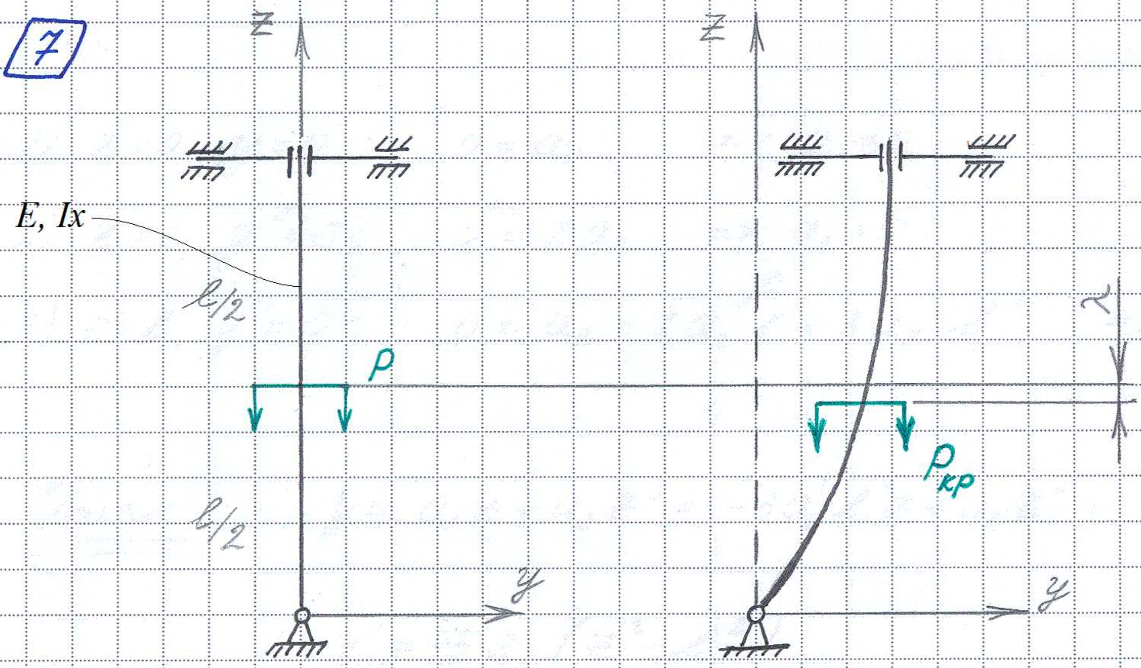
7



Расчётная схема

Форма потери устойчивости (состояние безразличного равновесия)

Г.У:

1) $z=0,\ y=0$

2) $z=0,\ y''=0$

3) $z=l,\ y'=0$

4) $z=l,\ y'''=0$

$y'' \sim M_{изг.}$

$y''' \sim Q_y$

Упругую ось стойки задаём полиномом $y(z)$, коэффициенты которого находятся из граничных условий (ГУ) для полинома.

Чем больше ГУ учтём, тем выше будет точность результата, степень полинома и объём вычислений. Наиболее важны ГУ с низкими степенями производных. Учтём первые три ГУ, соответственно полином $y(z)$ возьмём третьей степени:

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3$$

$$y' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot z + 3 \cdot a_3 \cdot z^2$$

$$y'' = 2a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot z$$

ГУ:

1) $z=0,\ y=0:\quad 0=a_0 \quad\Rightarrow a_0=0$

2) $z=0,\ y''=0:\quad 0=2a_2 \quad\Rightarrow a_2=0$

3) $z=\ell,\ y'=0:\quad 0=a_1+2\cancel{a_2}^{\,0}\cdot\ell+3a_3\cdot\ell^2 \quad\Rightarrow a_1=-3\cdot a_3\cdot\ell^2$

<u>Итак:</u> $y=a_1z+a_3z^3=-3a_3\ell^2z+a_3z^3=a_3\left(z^3-3\cdot\ell^2\cdot z\right)$

кубическая парабола и линейная зависимость

$$y'=3a_3\left(z^2-\ell^2\right)$$

$$y''=6\cdot a_3\cdot z$$

Роль неопределённого множителя (амплитуды формы потери устойчивости) здесь играет a_3.

