотов.

Кривая B — сжимающее напряжение при испытании катков двух разных диаметров (38,1 мм и 40 мм) с полированной поверхностью, вполне достаточной, чтобы являться одно углубление примерно на 6 см² площади за 10⁷ циклов.

условий термообработки представлены на рис. 340 кривой B. Числа твердости¹⁾ катков взяты за абсциссы, а соответствующие пределы ямкообразования — за ординаты. Для сравнения проведена прямая C, которая соответствует пределам ямкообразования, в 324 раза превышающим числа твердости. Так как ямкообразование приводит к разрушению от усталости, мы должны были ожидать, что сопротивление ямкообразованию увеличивается пропорционально твердости. Опыты показали, что предположение о линейной зависимости между сопро-

тивлением ямкообразованию и твердостью является осторожным подходом.

Кривая A на рис. 340 дает значения пределов ямкообразования, найденных из опытов с зубчатыми колесами, сделанными из того же самого материала, что и указанные только что катки. Условия на поверхностях соприкосновения зубцов зубчатой передачи несколько отличаются от условий в катках, причем главное отличие заключается в том, что здесь качение соединяется со скольжением. Эта разница условий влечет за собой увеличение предела ямкообразования.

90. Причины усталости

Хотя собрано большое количество данных относительно прочности при усталости материалов, по до сих пор еще не установлена обоснованная теория, объясняющая причины и механизм этого явления. Разрушение от усталости раньше приписывали «кристаллизации» металла, делающей его хрупким. Такая теория выдвигалась на основании рассмотрения внешнего вида разрушения (см. стр. 394). Теперь мы знаем, что отдельные кристаллы остаются неизменными при испытании на усталость, кроме тех, внутри которых произошла деформация скольжения.

Баушингер первым начал исследование действия циклических напряжений. Он медленно нагружал и разгружал образцы и пользовался чувствительными экстензометрами для установления зависимости между напряжениями и деформациями при этих условиях¹⁾. Таким путем он показал, что пределы пропорциональности при растяжении и сжатии не являются постоянными параметрами для данного материала и что они могут изменяться, если образец подвергать воздействию переменных напряжений. Для объяснения того обстоятельства, что предел выносливости для стали при симметричных циклах напряжений иногда бывает ниже предела пропорциональности, полученного из статических испытаний, Баушингер выдвинул теорию, согласно которой материал, полученный с завода, может иметь свои пределы пропорциональности при растяжении и сжатии, повышенные благодаря холодной обработке, а истинными или *естественными пределами пропорциональности* будут те, которые установятся после того, как материал будет подвергнут действию переменных напряжений. Эти естественные пределы пропорциональности предполагаются определяющими *безопасный диапазон* напряжений при испытаниях на усталость.

Идея Баушингера была развита далее Вэрстоу²⁾. Пользуясь медленно нагружающей и разгружающей машиной (два цикла в минуту) с зеркальным экстензометром Мартенса, прикрепленным к образцу,

¹⁾ J. Bauschinger, Mitt. Mech.-tech. Lab., München, 1886. См. также Dinglers Polytech. J., т. 266, 1886.

²⁾ L. Bairstow, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 210, стр. 35, 1911.

¹⁾ Числа твердости можно считать пропорциональными пределу прочности поверхностного слоя материала катка.

он получил зависимость между напряжениями и деформациями для циклов с различными диапазонами напряжений. Рис. 341 представляет некоторые результаты, полученные Бэрстоу с осевой сталью (предел текучести 3500 кг/см^2 и предел прочности 5900 кг/см^2) при симметричном цикле напряжений (среднее напряжение равно нулю). Линия А изображает первоначальные испытания на растяжение и сжатие с амплитудой 2200 кг/см^2 . В этих пределах зависимость между напряжениями и деформациями следует, как видно, точно прямолинейному закону¹⁾.

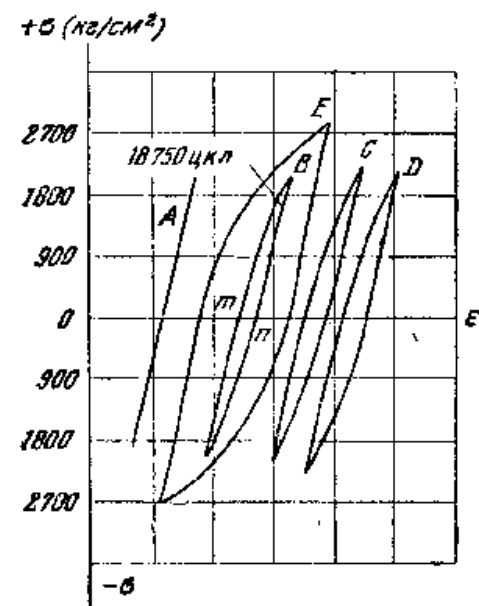


Рис. 341.

После этого образец был подвергнут действию знакопеременных напряжений 2200 кг/см^2 , и было обнаружено, что первоначальная прямая линия А постепенно развивалась в петлю определенной формы. Такая петля, полученная после 18 750 циклов, изображена кривой В. Можно видеть, что в этом случае первоначальные пределы пропорциональности были выше так называемых естественных пределов пропорциональности, установившихся после многих циклов знакопеременных напряжений. Так как эти пределы лежат ниже 2200 кг/см^2 , то появилась *циклическая остаточная деформация*, равная ширине *тп*. Петли С, D и E были получены после действия знакопеременных напряжений, соответственно равных 2350, 2650, 3300 кг/см^2 . Число циклов в каждом случае было достаточным для установления постоянных размеров петель. Построив график изменения ширины этих петель в зависимости от соответствующих наибольших напряжений, Бэрстоу получил приблизительно прямую линию. Пересечение этой линии с осью напряжений определяет диапазон напряжений, который не влияет на образование петель. Определенный таким образом диапазон напряжений был принят Бэрстоу за *безопасный диапазон напряжений*, и последующие испытания на выносливость подтвердили это предположение с достаточной точностью. С тех пор на этом основании разрабатывались различные методы для быстрого определения диапазонов напряжений при усталости²⁾.

Измерение петель гистерезиса для определения безопасного диапазона напряжений может быть сделано другим путем, с использованием калориметрических измерений. Площадь петли представляет рассеянную в продолжение одного цикла энергию. Эта энергия превращается в теплоту, количество которой может быть измерено. Первые опыты этого рода были произведены Гопкинсоном и Вильямсом¹⁾, которые показали, что площади петель, определенные калориметрическим методом, совпадают в пределах 6% с площадями, определенными измерениями при помощи экстензометров. При этих испытаниях было показано также, что возможно установить определенную величину гистерезиса, которая никогда не вызовет разрушения и может быть принята за истинный упругий гистерезис. На базе таких калориметрических измерений было разработано также несколько быстрых способов определения пределов выносливости.

Первая попытка объяснить механизм разрушения при испытаниях на выносливость была сделана Юингом и Хемфри²⁾. Они применяли вращающийся образец из шведского железа с полированной поверхностью и исследовали эту поверхность при помощи металлографического микроскопа после приложения симметричных циклов напряжений. Они нашли, что если были приложены напряжения выше определенного предела, то после достаточного числа циклов на поверхности некоторых кристаллов появлялись полосы скольжения. При повторении циклов число полос скольжения увеличивалось, и некоторые из прежних полос скольжения заметно расширялись. Этот процесс расширения продолжался до окончательного образования трещины, которая шла по расширенным полосам скольжения. Они нашли, что знакопеременные напряжения в 850 кг/см^2 можно приложить миллионы раз, не вызывая каких-либо полос скольжения. Напряжение в 1100 кг/см^2 вызывало лишь одну изолированную полосу скольжения после 3 миллионов циклов, и эта линия ограничивалась средним участком кристалла. Из этих испытаний было выведено заключение, что напряжение в 1100 кг/см^2 было пределом выносливости для шведского железа. На основании таких испытаний была выдвинута теория, утверждающая, что пики напряжений, лежащих выше безопасного предела, вызывают полосы скольжения в отдельных кристаллах. Если продолжать прикладывать такие циклы напряжений, то будет происходить непрерывное скольжение по поверхностям. Скольжение сопровождается трением, подобным наблюдаемому между поверхностями скольжения твердых тел. В результате трения, согласно этой теории, материал постепенно истирается по поверхностям скольжения и образуется трещина.

¹⁾ В. Hopkinson and G. T. Williams, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 87, 1912.
²⁾ J. A. Ewing and J. C. W. Humphrey, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, т. 200, стр. 241, 1903.

¹⁾ Расчетная длина в этих испытаниях была лишь 0,5 дюйма, и малый упругий гистерезис не мог быть обнаружен экстензометрами Мартенса.

²⁾ См. книгу: Н. J. Gough, The Fatigue of Metals, London, гл. 10, 1924. См. также E. Lehr, Die Abkürzungsverfahren, диссертация, Stuttgart, 1925.

Дальнейшие исследования¹⁾ показали, что полосы скольжения могут возникнуть при напряжениях, значительно меньших предела выносливости материала. Они могут развиваться и расширяться, не вызывая образования трещины. Это указывает на то, что появление полос скольжения не может быть принято за основание для определения предела выносливости и не может объяснить механизм появления трещины усталости.

Чтобы глубже проникнуть в механизм разрушения при испытаниях на усталость, Гаф применил новый метод исследования, используя точную рентгеновскую технику²⁾. Начав с образцов монокристалла, он показал, что механизм деформации пластических металлических кристаллов под действием переменных напряжений остается тем же, что и в статических условиях, т. е. скольжение происходит по некоторым кристаллографическим плоскостям в определенных направлениях и обуславливается величиной составляющей касательного напряжения в направлении скольжения. Рентгеновский анализ показал, что если циклы были вне безопасного диапазона напряжений, то «кристаллографические плоскости оказывались искаженными в такой мере, что, в то время как их кривизна в среднем была незаметной, все же существовали отдельные местные искривления. Следовательно предположить, что большие местные деформации — также, возможно, и действительные разрывы решетки — должны были произойти в таких искривленных плоскостях, которые под приложением достаточно большого диапазона внешних напряжений или деформаций могли повести к образованию прогрессирующей трещины; при более низком значении циклического деформирования состояние могло быть устойчивым».

При проведении опытов с кристаллическими материалами, например с мягкой сталью, предварительные статические испытания показали, что не происходит постоянного изменения в зернах, если сохраняется упругое состояние. На участке между пределом упругости и пределом текучести на поверхности некоторых неблагоприятно ориентированных зерен появляются линии скольжения. Этими линиями определяются плоскости скольжения кристаллов. Если переменные напряжения, большие предела выносливости материала, приложены к образцу, то слабейшее зерно начинает повреждаться в плоскости скольжения, и тонкая трещина развивается по этой плоскости. Трещина расширяется с числом циклов, распространяясь на смежные зерна, и в конце концов приводит к разрушению образца. Это показывает, что повреждение от усталости начинается в том месте, где происходит пластическое течение, между тем как окружающий материал остается совершенно упругим.

¹⁾ H. J. Gough and D. Hanson, Proc. Roy. Soc. (London), A, p. 104, 1923.

²⁾ Выводы этой работы были представлены Королевскому авиационному обществу. См. J. Roy. Aeronaut. Soc., август 1936.

Для изучения деформации в месте, где начинается усталостное повреждение от действия знакопеременных напряжений, рассмотрим снова модель, составленную из трех стержней (рис. 271, стр. 343), которая была использована для пояснения эффекта Баушингера. Предполагая, что действует симметрично знакопеременная сила P , которая больше предела упругости модели, и постукая, как объяснено на стр. 346, мы получаем петлю в виде параллелограмма $abcd$ (рис. 342). В предыдущем выводе наклеп материала вследствие

пластической деформации в вертикальном стержне пренебрегалось и предполагалось, что напряжение предела текучести стержня остается постоянным в течение циклов нагружения. При этом предположении размер петли оставался постоянным и независимым от числа циклов. Если же принять во внимание наклеп, мы получим совершенно иные результаты. Начиная от точки a , которая определяет начало разгрузки модели, получаем линию ab (рис. 342). Точка b отвечает состоянию, когда вертикальный стержень еще не начал течь, так как его предел текучести несколько повысился из-за предыдущей пластической деформации (участок ea диаграммы). Стержень будет продолжать работать упруго до некоторого более высокого значения нагрузки, например соответственно точке b' диаграммы. Начиная с этого значения нагрузки, вертикальный стержень течет, и мы получим участок $b'c'$ диаграммы. Точка c' соответствует для модели силе P , действующей вверх. Разгружая теперь модель и затем вновь нагружая ее в противоположном направлении, мы найдем, что на графике ход упругой деформации продолжается до некоторой точки d' вследствие наклепа вертикального стержня. Точка d' определяет начало текучести, и мы получаем участок $d'e'$ на диаграмме.

Продолжая и дальше циклы нагружения и разгрузки, получим точки f' , g' , h' , i' , ... Видно, что благодаря наклепу вертикального стержня, который аналогичен слабому месту образца, испытываемого на усталость, петли гистерезиса становятся все уже и уже с увеличением числа циклов. Это указывает на то, что амплитуда пластической деформации стержня уменьшается с каждым циклом, в то время как амплитуда внешней нагрузки остается постоянной ($\frac{1}{2}P$). В то же самое время амплитуда напряжений в стержне растет с числом циклов

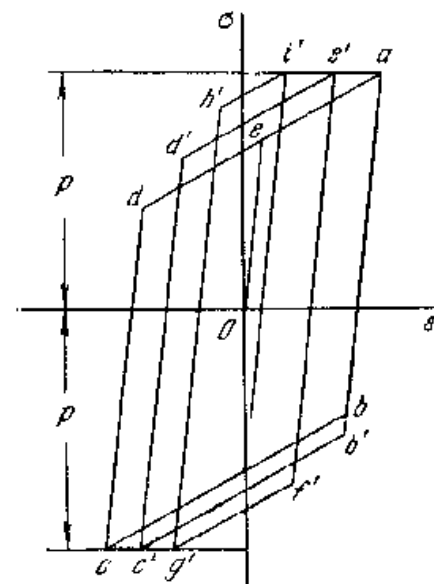


Рис. 342.

и приближается к значению, которое следовало бы получить при действии нагрузки P , приложенной к совершенно упругой модели.

Возвращаясь теперь к рассмотрению слабых мест в образцах, испытываемых на усталость, мы должны разрешить главный вопрос, будет ли зерно, которое пластически деформируется, безопасно сопротивляться прогрессирующему наклепу или же будет начинаться и развиваться трещина усталости. Для того чтобы ответить на этот вопрос, Орован исследовал ¹⁾ наклеп слабого места при переменных напряжениях, используя кривую наклепа, выражающую предел текучести в функции пластической деформации ²⁾. Он рассмотрел два случая, как показано на рис. 343, *a* и 343, *b*. В обоих случаях линия OPA

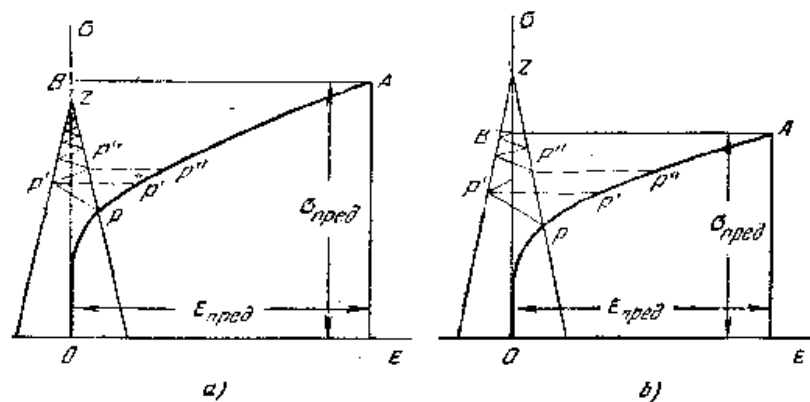


Рис. 343.

представляет кривую наклепа материала. Ордината точки P , соответствующая точке a на рис. 342, дает напряжение в слабом месте образца, испытываемого на усталость, в начале первого цикла. Зигзагообразная кривая $p p' p'' \dots$ отвечает последовательным переменным пластическим деформациям слабого места при ходе циклов внешней нагрузки. Предполагая, что наклеп не зависит от направления деформации, но зависит только от суммы их абсолютных значений в течение циклов, мы определяем наклеп слабого места по точкам $p', p'' \dots$ на кривой OPA наклепа. Мы видим, что в случае на рис. 343, *a*, где точка Z ниже точки B , даже для неограниченного числа циклов наклеп всегда остается меньше его предельного значения (точка A). Таким образом, мы заключаем, что в этом случае переменная нагрузка является безопасной.

¹⁾ E. Orowan, Proc. Roy. Soc. (London), A, т. 171, стр. 79, 1939.

²⁾ Вследствие перемены направления пластической деформации эта кривая будет несколько отлична от кривой, полученной при статическом растяжении образца, но эта разница не является существенной в наших дальнейших рассуждениях.

В случае, показанном на рис. 343, *b*, где точка Z выше точки B , наклеп в слабом месте достигает своего крайнего значения в точке B . С дальнейшим увеличением числа циклов трещина начнет развиваться, и образец разрушится от усталости. Видно, что опасный и безопасный циклы отличаются только положением точки Z . Поэтому предел выносливости будет соответствовать случаю, для которого точка Z совпадает с точкой B . Ордината OZ представит предельное напряжение к которому близка амплитуда напряжений в слабом месте, когда число циклов возрастает ¹⁾. Это местное напряжение, зависящее от ориентировки слабого зерна, и оно может быть выше чем $\sigma_{пред}$ вычисленное как среднее напряжение по поперечному сечению образца.

Базируясь на диаграммах рис. 343, Орован сделал некоторые выводы относительно усталостной прочности, которые удовлетворительно согласуются с опытными данными.

1) Так как влияние переменных напряжений зависит только от относительного значения ординат OZ и OB , можно ожидать, что предел выносливости материала связан с пределом прочности и не зависит от таких характеристик, как предел пропорциональности, предел текучести и пластичность.

2) Предполагая, что участок PA (рис. 343) кривой наклепа может быть заменен наклонной прямой, можно показать, что кривая $\sigma - n$ (рис. 312) должна иметь характерную форму, состоящую из наклонной и горизонтальной прямой линии. Может быть также сделана грубая оценка числа циклов, соответствующего точке пересечения этих двух линий (предел выносливости).

3) Влияние среднего напряжения на величину диапазона напряжений можно исследовать также, используя диаграмму, которая подобна представленным на рис. 343.

91. Механические свойства металлов при высоких температурах

Во многих случаях части инженерных конструкций подвергаются одновременному действию напряжений и высоких температур. Такие условия имеют место, например, в силовых установках и в химической промышленности. Вследствие тенденции к непрерывному увеличению начальной температуры пара ²⁾ в силовых установках и в связи с развитием газовых турбин вопрос о прочности материалов при высоких температурах стал важным и практически, и в этой области было выполнено значительное количество исследовательских работ ³⁾.

¹⁾ Это соответствует амплитуде напряжений в вертикальном стержне ранее рассмотренной модели.

²⁾ McLeanby and Kerr, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), 1927; H. L. Guu, там же, 1929 и Engineer, т. 147, стр. 136, 1929.

³⁾ О библиографии см. G. V. Smith, Properties of Metals at Elevated Temperatures, New York, 1950. См. также H. J. Tarpell, Creep of Metals, Oxford, 1931.

Опыт показывает, что пределы текучести и прочности металлов при растяжении зависят в значительной степени от температуры.

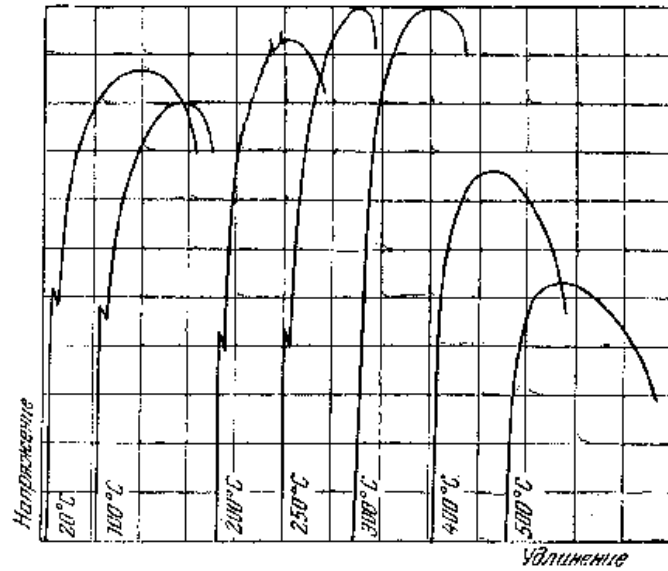


Рис. 344.

Несколько диаграмм, полученных при испытаниях на растяжение средне-углеродистой стали при различных температурах, показано¹⁾

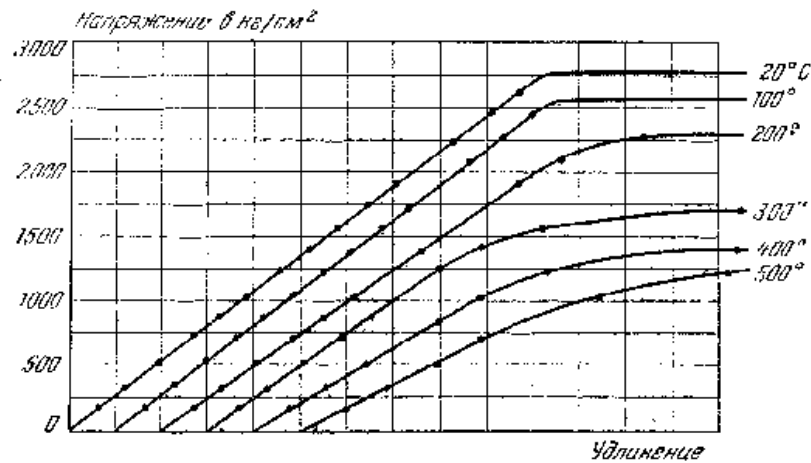


Рис. 345.

на рис. 344. Приблизительно до 250°С предел прочности сталей увеличивается, но с дальнейшим увеличением температуры он быстро

¹⁾ См. доклад о работе, сделанной R. В. Wilhelm'ом в исследовательской лаборатории Вестингауза, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 24, стр. 151, 1924.

падает. С увеличением температуры предел текучести становится менее резко выраженным, и при 300°С его уже нельзя различить на диаграмме. На рис. 345 первые участки тех же диаграмм показаны в увеличенном масштабе. Из рисунка видно, что при увеличении

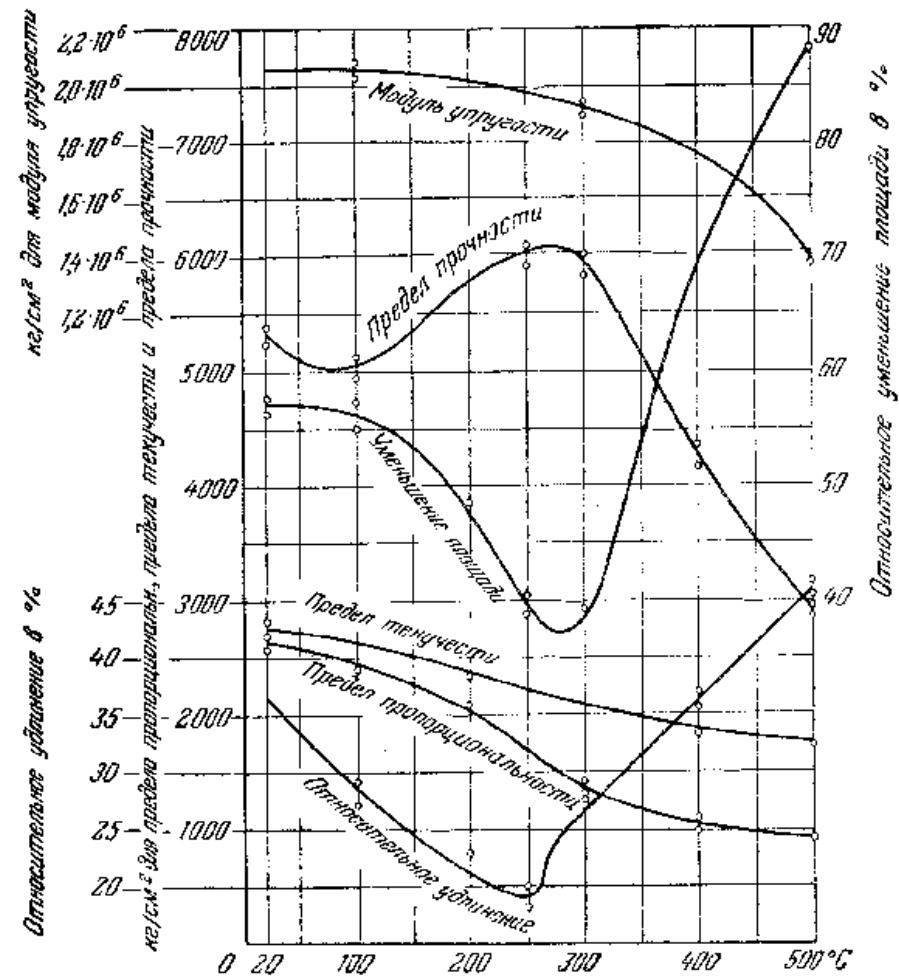


Рис. 346.

температуры предел пропорциональности стали уменьшается. В то же самое время уменьшается угол наклона прямых участков диаграмм и, следовательно, уменьшается модуль упругости. Результаты указанных выше испытаний представлены на рис. 346, который показывает, что, в то время как при возрастании температуры прочность материала уменьшается, его пластичность, характеризуемая увеличением длины и уменьшением площади сечения, увеличивается.

Опыты при высоких температурах показывают, что результаты испытаний на растяжение в значительной степени зависят от продолжительности испытания. При увеличении времени испытания на растяжение нагрузка, необходимая для доведения образца до разрушения, становится все меньше и меньше. На рис. 347 приведены диаграммы испытаний на растяжение для ранее рассмотренной стали при 500°C и при продолжительности испытания, соответственно равной 6 минутам, 70 минутам и 240 минутам. Очевидно, данные испытания на растяжение, полученные из обычных кратковременных испытаний (продолжающихся примерно 15 или 20 минут) и представленные на

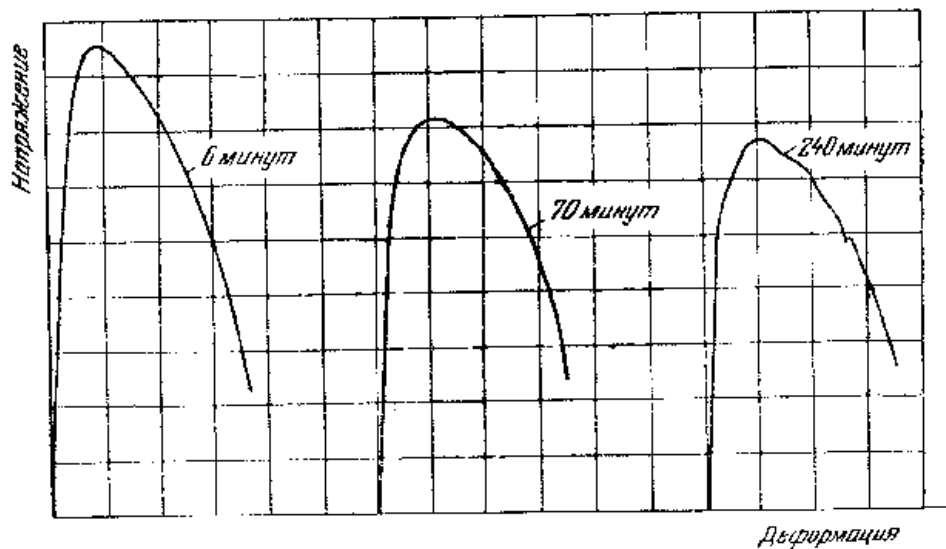


Рис. 347.

рис. 346, полезны лишь для случаев, когда нагрузки действуют только в течение короткого времени¹⁾.

В случае нагрузок, действующих в течение продолжительного периода времени и при высокой температуре, например таких, как вес конструкции или давление пара в силовых установках, мы нуждаемся в дополнительных данных относительно влияния времени. Опыты показывают, что при этих условиях может иметь место непрерывная деформация, или *ползучесть*, которую, как весьма важный фактор, необходимо учитывать при проектировании. Хотя по этой проблеме значительное количество исследовательских работ²⁾ было

¹⁾ Чтобы исключить влияние времени при определении модуля упругости, были применены испытания на колебания. См. G. Verge, J. Appl. Mech., т. 2, 1935 и его докторскую диссертацию, Мичиганский университет.
²⁾ О библиографии см. книгу G. V. Smith'a, цит. на стр. 431.

выполнено и в еще большем числе выполняется сейчас, все же вопрос о поведении металлов при высокой температуре и продолжительном действии нагрузки не может считаться вполне выясненным.

В большинстве опытов, относящихся к ползучести, исследуют постепенное удлинение материала при длительном растяжении. Образцы, применяемые при испытании на растяжение при высокой температуре, подвергаются действию некоторой постоянной нагрузки и температуры, и при этой нагрузке исследуют *прогрессирующую ползучесть*. Результаты таких опытов для данной температуры и для различных значений нагрузки можно представить кривыми время — удлинение, как показано на рис. 348¹⁾. Кривая А представляет типичную кривую ползучести для сравнительно высокого напряжения. После приложения нагрузки ползучесть происходит при постепенно уменьшающейся скорости. В точке *a* имеет место перегиб, и скорость ползучести начинает увеличиваться до тех пор, пока испытуемый образец не разорвется. Кривая В, соответствующая несколько меньшей нагрузке, имеет подобную форму, но вследствие более низких скоростей ползучести для разрушения образца требуется более продолжительное время.

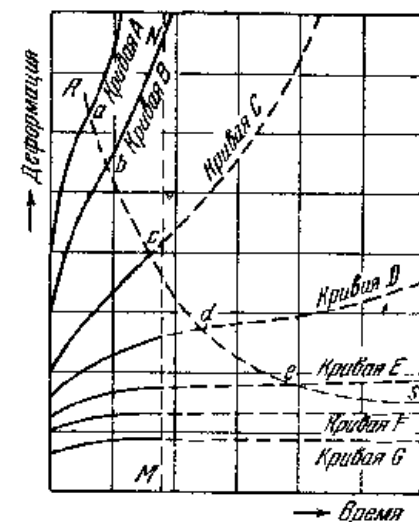


Рис. 348.

Если нагрузку уменьшать дальше, подобные же испытания над различными образцами приводят к кривым С, D, E, F и G. Если напряжение уменьшается, то для достижения точки перегиба на кривой ползучести требуется все больше и больше времени. Для определения точек перегиба для таких кривых, как F и G, потребовалось бы для испытаний чрезвычайно продолжительное время. Видно, что с уменьшением напряжения кривая ползучести, по существу, является прямой на все более продолжительном отрезке времени. Рабочие напряжения, встречающиеся в практике, на графике располагаются обычно ниже кривой G; следовательно, предположение, что кривая ползучести приближается к прямой линии, достаточно точно для практических целей. Наклон этой линии дает *наименьшую скорость ползучести* для данного напряжения и данной температуры. Величина

¹⁾ Рис. 348—353 взяты из старой McVetty, Mechanical Engineering, стр. 149, 1934 и Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 34, 1938.

той скорости ползучести уменьшается с уменьшением напряжения, но нет убедительного доказательства, что она когда-либо обратится в нуль, т. е. что имеется предельное напряжение, при котором образцы может бесконечно сопротивляться напряжению при высокой температуре.

При изучении *прогрессирующей ползучести*, испытывая образцы на растяжение под постоянной нагрузкой и при высокой температуре, нужно иметь в виду два явления: 1) наклеп материала вследствие пластической деформации и 2) устранение этого наклепа или «смягчение» материала вследствие продолжительного действия высокой температуры. Механизм пластического течения при высокой температуре тот же, что и при комнатной температуре. Пластическая деформация вызывается скольжением металла. Это скольжение сопровождается увеличением сопротивления скольжению, которое представляет собой наклеп (стр. 352).

Скорость, с которой влияние наклепа устраняется, зависит от температуры. Ранее было упомянуто (стр. 353), что влияние наклепа можно исключить в короткое время *отжигом* металла при некоторой особой высокой температуре, зависящей от рода металла. Тот же эффект можно получить при гораздо более низкой температуре, если температура действует в течение продолжительного периода времени. Было показано¹⁾, например, при исследовании

смягчения холоднообработанной меди, что смягчение, произведенное в течение 12 минут при 300° С, потребовало бы 10,4 дня при 200° С и что, видимо, потребовалось бы около 300 лет, чтобы произвести то же смягчение при 100° С.

Кривые время — удлинение (рис. 348) показывают, что в течение начального периода скорость растяжения постепенно уменьшается. Это происходит благодаря наклепу. В точке перегиба устанавливается некоторая постоянная скорость растяжения, при которой наклеп и смягчение нейтрализуют друг друга, т. е. наклеп, вызываемый ползучестью, непрерывно уничтожается смягчающим эффектом высокой температуры. Затем ползучесть продолжается при постоянной скорости, зависящей от величины напряжения и температуры.

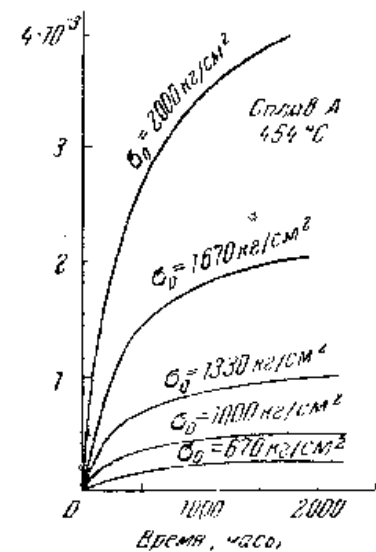


Рис. 349.

Так как мы всегда должны учитывать прогрессирующую ползучесть в элементах, подверженных одновременному действию высокой температуры и напряжения, проектирование должно быть основано на допущении некоторой продолжительности службы конструкции, а также некоторой величины допустимой остаточной деформации. Рабочие напряжения должны быть выбраны в каждом частном случае так, чтобы остаточная деформация конструкции в течение ее срока

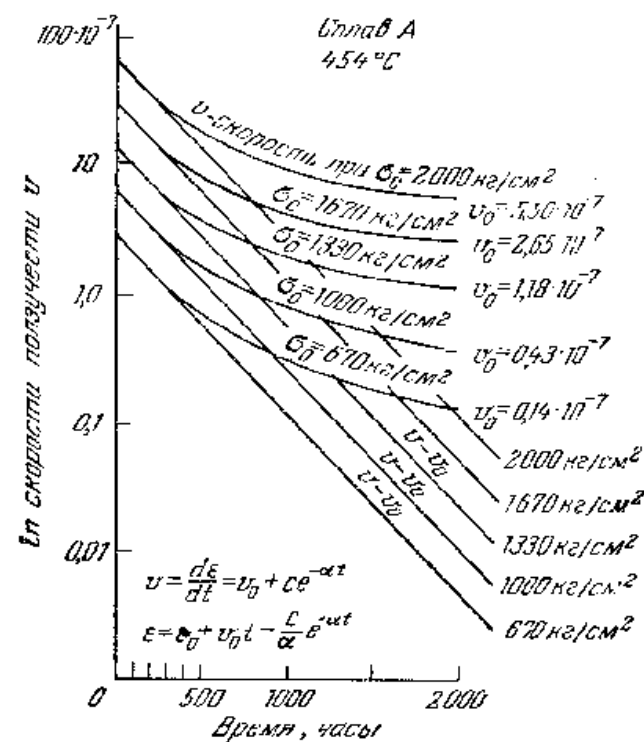


Рис. 350.

службы не превосходила бы определенного предела, зависящего от типа конструкции. Целью испытаний при высоких температурах в течение длительного времени является предоставление проектировщику достаточных сведений для удовлетворительного вычисления остаточных деформаций, обусловленных ползучестью.

Наибольшая продолжительность лабораторных испытаний составляет обычно несколько тысяч часов, и для того чтобы предугадать деформацию ползучести во время срока службы конструкции, необходимо проделать экстраполяцию результатов лабораторных испытаний. Опыты с различными сталями показывают, что в первом участке кривых ползучести на рис. 348 превышение скорости ползучести над наименьшей скоростью ползучести уменьшается геометрически.

¹⁾ См. Pilling and Halliwell, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 25, 1925. См. также R. W. Bailey, J. Inst. Metals, т. 35, 1926.

при условии, что время нарастает арифметически. Следовательно, обозначая через ε неупругое относительное удлинение в некоторый момент времени t , через v — соответствующую скорость ползучести и через v_0 наименьшую скорость ползучести, мы можем для скорости ползучести принять следующее выражение¹⁾:

$$v = \frac{d\varepsilon}{dt} = v_0 + ce^{-at}, \quad (a)$$

где c , v_0 и a — постоянные, которые должны быть определены из кривых ползучести. Возьмем, например, кривые ползучести, показанные на рис. 349. Эти кривые были получены путем испытания металла при нескольких значениях напряжения и при постоянной температуре 454°C. Измеряя наклон в пяти точках на каждой из этих кривых, мы получаем значение скорости ползучести при пяти различных значениях t и строим кривые, показанные на рис. 350. Горизонтальные асимптоты этих кривых, очевидно, дают значения v_0 для примененных значений напряжения. Теперь, построив значения

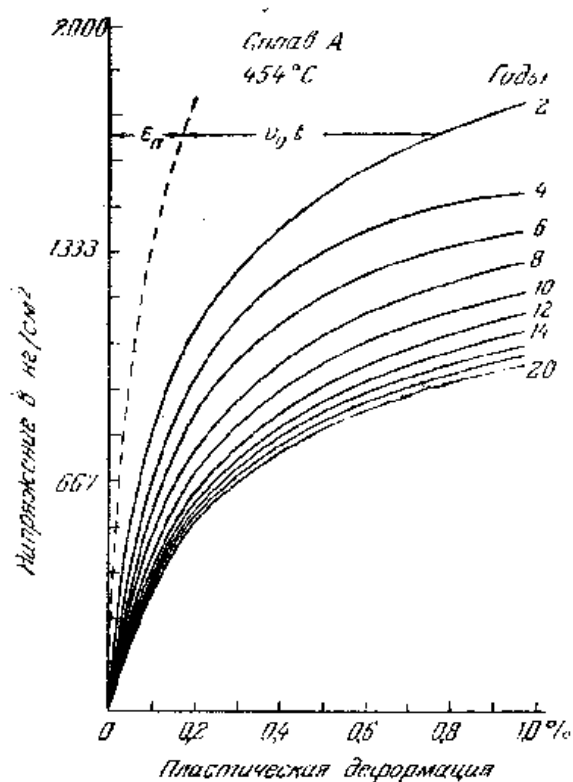


Рис. 351.

$\lg(v - v_0)$ как функцию времени, мы получим систему наклонных параллельных линий, указывающих, что предложенное выражение (a) выбрано удовлетворительно. Значения постоянных c и d в уравнении (a) получаются из этих линий измерением при $t=0$ ординат линий, а также их наклона.

Пластическое относительное удлинение теперь получится путем интегрирования уравнения (a), что дает

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + v_0 t - \frac{c}{a} e^{-at}, \quad (b)$$

где ε_0 — постоянная. Применяя это уравнение к тому значению t , для которого пластическое удлинение известно из рис. 349, можем

¹⁾ См. сноску на стр. 435. Для сравнения методов экстраполяции данных испытаний см. J. Magin, Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 37, стр. 258, 1937.

вычислить значение ε_0 . Следовательно, все постоянные, входящие в уравнение (b), определяются при помощи кривых, представленных на рис. 349 и 350. Мы можем теперь применить это уравнение при вычислениях ε для любого данного промежутка времени. Этим путем были получены кривые, показанные на рис. 351. Имея такую систему кривых для определенного материала и для определенной температуры, проектировщик может легко выбрать надлежащие значения рабочего напряжения, если даны срок службы сооружения и допустимая пластическая деформация.

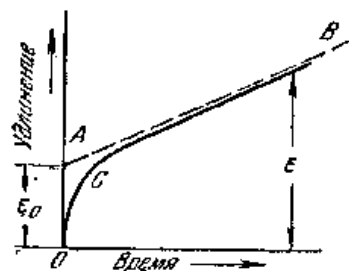


Рис. 352.

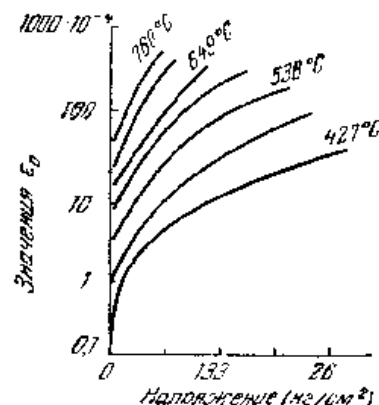


Рис. 353.

При вычислении ε для больших значений t мы находим, что последний член в уравнении (b) весьма мал, и им можно пренебречь. Это значит, что вместо кривой, показанной на рис. 352, мы можем воспользоваться пунктирной прямой. В результате значение ε будет определяться через величину отрезка ползучести ε_0 и наименьшую скорость ползучести v_0 . Опытные значения ε_0 можно представить кривыми, подобными показанным на рис. 353, которые были получены для 12%-ной хромистой стали.

Что касается наименьшей скорости ползучести, то опыты показывают, что v_0 можно представить с удовлетворительной точностью степенной функцией напряжения

$$v_0 = kv^n, \quad (c)$$

где k и n — постоянные для данных материала и температуры. Значения этих постоянных¹⁾ для некоторых сталей, испытанных в исследовательских лабораториях фирмы «Вестингауз», приведены в табл. 25.

¹⁾ См. Mc Vetty, цит. на стр. 435.

Таблица 25

Значения постоянных k и n

Материал	Температура, °C	k	n
Кованая сталь 0,39% С	400	$16 \cdot 10^{-16}$	0,6
Сталь 0,30% С	400	$48 \cdot 10^{-85}$	0,48
Сталь Ni—Cr—Mo	500	$91 \cdot 10^{-26}$	0,19
Сталь 12%-ная Cr	455	$10 \cdot 10^{-27}$	0,31

В этой таблице k — относительное удлинение в течение 24 часов и σ — напряжение в $кг/см^2$. При помощи этих постоянных в различных частных случаях для элементов конструкций можно вычислить деформацию ползучести и распределение напряжений.

В нашем предыдущем изложении предполагалось, что пластическое течение сопровождается наклепом. Опыты показывают, что с увеличением температуры наклеп становится все менее и менее резко выраженным. Наибольшая температура, при которой наклеп наблюдается, различна для разных материалов и в случае стали меняется в зависимости от состава стали. Например, никакого наклепа не было замечено¹⁾ в мягкой углеродистой стали (0,17% углерода) при напряжении $155 кг/см^2$ и температуре $647^\circ C$. При таких условиях

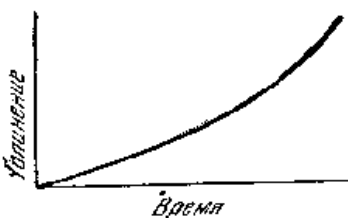


Рис. 354.

кривая время — удлинение имеет вид, представленный на рис. 354, т. е. скорость ползучести постоянно увеличивается с течением времени.

Интересно отметить, что два рода кривых время — удлинение, показанных на рис. 348 и 354, соответствуют различным типам разрушения. Когда имеет место наклеп, текучесть в каком-либо месте образца увеличивает сопротивление в этом месте, и поэтому следующее скольжение происходит по некоторому другому поперечному сечению. В результате этого наблюдается равномерное удлинение, и образец остается цилиндрическим до начала образования шейки. Когда наклеп отсутствует, местная текучесть, которая начинается в слабейшем поперечном сечении, распространяется при уменьшающейся скорости к концам образца. В результате две части разорванного образца суживаются в виде конусов от концов к поперечному сечению в месте разрыва.

При выполнении экстраполяции с помощью уравнения (б) предполагается, что величины σ_0 , c и x , характеризующие материал, остаются постоянными в течение срока службы конструкции. Но при

¹⁾ См. Н. J. Tarpell, Creep of Metals, 1931.

продолжительном действии высоких температур сопротивление стали ползучести несколько уменьшается. Чтобы компенсировать это *термическое действие*, иногда рекомендуются лабораторные испытания при температурах выше рабочей температуры¹⁾. Термическое действие больше проявляется в случае высокоуглеродистых сталей. Для того чтобы уменьшить структурное перерождение, необходимо применить подходящую термическую обработку, которая обеспечит структурную устойчивость²⁾.

Прежде чем закончить это рассмотрение, необходимо заметить, что прогрессирующая ползучесть может производить перераспределение напряжений в частях, подвергнутых одновременному действию напряжений и высоких температур. В местах высокой концентрации напряжений скорость ползучести больше, и, следовательно, в результате ползучести будет более благоприятное распределение напряжений. Это обстоятельство нужно учитывать при проектировании. Несколько примеров этого рода разобрано Бэйли³⁾.

92. Изгиб балок при высоких температурах

В этом параграфе мы рассмотрим изгиб призматических балок симметричного поперечного сечения и предположим, что изгибающие

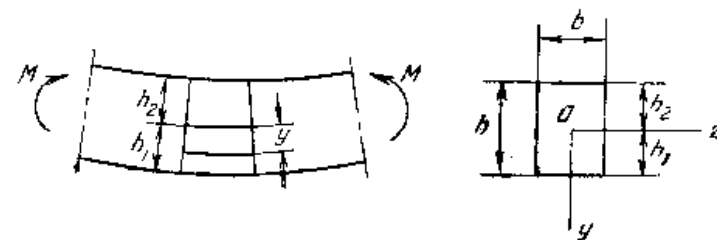


Рис. 355.

силы действуют в плоскости симметрии. Тогда из условий симметрии следует, что изгиб будет происходить в той же плоскости. Наше дальнейшее изложение мы начнем с чистого изгиба (рис. 355) и

¹⁾ См. статью R. W. Bailey, J. Appl. Mech., т. 21, стр. 300, 1954.

²⁾ См. F. R. Hensel and E. I. Larsen, Trans. Am. Inst. Min. Metallurg. Engrs., т. 90, стр. 55, 1932. Влияние продолжительного действия высоких температур на свойства различных сталей разобрано в книге G. V. Smith'a, там же стр. 431. Случай внутрикristаллического разрушения сталей с высоким сопротивлением ползучести при высоких температурах разобран R. W. Bailey, Proc. Inst. Mech. Engrs. (London), т. 131, стр. 131—134, 1935.

³⁾ R. W. Bailey, там же, 1927 и 1935; Engineering, т. 124, стр. 44, 1927 и т. 129, 1930. См. также C. R. Soderberg, J. Appl. Mech., т. 1, стр. 131, 1933; G. H. MacCullough, там же, стр. 87; J. Marin, J. Franklin Inst., т. 226, стр. 645, 1938.

предположим, что при изгибе: 1) поперечные сечения остаются плоскими¹⁾, 2) каждое продольное волокно находится в состоянии простого растяжения или сжатия и 3) уравнение ползучести (уравнение (b) на стр. 438), установленное для растяжения, также сохраняет свою силу и для сжатия. Обозначим через y расстояния волокон от нейтральной оси и через r — радиус кривизны изогнутой оси; относительным удлинением или укорочением произвольного волокна будет

$$\epsilon = \frac{y}{r}. \quad (a)$$

При вычислении соответствующего напряжения предполагаем, что протекло значительное время с момента приложения нагрузки. Пренебрегая переходным периодом, представленным на рис. 352 кривой, можно для оценки ползучести воспользоваться выражением (c), стр. 439. В результате получим

$$z = \frac{y}{r} = k\sigma^n t \quad (b)$$

$$\sigma = \left(\frac{y}{rkt} \right)^{1/n}. \quad (c)$$

Обозначая через h_1 и h_2 расстояния наиболее удаленных от нейтральной оси волокон, для наибольшего растягивающего или сжимающего напряжений находим значения

$$(\sigma_{\max})_{\text{раст}} = \left(\frac{h_1}{rkt} \right)^{1/n}, \quad (\sigma_{\max})_{\text{сж}} = \left(\frac{h_2}{rkt} \right)^{1/n}. \quad (d)$$

Растягивающее и сжимающее напряжения в расстоянии y от нейтральной оси будут

$$\sigma_{\text{раст}} = (\sigma_{\max})_{\text{раст}} \left(\frac{y}{h_1} \right)^{1/n}, \quad \sigma_{\text{сж}} = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} \left(\frac{y}{h_2} \right)^{1/n}. \quad (e)$$

Для определения положения нейтральной оси и расстояний h_1 и h_2 применим условие статики, которое устанавливает, что сумма растягивающих усилий по нижнему участку поперечного сечения (рис. 355) должна равняться сумме сжимающих усилий по верхнему участку. Этим условием будет

$$(\sigma_{\max})_{\text{раст}} \int_0^{h_1} \left(\frac{y}{h_1} \right)^{1/n} dF = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} \int_0^{h_2} \left(\frac{y}{h_2} \right)^{1/n} dF. \quad (f)$$

¹⁾ Это предположение удовлетворительно согласуется с опытами; см. G. H. MacCallough, Trans. A. S. M. E., т. 55, стр. 55, 1935; H. J. Tarsell, J. Inst. Metals, стр. 387, 1935.

Если ширина поперечного сечения является известной функцией y , можно преобразовать указанные интегралы и получить уравнение для вычисления отношения h_1/h_2 .

Задача упрощается, если поперечное сечение имеет ось симметрии, перпендикулярную к плоскости изгиба. Тогда сразу же заключаем, что эта ось является нейтральной осью поперечного сечения, поскольку при этом условии (f) удовлетворяется. Получая в результате

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2}, \quad (\sigma_{\max})_{\text{раст}} = (\sigma_{\max})_{\text{сж}} = \sigma_{\max} = \left(\frac{h}{2rkt} \right)^{1/n}, \quad (g)$$

для растягивающего и сжимающего напряжений мы можем пользоваться формулой

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{2y}{h} \right)^{1/n}. \quad (h)$$

Для вычисления σ_{\max} воспользуемся уравнением статики, которое устанавливает, что момент внутренних сил, распределенных по поперечному сечению, равняется внешнему изгибающему моменту M . Таким образом, имеем

$$M = 2\sigma_{\max} \int_0^{h/2} \left(\frac{2y}{h} \right)^{1/n} y dF. \quad (i)$$

Рассмотрим теперь в качестве простого примера случай прямоугольной балки шириной b . В этом случае уравнение (i) дает

$$M = 2b\sigma_{\max} \int_0^{h/2} \left(\frac{2y}{h} \right)^{1/n} y dy = \frac{n}{2n+1} \frac{bh^2}{2} \sigma_{\max},$$

и мы получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh}{2J} \frac{2n+1}{3n},$$

где J есть момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Подставляя в уравнение (h), для напряжения в любом волокне находим

$$\sigma = \frac{Mh}{2J} \frac{2n+1}{3n} \left(\frac{2y}{h} \right)^{1/n}.$$

На рис. 356 показано распределение напряжений σ для $n=10$ и $n=6$. Видно, что при больших значениях n изменение n лишь в незначительной степени влияет на напряжение. Для сравнения распределение напряжений при упругом состоянии показано прямой линией OA .

Зная величину σ_{\max} , находим кривизну балки из выражения (d). Если нейтральной осью является ось симметрии площади поперечного сечения, то кривизной будет

$$\frac{1}{r} = \frac{2kt}{h} \sigma_{\max}^n \quad (j)$$

Когда балка испытывает поперечный изгиб, нормальные напряжения и кривизна в каком-либо поперечном сечении балки будут вычислены путем подстановки значения изгибающего момента M в формулы для чистого изгиба. Таким образом, если нейтральной осью будет ось симметрии, напряжения должны вычисляться при помощи уравнений (h) и (i), а кривизна найдется из уравнения (j).

Для прямоугольной балки дифференциальным уравнением изогнутой оси будет

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \pm \frac{2kt}{h} \sigma_{\max}^n = \\ &= \pm \frac{2kt}{h} \left(\frac{h}{2J}\right)^n \left(\frac{2n+1}{3n}\right)^n M^n. \end{aligned}$$

Это уравнение можно легко проинтегрировать в каждом частном случае распределения нагрузки, а постоянные интегрирования можно определить из условий на концах балки. Подобным путем можно исследовать изгиб прямоугольной балки при одновременном действии изгиба и растяжения или сжатия¹⁾.

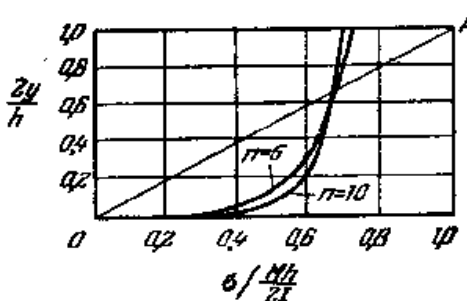


Рис. 356.

93. Релаксация напряжений

В предыдущих параграфах была рассмотрена ползучесть при постоянной нагрузке. Однако имеются случаи, когда ползучесть происходит при постепенно уменьшающихся силах. Болтовое соединение, подверженное высоким температурам, представляет важный случай этого типа. Затяжкой болтов вызывается значительное первоначальное растягивающее напряжение, но вследствие ползучести напряжение постепенно уменьшается с течением времени. Это явление называется *релаксацией*. Уменьшение первоначальных напряжений в болтах может оказать нежелательное действие, как, например, утечку пара в турбине или в паропроводе при высокой температуре. В этой связи

при изучении явления релаксации¹⁾ была проделана большая теоретическая и экспериментальная работа.

Начнем наше обсуждение этого вопроса с рассмотрения простого случая, когда концы болта удерживаются на неизменном расстоянии друг от друга. Предположим, что затяжкой болта были вызваны первоначальное растягивающее напряжение σ_0 и соответствующая упругая деформация σ_0/E . С течением времени растягивающее напряжение и упругое удлинение в болте постепенно уменьшаются из-за ползучести. В то же время будут иметь место пластические деформации. Так как концы болта закреплены, то полное удлинение должно остаться постоянным и равным начальному упругому удлинению. Обозначая через σ растягивающее напряжение в болте в какой-либо момент времени t и через ϵ_p пластическое удлинение вследствие ползучести, мы получаем уравнение

$$\epsilon_p + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (a)$$

В этом уравнении ϵ_p и σ являются функциями времени t . Дифференцируя уравнение (a) по t , получаем

$$\frac{d\epsilon_p}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (b)$$

При решении этого уравнения начнем с предположения, что уравнение (c), стр. 439, для скорости ползучести достаточно точно для нашей задачи. Тогда

$$k\sigma^n = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt},$$

и мы получаем

$$dt = -\frac{1}{kE} \frac{d\sigma}{\sigma^n}.$$

Интегрирование даст

$$t = \frac{1}{(n-1)kE} \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \left[1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{n-1} \right], \quad (c)$$

и зависимость напряжение—время для болта будет представлена кривой²⁾ на рис. 357. Опыт показывает, что напряжение в болте, предсказываемое этой кривой, является слишком высоким. Болт теряет свое первоначальное напряжение в значительно более короткий срок,

¹⁾ Несколько методов решения этой задачи разобрано В. П. Поповым, J. Appl. Mech., т. 14, стр. A-135, 1947; библиография по предмету дана в этой статье. См. также С. W. Hooper, там же, стр. 352. Об экспериментальном исследовании релаксации напряжений см. A. N. Adai and J. Boyd, Proc. 5th Internat. Congr. Appl. Mech., стр. 245, 1939.

²⁾ См. J. Marin, Mechanical Properties of Materials and Design, стр. 241, 1942.

¹⁾ Этот случай разобран R. W. Bailey, цит. на стр. 441.

и прямая AB на рис. 352 не может быть применена с достаточной точностью при решении уравнения (b).

Чтобы получить более удовлетворительный результат, нужно воспользоваться кривой OCB на рис. 352. Тогда скорость ползучести надо задать более общим выражением¹⁾

$$\frac{d\varepsilon_{п}}{dt} = f(\sigma, t). \quad (d)$$

Подставив (d) в уравнение (b), получим

$$f(\sigma, t) = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (e)$$

Это уравнение обычно решается последовательным численным интегрированием («шаг за шагом»). Положив $t=0$ и $\sigma = \sigma_0$, вычислим левую часть уравнения (e). Это дает в некотором масштабе начальный угол наклона кривой релаксации напряжений. Используя эту величину, можно вычислить напряжение σ в момент времени $t = \Delta t$. Подставляя это новое напряжение в уравнение (e), получим значение

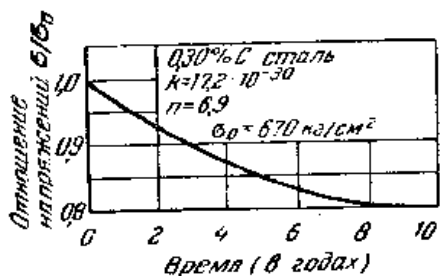


Рис. 357.

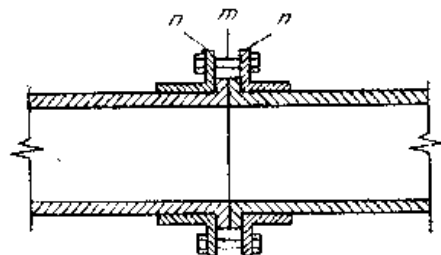


Рис. 358.

угла наклона для момента времени $t = \Delta t$. Вычислим σ для $t = 2\Delta t$ можно сделать следующий шаг, и процесс продолжается. Вычисления, сделанные Поповым, показали, что, следуя этому приему, можно получить кривую релаксации напряжений, которая удовлетворительно согласуется с опытами.

В предыдущем изложении предполагалось, что концы болта были абсолютно неподвижны; но на практике обычно имеется некоторая податливость в закреплениях концов, которая должна быть принята во внимание при вычислении кривых релаксации напряжений. На рис. 358

показано соединение труб при помощи болтов, подверженное высокой температуре. При затяжке фланцев n болтами m будет иметь место упругая деформация. При релаксации эта деформация уменьшается и длина болта увеличивается. Пусть $\beta\sigma/E$ представляет упругую деформацию двух фланцев (на единицу длины между фланцами), вызванную напряжением σ в болтах¹⁾. Тогда при релаксации мы получим вместо уравнения (a) следующее уравнение:

$$\varepsilon_{пб} + \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\beta(\sigma_0 - \sigma)}{E} - \varepsilon_{пф}. \quad (f)$$

Последние два члена правой части этого уравнения представляют относительное удлинение болта при релаксации вследствие упругого и пластического изменения расстояния между фланцами. Окончательное уравнение (f) можно написать в следующем виде:

$$\varepsilon_{пб} + \varepsilon_{пф} = \frac{(1 + \beta)(\sigma_0 - \sigma)}{E}.$$

Дифференцируя по t , мы получаем

$$\frac{d\varepsilon_{пб}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{пф}}{dt} = -\frac{1 + \beta}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (g)$$

Для скорости ползучести болта мы опять используем выражение (d). Подобное же выражение можно применить и для скорости ползучести фланцев. Тогда уравнение (g) будет иметь тот же вид, что и уравнение (e), и его можно решить, пользуясь последовательным численным интегрированием. Тогда мы найдем, что благодаря упругости закрепленных концов постепенное уменьшение напряжений в болте происходит гораздо медленнее, чем в случае неподвижных концов.

94. Ползучесть при сложном напряженном состоянии

Было проведено лишь несколько опытов, касающихся ползучести под действием сложных напряжений. Р. В. Бэйли²⁾ при комнатной температуре испытывал свинцовые трубы, подверженные внутреннему давлению и сочетанию внутреннего давления с осевой нагрузкой. Свинец имеет низкую точку плавления, и явление ползучести имеет место при комнатной температуре. Он также исследовал свойства стальных труб при 482° С и 549° С для сочетания осевого растяжения

¹⁾ Для вычисления β должна быть исследована упругая деформация фланцев (см. стр. 120).

²⁾ Всемирная конференция по энергетике, Токио, 1929; Engineering, т. 129, стр. 265—266, 327—329 и 772, 1930.

¹⁾ Несколько видов функции $f(\sigma, t)$ разобрано в вышеупомянутой статье Е. П. Попова. Необходимо заметить, что уравнение (a) стр. 438 для ползучести при постоянном напряжении должно быть изменено при изучении релаксации, в которой материал первоначально имеет высокие напряжения и затем ползет при непрерывно уменьшающемся напряжении.

и кручения. Ф. Л. Эверет¹⁾ испытывал стальные трубы, подверженные кручению при высоких температурах. Такого рода испытания имеет некоторые преимущества по сравнению с обычными испытаниями на растяжение, так как пластическое кручение не оказывает влияния на размеры поперечного сечения образца, а небольшие изменения объема из-за колебаний температуры и преобразования структуры не влияют на измеряемый угол закручивания.

При отсутствии дополнительных экспериментальных данных относительно ползучести под действием сложных напряжений необходимо применять результаты испытаний на ползучесть при простом растяжении к решению этих более сложных задач. Такое решение обычно сопровождается допущениями: 1) при пластической деформации на-

правления главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 совпадают с направлениями главных деформаций ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 ; 2) объем материала остается постоянным, так что для малых деформаций имеем

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0, \quad (a)$$

и 3) наибольшие касательные напряжения пропорциональны соответствующим относительным сдвигам. Можно показать, что значения относительного сдвига в плоскостях, делящих пополам углы между главными плоскостями,

будут равны $\epsilon_1 - \epsilon_2$, $\epsilon_2 - \epsilon_3$ и $\epsilon_3 - \epsilon_1$. Этот результат можно получить, если рассмотреть куб (рис. 359), имеющий относительные удлинения ϵ_1 и ϵ_2 в направлениях 1 и 2. Относительный сдвиг γ , соответствующий плоскостям Ob и Oc , найдется из треугольника Oab . Полагая, что $\epsilon_1 > \epsilon_2$, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \epsilon_2}{1 + \epsilon_1},$$

откуда

$$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_2.$$

Подобно этому можно найти относительные сдвиги для двух других плоскостей, делящих пополам углы между главными плоскостями, и тогда предположение 3) принимает следующую форму:

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = b, \quad (b)$$

где b есть функция σ_1 , σ_2 и σ_3 , которая должна быть определена из

¹⁾ Trans. A.S.M.E., т. 53, 1931; Proc. Am. Soc. Test. Mat., т. 39, стр. 215—224, 1939. См. также H. J. Garceau and A. E. Johnson, Engineering, т. 150, 1940.

опытов¹⁾. Из выражений (a) и (b) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_2 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ \epsilon_3 &= \frac{2b}{3} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Эти выражения подобны зависимостям между напряжениями и деформациями в законе Гука (см. т. I, стр. 64), но они отличаются в двух отношениях. Величина $2b/3$ появляется вместо постоянной $1/E$ и множитель $1/2$ заменяет коэффициент Пуассона.

Чтобы применить уравнения (c) к задаче о ползучести при постоянной скорости, разделим эти уравнения на время t . Пользуясь обозначениями v_1 , v_2 и v_3 для главных скоростей ползучести и обозначая множитель, стоящий перед скобками, через m , мы приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= m \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ v_2 &= m \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ v_3 &= m \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Применяя эти уравнения к простому растяжению, где $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, получаем

$$v = m\sigma. \quad (e)$$

Мы уже установили (см. стр. 439), что в результате опытов скорость ползучести в случае простого растяжения при постоянной температуре можно представить удовлетворительно степенной функцией

$$v = k\sigma^n, \quad (f)$$

где k и n — две постоянные материала. Чтобы привести уравнения (e) и (f) к согласованию, мы должны принять

$$m = k\sigma^{n-1}. \quad (g)$$

Чтобы установить вид функции m для общего случая ползучести, представленного уравнениями (d), воспользуемся уравнением (296) стр. 378, которое дает зависимость между условием текучести для пространственного напряженного состояния системы и для простого

¹⁾ Указанные выше три предположения являются в сущности теми же, что были приняты пионерами теории пластичности Барре де-Сен-Венаном, Compt. rend., т. 70, стр. 473, 1870 и М. Леви, там же, стр. 1323.

растяжения. Вводя значение эквивалентного напряжения

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (300)$$

в уравнение (g) вместо σ , получаем

$$m = k\sigma_3^{n-1}$$

Тогда уравнения (d) получаются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ v_2 &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ v_3 &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Для простого растяжения ($\sigma_1 = \sigma = \sigma_3$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) эти уравнения дают

$$v_1 = k\sigma^n, \quad v_2 = v_3 = -\frac{k\sigma^n}{2}. \quad (h)$$

В общем случае выражения (301) позволяют вычислить скорости ползучести v_1 , v_2 и v_3 путем использования значений k и n , полученных из испытаний на растяжение. Подобные формулы были применены различными авторами¹⁾ при решении задач на ползучесть в случаях сложных напряженных состояний.

95. Частные случаи двумерной ползучести

Применим теперь уравнения (301) к исследованию плосконапряженного состояния и предположим, что

$$\sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 > \sigma_2, \quad \sigma_2/\sigma_1 = a.$$

Из выражения (300) получаем

$$\sigma_3 = \sigma_1 \sqrt{1 - a + a^2},$$

и уравнения (301) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= k\sigma_1^n (1 - a + a^2)^{(n-1)/2} (1 - a/2), \\ v_2 &= k\sigma_1^n (1 - a + a^2)^{(n-1)/2} (a - 1/2), \\ v_3 &= -\frac{1}{2} k\sigma_1^n (1 - a + a^2)^{(n-1)/2} (1 + a). \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

¹⁾ F. K. G. Odqvist, *Plasticitetsteori*, Proc. Roy. Swed. Inst. Engrg. Research, 1934; R. W. Bailey, *J. Inst. Mech. Engrs.*, т. 131, стр. 131, 1935; C. R. Soderberg, *Trans. A. S. M. E.*, т. 58, стр. 733—744, 1936.

Видно, что выражения для скоростей ползучести в главных направлениях отличаются от выражений для простого растяжения (уравнения (h) и (g)) лишь числовыми коэффициентами. Величина этих коэффициентов может быть легко вычислена, если известны постоянная k материала и отношение a .

Тонкие трубы. Если даны допускаемые деформации в главных направлениях во время срока службы конструкции, то допускаемое напряжение σ_1 найдется из уравнений (302). Этим путем можно решить такие задачи, как выбор надлежащей толщины тонкой трубы, подверженной внутреннему давлению совместно с осевой силой или крутящим моментом при высоких температурах. Приняв v_1 в направлении по окружности и v_2 в осевом направлении и предположив, что действует только одно внутреннее давление, мы получим $\alpha = 1/2$ и $v_3 = 0$. Тогда не будет ползучести в осевом направлении, но будет только в направлении по окружности.

Это заключение согласуется с результатами опытов со свинцовыми трубами, проделанных Р. В. Бэйли¹⁾.

В случае, когда действует только крутящий момент, главные напряжения численно равны и направлены под углом 45° к оси трубы. В этом случае $\alpha = -1$, и для оценки ползучести по главным направлениям мы получаем

$$v_1 = -v_2 = \frac{3}{2} k\sigma_1^n (3)^{(n-1)/2}.$$

Здесь мы имеем деформацию чистого сдвига без ползучести трубы в осевом направлении. Таким образом, неосевая ползучесть вызывается либо отдельно действующим крутящим моментом, либо отдельно действующим внутренним давлением. Однако когда действуют одновременно давление и крутящий момент, возникает осевая ползучесть. Чтобы оценить ползучесть для этого случая, мы должны определить в каждой частной задаче величины и направления главных напряжений. Тогда уравнения (302) дадут скорости ползучести в главных направлениях. Осевая и окружная скорости ползучести получатся затем из простых геометрических соображений. Для любого направления, взятого под углом φ к направлению v_1 , скорость ползучести будет

$$v = v_1 \cos^2 \varphi + v_2 \sin^2 \varphi.$$

Вычисленные таким образом значения скоростей ползучести удовлетворительно согласуются с опытами.

Толстые трубы. Ранее мы изучили случаи однородного распределения напряжений. В качестве примера действия неоднородных напряжений рассмотрим толстую трубу под действием внутреннего

¹⁾ Цит. на стр. 447.

давления p (рис. 360). Предполагая, что труба находится в плоском деформированном состоянии, получаем, что осевая деформация ϵ_z обращается в нуль, и уравнения (301) дают:

$$\left. \begin{aligned} v_t &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \right], \\ v_r &= k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_z) \right], \\ v_z &= 0 = k\sigma_3^{n-1} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_t - \sigma_r) \right], \end{aligned} \right\} (a)$$

а из последнего уравнения мы заключаем, что

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_r). \quad (b)$$

По условию равновесия элемента, показанного на рис. 360, имеем (см. стр. 174)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r. \quad (c)$$

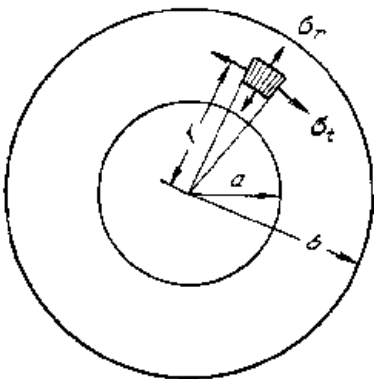


Рис. 360.

Чтобы определить σ_t и σ_r , мы должны рассмотреть деформацию трубы. Обозначая через u радиальные перемещения при расширении трубы, заключаем, что (см. стр. 174)

$$\epsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}$$

и

$$\frac{d\epsilon_t}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{r}(\epsilon_r - \epsilon_t).$$

Предполагая, что состояние ползучести установившееся, получаем путем деления на время

$$\frac{dv_t}{dr} = \frac{1}{r}(v_r - v_t). \quad (d)$$

Подставляя выражения (а) вместо v_t и v_r , получаем дополнительное уравнение для определения главных напряжений. Это уравнение можно значительно упростить при помощи выражения (b). Тогда эквивалентное растягивающее напряжение получается в виде

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_t - \sigma_r),$$

и из выражений (а) мы находим

$$v_t = -v_r = k \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} (\sigma_t - \sigma_r)^n. \quad (e)$$

Тогда уравнение (d) принимает такой вид:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t - \sigma_r)^n = -\frac{2}{r}(\sigma_t - \sigma_r)^n,$$

и мы заключаем, что

$$(\sigma_t - \sigma_r)^n = \frac{C}{r^2}, \quad (f)$$

где C — постоянная интегрирования. Теперь уравнение (c) переходит в

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{C}{r^2} \right)^{1/n};$$

после интегрирования получаем

$$\sigma_r = -\frac{n}{2} C_1 r^{-(2/n)} + C_2, \quad (g)$$

где $C_1 = C^{1/n}$.

Постоянные C_1 и C_2 теперь будут определены из условий на внутренней и наружной поверхностях трубы, откуда

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p = -\frac{n}{2} C_1 a^{-(2/n)} + C_2,$$

$$(\sigma_r)_{r=b} = 0 = -\frac{n}{2} C_1 b^{-(2/n)} + C_2.$$

Из этих уравнений находим

$$C_1 = -\frac{2p}{n(b^{-(2/n)} - a^{-(2/n)})}, \quad C_2 = -\frac{pb^{-(2/n)}}{b^{-(2/n)} - a^{-(2/n)}},$$

и уравнение (g) дает

$$\sigma_r = -p \frac{\left(\frac{b}{r} \right)^{2/n} - 1}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1}. \quad (h)$$

В результате из уравнения (f) получаем

$$\sigma_t = p \frac{1 + \frac{2-n}{n} \left(\frac{b}{r} \right)^{2/n}}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1}. \quad (i)$$

Уравнения (b), (h) и (i) дают напряжения в трубе при условиях установившихся скоростей ползучести. Величины скоростей ползучести получаются по уравнению (e), которое приводит к

$$v_t = -v_r = \frac{1}{2} (3)^{(n+1)/2} k \frac{b^2}{r^2} \left(\frac{1}{n} \right)^n \left[\frac{p}{\left(\frac{b}{a} \right)^{2/n} - 1} \right]^n.$$

При выводе предполагалось, что температура трубы не изменяется с изменением радиуса. В случае теплопередачи через стенки трубы можно поступить подобным же образом¹⁾.

¹⁾ См. Р. В. Бейли, цит. на стр. 447.

В предыдущем изложении было получено простое решение в предположении установившегося состояния ползучести, дающее удовлетворительные результаты при ползучести, которая имеет место после длинного периода действия сил. Если бы мы захотели выяснить, какова ползучесть в результате лишь краткого действия нагрузки, то следует признать, что формулы, выведенные в предположении установившейся ползучести, оказываются здесь неудовлетворительными; мы должны были бы прибегнуть тогда к кривой ползучести по рис. 352, стр. 439. Задача становится сложной, и ползучесть может быть вычислена лишь в процессе последовательных приближений («шаг за шагом»)¹⁾. Такие вычисления показывают, что с увеличением продолжительности действия сил

получаемые результаты приближаются к результатам, найденным при установившейся ползучести. При продолжительности действия, равной, может быть, году или более, оба метода вычислений дают приблизительно одни и те же результаты.

Вращающийся диск. В заключение дадим краткое изложение метода расчета на ползучесть последовательными приближениями для случая вращающегося диска²⁾ (рис. 361). Предполагается, что

переменная толщина z диска мала по сравнению с его радиусом, что напряжения σ_r и σ_t равномерно распределены по толщине, а σ_z обращается в нуль. Таким образом, мы имеем плосконапряженное состояние, и для скоростей ползучести можно воспользоваться уравнениями (302). В этих уравнениях $\alpha = \sigma_r/\sigma_t$ теперь является функцией r , т. е. $\alpha = \varphi(r)$. Предполагая, что ползучесть установившаяся и опять обозначая радиальные перемещения через u , мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_t &= \frac{u}{r} = v_r t = kt \sigma_t^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \\ \epsilon_r &= \frac{du}{dr} = v_r t = kt \sigma_t^n (1 - \alpha + \alpha^2)^{(n-1)/2} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Условием равновесия элемента, заштрихованного на рис. 361, а (см. стр. 180), будет

$$\frac{d}{dr}(rz\sigma_r) - z\sigma_t + \frac{\gamma\omega^2 r^2 z}{g} = 0,$$

¹⁾ Примеры таких вычислений даны в статье С. R. Soderberg'a, цит. на стр. 441. См. также статью L. F. Coffin'a, Jr., P. R. Shepler'a and G. S. Cherniak'a, J. Appl. Mech., т. 16, стр. 229, 1949.

²⁾ См. Р. В. Бейли, цит. на стр. 447. См. также Е. П. Попов, докторская диссертация, Стенфордский университет, 1946.

и интегрированием мы получим

$$rz\sigma_r - (rz\sigma_r)_{r=a} = \int_a^r \sigma_t z dr - \frac{\gamma\omega^2}{g} \int_a^r r^2 z dr. \quad (k)$$

Видно, что если известно распределение напряжений σ_t , то значение σ_r для любого значения r можно вычислить по уравнению (k) при условии, что также даны $(\sigma_r)_{r=a}$ и z как функция r .

Применяя метод последовательных приближений, мы начнем с предположения, что σ_t равномерно распределены по диаметральному сечению диска, показанному штриховкой на рис. 361, б. Это среднее значение σ_t получается из уравнения (k) интегрированием от $r=a$ до $r=b$ и дает в первом приближении

$$(\sigma_t)_1 = \frac{1}{F} \left[(rz\sigma_r)_{r=b} - (rz\sigma_r)_{r=a} + \frac{\gamma\omega^2 J}{g} \right], \quad (l)$$

где

$$F = \int_a^b z dr, \quad J = \int_a^b r^2 z dr.$$

Величины $(rz\sigma_r)_{r=b}$ и $(rz\sigma_r)_{r=a}$ можно получить легко в каждом частном случае, так как силы, действующие на внутренней и наружной поверхностях диска, известны.

Имея $(\sigma_t)_1$ из уравнения (l), мы вычисляем σ_r как функцию r из уравнения (k) и получаем первое приближение для отношения

$$\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_t}\right)_1 = \alpha_1 = \varphi_1(r).$$

По этим значениям α_1 первое приближение для оценки ползучести получается из первого из уравнений (1), которое дает

$$\left(\frac{u}{r}\right)_1 = kt (z_t)_1^n (1 - \alpha_1 + \alpha_1^2)^{(n-1)/2} \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right). \quad (m)$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем отношение двух уравнений (1)

$$\frac{du}{dr} \frac{r}{u} = \frac{2\alpha_1 - 1}{2 - \alpha_1} = \psi_1(r). \quad (n)$$

Значение $\psi_1(r)$ можно легко вычислить, так как $\alpha_1 = \varphi_1(r)$ уже известно. Тогда из уравнения (n) мы получим

$$\frac{du}{u} = r^{-1} \psi_1(r) dr$$

и интегрированием находим

$$\frac{u}{r} = \frac{(u)_{r=a}}{r} e^{\int_a^r r^{-1} \psi_1(r) dr}.$$

Подставляя в уравнение (m) это значение вместо $(u/r)_1$, получим второе приближение для σ_t

$$(\sigma_t)_2 = \frac{(u)_{r=a}}{r} \frac{e^{\int_a^r r^{-1} \psi_1(r) dr}}{kt (1 - \alpha_1 + \alpha_1^2)^{(n-1)/2} (1 - \alpha_1/2)}. \quad (o)$$

Постоянная $(u)_{r=a}$ найдется из уравнения статики, подобного уравнению (1), что дает

$$\int_a^b (\sigma_r)_2 z dr = (rz\sigma_r)_{r=b} - (rz\sigma_r)_{r=a} + \frac{\gamma \omega^2 J}{g}.$$

Когда $(u)_{r=a}$ найдется из этого уравнения, величина $(\sigma_r)_2$ будет вполне определена, и, поступая по-прежнему, мы найдем вторые приближения $(\sigma_r)_2$, α_2 , $\psi_2(r)$ и $(u/r)_2$ и т. д.

Практика показывает, что процесс быстро сходится, и второе приближение дает удовлетворительные результаты для напряжений и деформаций ползуности. Все вычисления удобно выполнять в табличной форме. После вычисления $(\sigma_r)_1$ по уравнению (1), мы разделим расстояние от $r=a$ до $r=b$, скажем, на десять равных частей. Пользуясь уравнением (к) и интегрированием «шаг за шагом», можно составить таблицу значений $(\sigma_r)_1$. Имея эти значения, можно вычислить величины α_1 и ψ_1 для каждого значения r , и приготовить таблицу значений u/r . По этим значениям и при помощи уравнения (о) можно для таблицы вычислить значения $(\sigma_r)_2$ и т. д.

96. Рабочие напряжения

Общие соображения. Вопрос о выборе надлежащего коэффициента безопасности при проектировании сооружений и частей машины имеет первостепенное практическое значение. Если этот коэффициент принят слишком низким, и рабочие напряжения слишком высоки, то конструкция в условиях службы может оказаться слабой. С другой стороны, если рабочие напряжения слишком низки, то конструкция получается излишне тяжелой и неэкономичной.

Для выявления различных факторов, учитываемых при выборе рабочих напряжений, возьмем простой пример растяжения призматического стержня. Допустим, что за основание для определения рабочего напряжения принят предел текучести материала; тогда безопасная площадь F поперечного сечения получится из уравнения

$$\frac{\sigma_T}{k} = \frac{P}{F}. \quad (a)$$

Мы видим, что площадь поперечного сечения зависит от величины внешней нагрузки, от предела текучести материала σ_T и от коэффициента безопасности k . Очевидно, величина этого коэффициента, который иногда называется *коэффициентом незнания*, зависит от точности, с которой мы знаем внешнюю нагрузку и механические свойства материала, и от точности, с которой это уравнение определяет наибольшее напряжение.

Есть случаи, когда внешние усилия известны с большой точностью. Например, мы знаем точно гидростатическое давление, действующее на плотину, если известна глубина воды. Мы знаем точно центробежные силы, действующие в роторе, имеющем определенную угловую скорость. Но в большинстве случаев силы известны лишь приблизительно, и наиболее неблагоприятное условие нагружения

для конструкции может быть установлено лишь на основании длительного опыта. Рассмотрим, например, расчет моста. Вес самого моста и вес движущегося по мосту поезда могут быть известны с достаточной точностью. Но при проектировании моста необходимо принять во внимание динамические влияния. Из-за наличия противоресов давление колеса паровоза на рельс непостоянно, и наибольшее давление больше статического. Под действием движущихся и меняющихся по величине нагрузок мост будет приведен в состояние колебаний, а при таких условиях задача определения усилий в отдельных стержнях моста становится чрезвычайно сложной. Другой тип действующих на мост сил, которых мы не знаем точно, это — давление ветра. Величина этих сил обычно устанавливается на основании наблюдений над существующими сооружениями. Из этих рассуждений ясно видно, что если выражение (а) и представляет условие безопасности элемента моста, то неизвестная точно сила P может быть определена лишь с некоторым приближением. Естественно, точность, с которой может быть сделано это определение, будет влиять на величину коэффициента безопасности.

Величина предела текучести σ_T также неизвестна точно. Она может меняться в некоторых пределах для разных образцов из одного и того же материала, а эти изменения зависят от степени однородности материала. Поэтому совершенно естественно, что в случае таких однородных материалов, как сталь, коэффициент безопасности может быть взят более низким, чем в случае таких материалов, как дерево или камень.

При выборе коэффициента безопасности необходимо также учитывать точность самой формулы. Уравнение (а) можно считать очень точным для вычисления напряжений в образце при испытании на растяжение (см. рис. 255, стр. 327), поскольку особые меры предосторожности принимаются для того, чтобы приложить нагрузку центрально и распределить ее равномерно по наиболее слабому поперечному сечению. Но, взяв опять в качестве иллюстрации расчет элемента мостовой фермы моста, можем сказать, что уравнение (а) есть лишь грубое приближение, связанное обычно с допущением, что в узлах имеются идеальные шарниры. Действительное напряженное состояние в таком стержне очень далеко от простого растяжения. Благодаря жестким узловым соединениям стержни мостовой фермы испытывают не только напряжения растяжения или сжатия, но и напряжения изгиба. Соответствующие напряжения от изгиба достигают иногда значительной величины, и если их не принимают во внимание, а для определения площади поперечного сечения пользуются уравнением (а), то неточность уравнения (а) в этом случае обычно компенсируется увеличением коэффициента безопасности.

Из этих рассуждений можно видеть, насколько трудно дать какие-либо определенные указания относительно величины коэффициента

безопасности. Выбор коэффициента всегда зависит от опыта и суждения конструктора.

В последующем изложении будем предполагать, что величины действующих сил установлены опытом и что механические свойства материала известны. Следовательно, дополнительно надо изучить методы оценки влияния различного рода напряженных состояний на выбор рабочих напряжений. Будем считать, что инженер должен так проектировать конструкцию, чтобы во всех ее частях был равный коэффициент безопасности. Очевидно, это требование необходимо всегда выполнять, чтобы проект был экономичным, поскольку несущая способность конструкции определяется сопротивлением ее наиболее слабого места.

Рабочие напряжения для статических условий. Начнем с рассмотрения рабочих напряжений для статических условий, например для случая, когда конструкция подвергается действию постоянной (или почти постоянной) нагрузки. Будем различать два рода материалов: *пластичные материалы*, главным образом различного рода строительные стали, и *хрупкие материалы*, такие, как чугун, камни и бетон.

В случае *пластичных материалов* за основание для выбора рабочих напряжений обычно принимается предел текучести σ_T , так как большие деформации, которые имеют место при текучести, недопустимы в инженерных конструкциях. Если известен у материала предел текучести σ_T , коэффициент безопасности при простом растяжении или сжатии будет ¹⁾

$$k = \sigma_T / [\sigma]. \quad (b)$$

Допускаемое напряжение $[\sigma]$, принимаемое за номинальное, вычисляется при помощи выражения (a). Концентрация напряжений, вызываемая отверстиями или выточками, обычно не учитывается на том основании, что благодаря пластической деформации напряжения стремятся выравниваться в местах наибольших напряжений. Такое предположение справедливо лишь до тех пор, пока нагрузки приложены статически. В случае ударного действия нужно учитывать свойства хрупкости стержней, имеющих глубокие выточки и резкие изменения поперечного сечения (см. стр. 362).

Для общего случая однородного распределения напряжений воспользуемся эквивалентным напряжением, определяемым по формуле (300), стр. 450, а коэффициент безопасности найдем из условия

$$k = \frac{\sigma_T}{[\sigma_3]}. \quad (c)$$

¹⁾ Здесь предполагается, что σ_T один и тот же при растяжении и сжатии. Для материалов, которые не имеют ясно выраженного предела текучести, растягивающее напряжение, при котором остаточная деформация достигает значения 0,2%, обычно принимается за σ_T .

Для плосконапряженного состояния, используя обозначение $\sigma_2/\sigma_1 = \alpha$, получим

$$k = \frac{\sigma_T}{[\sigma_3] \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}. \quad (d)$$

В частном случае чистого сдвига $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$, $\alpha = -1$ находим

$$k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3} [\tau]}. \quad (e)$$

В случае неоднородного распределения напряжений, как, например, при изгибе или кручении, мы должны принять во внимание то обстоятельство, что начало текучести в области наибольших напряжений не влечет за собой большой деформации всей конструкции. Чтобы получить большую деформацию, эквивалентную деформации призматического стержня при растягивающем напряжении, равном σ_T , мы должны принять более высокие нагрузки, чем те, при которых σ_{\max} достигает значения σ_T . Возьмем, например, изгиб прямоугольной балки. При нагружении балки, если наибольшее напряжение в полках, наиболее удаленных от нейтральной оси, достигает значения σ_T , опасной пластической деформации балки не происходит. Чтобы получить условия, эквивалентные наблюдаемым в стержне, растянутым напряжением σ_T , мы должны приложить изгибающий момент, на 50% больший того, при котором σ_{\max} только достигает значения σ_T (см. стр. 290). Принимая во внимание этот факт, запишем уравнение для вычисления *коэффициента безопасности при изгибе* в таком виде:

$$k = \frac{\beta \sigma_T}{[\sigma]}, \quad (f)$$

где β — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Он равен 1,5 для прямоугольных балок, 1,3 — для тонкостенных круглых труб ($d_{\text{вн}}/d_{\text{нар}} = 0,95$) и зависит от размеров поперечного сечения в случае двутавровых балок (см. стр. 290).

Подобные соображения применимы также в случае *кручения*; уравнение для коэффициента безопасности в этом случае будет

$$k = \frac{\beta_1 \sigma_T}{\sqrt{3} [\tau]}. \quad (g)$$

Для сплошных круглых валов $\beta_1 = 1,33$ (см. стр. 318). Для тонких круглых труб β_1 приближается к значению единица, и формула (g) совпадает с формулой (e).

Для случая совместного действия однородных нормальных и касательных напряжений иногда вместо формулы (d) применяется формула (298), стр. 378. Это дает

$$k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}. \quad (h)$$

При выводе формулы для k в случае одновременного действия изгиба и кручения мы должны видоизменить формулу (h) таким же образом, как это сделано при выводе формул (f) и (g). Тогда получим

$$k = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\beta}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{\beta_1}\right)^2}} \quad (i)$$

Если τ обращается в нуль, то эта формула совпадает с формулой (f); если же нормальное напряжение обращается в нуль, то она совпадает с формулой (g).

В вышеприведенных рассуждениях предполагалось, что принцип наложения сохраняет свою силу; это означает, что наибольшее напряжение пропорционально нагрузке. Следовательно, коэффициент k , который применялся при определении рабочего напряжения, должен быть также связан и с внешней нагрузкой. Тогда мы можем утверждать, что текучесть в конструкции начинается под действием нагрузки, которая в k раз больше действительно безопасной нагрузки. Если принцип наложения несправедлив, то необходимо отнести коэффициент безопасности лишь к нагрузке и определить размеры конструкции из условия, что текучесть начинается, если только действующая нагрузка увеличится в k раз. Применение этого приема к случаю одновременного действия изгиба и растяжения — сжатия было рассмотрено в п. 4 (см. стр. 33). Этот метод рекомендуется также для расчета колонн на основе предполагаемых неточностей (т. I, стр. 232).

В случае *хрупких материалов* за основание для выбора рабочих напряжений берется предел прочности при растяжении и сжатии. При этом должны быть приняты во внимание местные наибольшие напряжения, которые имеют место у выточек и отверстий. Номинальные напряжения, полученные из элементарных формул, должны быть умножены на теоретический коэффициент концентрации напряжений¹⁾. Опыты с чугуном не показывают ослабляющего влияния выточек и отверстий так резко, как указывает теоретический коэффициент. Причина этого кроется в неоднородном характере чугуна. Различные включения и трещины, которые всегда имеют место в чугуне, увеличивают напряжения, но дополнительные наибольшие напряжения, обусловленные выточками и отверстиями, не понижают существенно прочности материала. Введение коэффициентов концентрации напряжений при проектировании чугунных конструкций оправдывается как компенсация понижения сопротивления материала незначительным толчкам, так как возможность возникновения напряжений от удара при перевозке и установке всегда должна быть предусмотрена. Тогда формулы для вычисления коэффициентов безопасности при растяжении и

¹⁾ О коэффициентах концентрации напряжений в различных случаях см. гл. 8. См. также книгу Р. Е. Петерсона, цит. на стр. 253.

сжатия будут

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\alpha_k [\sigma]_{\text{раст}}}, \quad k = \frac{\sigma_{\text{пр.сж}}}{\alpha_k [\sigma]_{\text{сж}}}, \quad (j)$$

в которых $\sigma_{\text{пр.раст}}$ и $\sigma_{\text{пр.сж}}$ — пределы прочности соответственно при растяжении и сжатии. Эти формулы можно также применять и для изгиба.

Для случая *сложного напряженного состояния* в хрупких материалах воспользуемся теорией Мора (см. стр. 380). Если σ_{max} и σ_{min} оба одного и того же знака, то при вычислении k мы должны применять формулы (j). Если σ_{max} и σ_{min} противоположных знаков, применим формулу (h) стр. 382. Обозначая $\sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{max}}$ через α , получим

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\text{max}})_{\text{дч}} &= \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}}, \\ (\sigma_{\text{min}})_{\text{дч}} &= \frac{\alpha \sigma_{\text{пр.раст}}}{1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Для чистого сдвига $\sigma_{\text{max}} = -\sigma_{\text{min}} = \tau$, $\alpha = -1$ и формулы (k) дают

$$\tau_{\text{дч}} = \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{1 + \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}}$$

Тогда коэффициент безопасности для кручения будет

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\alpha_{k_1} [\tau] \left(1 + \frac{\sigma_{\text{пр.раст}}}{\sigma_{\text{пр.сж}}}\right)}, \quad (l)$$

где α_{k_1} есть теоретический коэффициент концентрации напряжений при кручении.

Когда действуют одновременно нормальное и касательное напряжения, как в случае сочетания изгиба и кручения, мы имеем (см. т. I, стр. 251)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \frac{1}{2} \left[\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2} \right], \\ \sigma_{\text{min}} &= \frac{1}{2} \left[\alpha_k \sigma - \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2} \right], \quad \alpha = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}}, \end{aligned}$$

где α_k и α_{k_1} — теоретические коэффициенты концентрации напряжений для изгиба и кручения. Теперь, пользуясь предельными значениями (формулы (k)) для тех же напряжений, получаем коэффициенты безопасности для главных растягивающего и сжимающего

напряжений

$$k = \frac{2\sigma_{\text{пч.раст}}}{[\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2}] \left[1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пч.раст}}}{\sigma_{\text{пч.сж}}} \right]},$$

$$k = \frac{2\alpha \sigma_{\text{пч.раст}}}{[\alpha_k \sigma - \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2}] \left[1 - \alpha \frac{\sigma_{\text{пч.раст}}}{\sigma_{\text{пч.сж}}} \right]} \quad (m)$$

Если $\tau = 0$, то эти формулы совпадают с формулами (j), а если $\sigma = 0$, то мы получаем формулу (l).

Рабочие напряжения для переменных нагрузок. В случае переменных нагрузок за основание для определения коэффициента безопасности принимают значение предела выносливости σ_r материала. Начиная с рассмотрения пластичных материалов, примем для одноосных напряженных состояний формулу

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_{\text{кд}} [\sigma]} \quad (n)$$

Так как концентрация напряжений имеет большое влияние на усталостную прочность пластичных материалов, то в формулу (n) вводится коэффициент $\alpha_{\text{кд}}$. Этот коэффициент несколько меньше, чем теоретический коэффициент концентрации напряжений (см. стр. 413), и может быть получен из результатов испытаний на усталость, приведенных на рис. 327, или может быть вычислен при помощи кривых, представленных на рис. 328.

В случае плосконапряженного состояния предельное значение наибольшего напряжения будет (см. стр. 401).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \quad (o)$$

Пользуясь этим выражением, находим для кручения ($\alpha = -1$)

$$k = \frac{\sigma_r}{\sqrt{3} \alpha_{\text{кд}} [\tau]} \quad (p)$$

где $\alpha'_{\text{кд}}$ получается из испытаний на усталость при кручении или из кривых, представленных на рис. 328. В случае одновременного действия изгиба и кручения получаем

$$k = \frac{\sigma_r}{\sqrt{(\alpha_{\text{кд}} \sigma)^2 + 3(\alpha'_{\text{кд}} \tau)^2}} \quad (q)$$

Для $\sigma = 0$ эта формула совпадает с формулой (p), а для $\tau = 0$ она совпадает с формулой (n).

Для хрупких материалов существуют лишь скудные экспериментальные сведения. Для того чтобы конструкция была в безопасном состоянии, обычно в формулах для вычисления коэффициента без-

опасности применяются полные теоретические коэффициенты концентрации напряжений. Для одноосных напряженных состояний мы в этом случае имеем

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_k [\sigma]} \quad (r)$$

Для кручения, пользуясь теорией Мора, получаем

$$k = \frac{\sigma_r}{\alpha_{k_1} [\tau] \left(1 + \alpha \frac{\sigma_{\text{пч.раст}}}{\sigma_{\text{пч.сж}}} \right)} \quad (s)$$

Для одновременного действия изгиба и кручения мы имеем

$$k = \frac{2\sigma_r}{[\alpha_k \sigma + \sqrt{(\alpha_k \sigma)^2 + 4(\alpha_{k_1} \tau)^2}] \left[1 + \alpha \frac{\sigma_{\text{пч.раст}}}{\sigma_{\text{пч.сж}}} \right]} \quad (t)$$

где α есть отношение наименьшей амплитуды двух главных напряжений к наибольшей.

Сочетание переменных и постоянных напряжений. Предельные напряженные состояния в таких случаях определяются кривыми, показанными на рис. 315 и 316.

В дальнейшем обсуждении мы ограничим наше внимание случаем, в котором циклы напряжений накладываются на постоянное растягивающее напряжение. Этот случай, вероятно, один из чаще всего встречающихся в практических приложениях, и в нашем распоряжении имеется достаточное количество экспериментальных сведений.

Начнем со случая *пластичных материалов*; предельные состояния для образцов из стали, содержащей 0,7% углерода, без концентрации напряжений представлены кривыми B_1C_1A и D_1F_1A на рис. 362. Точкой A определено напряжение $\sigma_{\text{пч.раст}}$. Кривые B_1C_1A и D_1F_1A полу-

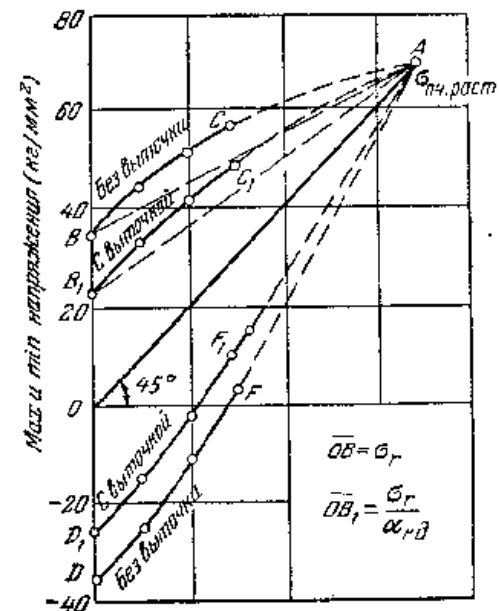


Рис. 362.

видно, что благодаря концентрации напряжений диапазон напряжений несколько уменьшается, в то время как среднее напряжение остается неизменным. На основе

таких экспериментальных данных в практике проектирования машин установлено применение коэффициента концентрации напряжений к переменным составляющим напряжений, но не к постоянным.

Также обычно заменяют на практике кривые B_1C_1A и B_1C_1A прямыми, показанными пунктиром на рис. 362. Для дальнейшего обсуждения мы можем тогда воспользоваться треугольниками OBA и OB_1A по рис. 363, в котором абсциссы дают постоянные составляющие напряжения σ_m , а ординаты дают переменные составляющие σ_a . Так

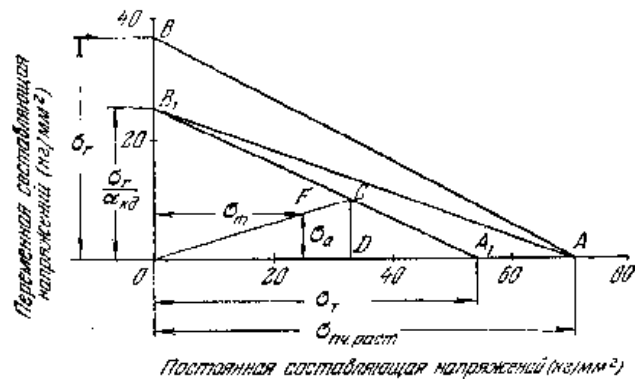


Рис. 363.

как для постоянного напряжения и пластичных материалов напряжение σ_T было ранее принято за основание для выбора допускаемых напряжений, заменяем точку A точкой A_1 , имеющей абсциссой τ_r . Линией B_1A_1 пользуются, чтобы определить предельное напряженное состояние для образца с концентрацией напряжений¹⁾. Если постоянное напряжение на образце задано абсциссой OD (рис. 363), то предельная амплитуда для переменного напряжения дается ординатой DC , и точка C будет представлять предельное напряженное состояние. Соответствующее безопасное состояние будет представлено точкой F с координатами σ_m и σ_a . Эти координаты получаются путем деления координат точки C на коэффициент безопасности k . Из подобия треугольников OB_1A_1 и DCA_1 мы имеем

$$\frac{\overline{CD}}{\sigma_r \alpha_{кл}} = \frac{\overline{DA_1}}{\sigma_r} = \frac{\sigma_r - \overline{OD}}{\sigma_r}$$

или

$$\frac{\overline{CD}}{\sigma_r \alpha_{кл}} + \frac{\overline{OD}}{\sigma_r} = 1.$$

1) Эта поправка ведет к увеличению безопасности.

Разделив это уравнение на k , получим для безопасного напряженного состояния (точка F)

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_r \alpha_{кл}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} = \frac{1}{k}$$

или

$$k = \frac{1}{\alpha_{кл} \frac{\sigma_a}{\sigma_r} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r}} \quad (u)$$

Это — выражение для коэффициента безопасности в случае одноосных напряженных состояний с концентрацией напряжений¹⁾.

В случае сложного напряженного состояния в формулу (u) вместо σ_a и σ_m нужно подставить²⁾ эквивалентные напряжения. Тогда для плоского напряженного состояния получим

$$k = \frac{1}{\left[\alpha_{кл} \frac{(\sigma_1)_a}{\sigma_r} + \frac{(\sigma_1)_m}{\sigma_r} \right] \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \quad (v)$$

Применяя это выражение к случаю кручения, имеем $\sigma_1 = \tau$, $\alpha = -1$, и пользуясь $\alpha'_{кл}$ вместо $\alpha_{кл}$, получаем

$$k = \frac{1}{\sqrt{3} \left(\alpha'_{кл} \frac{\tau_a}{\sigma_r} + \frac{\tau_m}{\sigma_r} \right)} \quad (w)$$

Для одновременного действия изгиба и кручения коэффициент безопасности получится из формулы

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(\alpha_{кл} \frac{\sigma_a}{\sigma_r} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 + 3 \left(\alpha'_{кл} \frac{\tau_a}{\sigma_r} + \frac{\tau_m}{\sigma_r} \right)^2}} \quad (x)$$

Если действует только один изгиб, то τ_a и τ_m обращаются в нуль, и формула совпадает с (u). Когда σ_a и σ_m обращаются в нуль, и формула совпадает с (w). Когда σ_m и τ_m обращаются в нуль, мы имеем симметричный цикл напряжений, и формула совпадает с формулой (q)³⁾.

Для хрупких материалов имеется немного экспериментальных сведений относительно совместного действия сложных переменных и

1) Так как мы рассматриваем здесь разрушения от усталости, которые происходят без пластической деформации, то можем также пользоваться формулой (u) для изгиба, не вводя коэффициента β , который был применен в формуле (f). Вид формулы (u) для k был предложен С. R. Soderberg'ом, Trans. A.S.M.E., т. 52, APR 52-2, 1930.

2) Предполагается, что отношения $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ остаются постоянными при действии переменных напряжений.

3) Формула (x) применяется также в случаях, где отношение главных напряжений σ_1 / σ_2 изменяется на протяжении цикла.

постоянных напряжений. Вводя $\sigma_{пл.раст}$ вместо σ_r и пользуясь теоретическими коэффициентами концентрации α_k и α_{k_1} вместо уменьшенных коэффициентов α_{kd} и α'_{kd} , для одноосного напряженного состояния получим

$$k = \frac{1}{\alpha_k \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_r} + \frac{\sigma_m}{\sigma_{пл.раст}} \right)} \quad (y)$$

Для кручения, пользуясь теорией Мора, находим

$$k = \frac{1}{\alpha_{k_1} \left(\frac{\tau_a}{\sigma_r} + \frac{\tau_m}{\sigma_{пл.раст}} \right) \left(1 + \frac{\sigma_{пл.раст}}{\sigma_{пл.сж}} \right)} \quad (z)$$

В предыдущем изложении предполагалось, что размеры конструкции определяются только из условий прочности. Иногда имеются дополнительные требования, которые должны учитываться при проектировании. Встречаются задачи, для решения которых заранее предписывается предельная деформация, принимаемая за основу при определении размеров. Деформация имеет большое значение в том случае, когда надо учитывать колебания системы. Валы должны иногда удовлетворять требованиям относительно величины угла закручивания на единицу длины.

Проектирование конструкций, подверженных действию высоких температур, должно основываться на предположении об определенной продолжительности срока службы конструкции и определенной величине деформации, которую можно считать допустимой. Рабочие напряжения выбираются так, чтобы деформация конструкции в течение срока ее службы не превосходила определенного предела, зависящего от типа конструкции (см. п. 91).

При проектировании гибких стержней и тонкостенных конструкций, выбирая рабочие напряжения, нужно рассматривать вопрос об упругой устойчивости (см. гл. V).

Проведенное здесь обсуждение позволяет видеть, что выбор рабочих напряжений представляет очень важную и в то же время очень сложную задачу. При установлении коэффициента безопасности k проектировщик должен всегда руководствоваться опытом прошлого. Приведенный анализ, дающий сравнение рабочих напряжений для различных напряженных состояний, не имеет целью заменить использование имеющегося опыта, но он может быть полезным при истолковании этого опыта и при подходе к такому способу проектирования, когда все части конструкции будут одинаково прочными. Полезным может он быть также при сравнении различных проектов и сопоставлении прочности существующих конструкций. Исследование на этой же теоретической основе действительных случаев разрушений является весьма полезным для получения более глубоких знаний о

Механические свойства сталей (напряжения в кг/мм²)

Источники	Химич. состав в %	Термообработка	Предел прочности	Предел текучести	Предел прочности	Относительное удлинение в % <i>l</i> = 50,8 мм	Относительное сужение в %	Предел выносливости	Примечания	РАБОЧЕЕ НАПРЯЖЕНИЕ	
										1	2
1	C = 0,37 Mn = 0,55	Отжиг 850° С * Нормализация 850° С Закалка 850° С в воде; отпуск 550° С	25,5	26,5	49,0	32	49	±20,1	Стержень диаметром 57,2 мм	±28,7	±31,0
			26,5	29,0	55,7	29	46	±20,5			
			45,5	48,0	73,5	22	56	±35,7			
2	C = 0,49 Mn = 0,46	Нормализация 910° С Закалка 790° С в масле; отпуск 430° С	31,4	33,0	64,3	27	40	±23,1	Стержень квадратного сечения 25,2 мм	±44,8	±33,2
			53,0	55,4	85,6	11,3	51	±36,4			
1	C = 0,35 Mn = 0,45 Ni = 3,4	Прокатка Отжиг 840° С Нормализация 840° С; от- пуск 730° С Закалка 800° С в воде; отпуск 600° С	33,0	42,2	73,5	21	42	±28,7	Плита 1067 × 610 × × 50,8 мм	±31,0	±33,2
			36,5	42,2	73,1	22	49	±31,0			
			36,5	39,4	66,0	25	48	±33,2			
			50,5	54,1	75,2	23	56				

Методы	Химич. состав в %	Термообработка	Предел прочности	Предел текучести	Предел прочности	Относительный удлинение в % l = 50,8 мм	Относительное сужение в %	Предел выносливости	Примечания
2	C = 0,24	Отжиг 780° C Закалка 830° C в масле	40,0	42,2	61,2	33	67	±34,3	Образцы 50,8 X 25,4 мм
	Mn = 0,37 Ni = 3,3 Cr = 0,87		80,5	90,0	97,0	18	62	±47,5	
3	C = 0,30	Воздушная закалка 800° C	31,5	124	171	10,8	37	±71,5	Образец диаметром 28,6 мм
	Mn = 0,56 Ni = 4,3 Cr = 1,4		64,5	99,8	110	17,5	55	±56,0	
1	C = 0,32	Литье	14,0	23,6	53,0	26	34	±21,3	Образцы 57,2 X 31,8 мм
	Mn = 0,74		26,0	29,0	56,0	27	40	±24,5	
	Si = 0,32		28,5	32,8	59,5	28	46	±24,5	

Источники: 1 - Исследовательская лаборатория фирмы «Westinghouse». См. С. Тимошенко и Дж. М. Лес-селле, Прикладная теория упругости; русский перевод, стр. 342, 1924.

2 - H. F. Moore and T. J. Asper, Технический бюллетень Иллинойского университета, № 136, стр. 33.

3 - E. Atchison, Технические стали, стр. 209, 1921.

сопротивлении конструкций¹⁾. Сопоставляя анализ разрушений с теоретическими исследованиями распределения напряжений и с лабораторными исследованиями прочности материалов при различных напряженных состояниях, мы получаем возможность накопить более достоверные знания о действительной прочности конструкций. При наличии таких знаний мы сможем значительно улучшить существующие технические нормы для рабочих напряжений в различных отраслях инженерного дела. Это, без сомнения, повлечет за собой экономию материала и большую надежность сооружений и машин.

¹⁾ В этом отношении такие опубликованные труды, как Technical Reports, British Engine, Boiler, El. Insurance Co. представляют большое практическое значение.