<u>Числитель:</u>

$$\int_0^\ell EJ_x\left(y''\right)^2dz=\int_0^\ell EJ_x\left(6za_3\right)^2dz=36\cdot a_3^2EJ_x\frac{z^3}{3}\Big|_0^\ell=12\cdot a_3^2\cdot E\cdot J_x\cdot\ell^3$$

<u>Знаменатель:</u>

$$\int_0^{\ell_0}\left(y'\right)^2dz=\int_0^{\ell/2}\left[3a_3\left(z^2-\ell^2\right)\right]^2dz=9\cdot a_3^2\cdot\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(z^4-2z^2\ell^2+\ell^4\right)dz=$$

$$=9\cdot a_3^2\cdot\left(\frac{z^5}{5}-2\ell^2\frac{z^3}{3}+\ell^4z\right)\Big|_0^{\frac{\ell}{2}}=9a_3^2\ell^5\left(\frac{1}{32\cdot5}-\frac{2}{8\cdot3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$\approx 3{,}806\cdot a_3^2\cdot\ell^5$$

Значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{12 \cdot \cancel{a_3^2} \cdot E \cdot J_x \cdot l^3}{3{,}806 \cdot \cancel{a_3^2} \cdot l^5} = 3{,}153 \frac{EJ_x}{l^2} \approx \frac{\pi^2 E J_x}{(1{,}769 \cdot l)^2}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{3{,}153}} \approx 1{,}769$$

Сравнить с точным решением (пример $\boxed{3}$).

Там $\mu = 1{,}826$. $\Delta \approx 3{,}1\%$

▼

Замечание:

$\Delta = 2\%$

Ещё более точное значение $P_{кр}$ ($\mu = 1{,}788$) можно получить, используя не три, а все четыре ГУ и полином четвёртой степени:

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + a_4 \cdot z^4$$

Как видим, коэффициент μ, вычисленный энергетическим методом всегда меньше, либо равен точному значению. Следовательно, в большинстве случаев энергетический метод даёт завышенное значение критической нагрузки $P_{кр}$ и никогда - заниженный.

Объясняется это тем, что, задаваясь приближённой формой упругой линии мы, как-бы, дополнительно отклоняем стержень от точной формы, увеличивая U, Дополнение: решение той же задачи с полиномом $4^{\underline{ой}}$ степени.

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 \cdot z^3 + a_4 \cdot z^4$$

$$y' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3$$

$$y'' = 2a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot z + 12 a_4 z^2$$

$$y''' = 6a_3 + 24 a_4 z$$

<u>Г.У.:</u>

1) $z=0,\ y=0:\ 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

2) $z=0,\ y''=0:\ 0 = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

3) $z=l,\ y'=0:\ 0 = a_1 + \cancel{2a_2 l} + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3$

4) $z=l,\ y'''=0:\ 0 = 6 \cdot a_3 + 24 \cdot a_4 \cdot l$

$$\left.\begin{aligned} &0 = a_1 + \cancel{2a_2 l} + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 \\ &0 = 6 \cdot a_3 + 24 \cdot a_4 \cdot l \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_1 &= 8 a_4 l^3 \\ a_3 &= -4 \cdot a_4 \cdot l \end{aligned}$$

<u>Итак:</u>

$$y = \cancel{a_0} + a_1 \cdot z + \cancel{a_2 z^2} + a_3 z^3 + a_4 z^4 = a_4 (8l^3 z - 4l z^3 + z^4)$$

$$y' = 4a_4 (z^3 - 3l z^2 + 2l^3)$$

$$y'' = 12 a_4 (z^2 - 2l z)$$

$$y''' = 24 a_4 (z - l)$$

Числитель:

$$\int_0^l EJ_x (y'')^2 dz = \int_0^l 144\, EJ_x \cdot a_4^2 \cdot (z^2 - 2lz)^2 dz =$$

$$= 144 \cdot EJ_x a_4^2 \cdot \int_0^l (z^4 - 4lz^3 + 4l^2 z^2) dz =$$

$$= 144\, EJ_x a_4^2 \cdot \left[\frac{z^5}{5}\Big|_0^l - 4l \frac{z^4}{4}\Big|_0^l + 4l^2 \frac{z^3}{3}\Big|_0^l \right] =$$

$$= 144\, EJ_x a_4^2 l^5 \left[\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right] =$$

$$= \frac{384}{5} EJ_x a_4^2 l^5$$

Знаменатель:

$$\int_0^{l_0} (y')^2 dz = \int_0^{l/2} 16 \cdot a_4^2 \cdot (z^3 - 3lz^2 + 2l^3)^2 dz =$$

$$= 16 \cdot a_4^2 \cdot \int_0^{l/2} \left[z^6 - 6lz^5 + 9l^2 z^4 + 4l^3 z^3 - 12 l^4 z^2 + 4l^6 \right] dz$$

$$= 16 a_4^2 \cdot \left[\frac{z^7}{7}\Big|_0^{l/2} - l z^6\Big|_0^{l/2} + \frac{9}{5} l^2 z^5\Big|_0^{l/2} + l^3 z^4\Big|_0^{l/2} - 4l^4 z^3\Big|_0^{l/2} + 4l^6 z\Big|_0^{l/2} \right] =$$

$$= 16 a_4^2 l^7 \left[\frac{1}{896} - \frac{1}{64} + \frac{9}{160} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 2 \right]$$

$$= 16 \cdot a_4^2 l^7 \left[\frac{160 - 2240 + 896 + 8960 - 71680 + 286720}{143360} \right] =$$

$$= \frac{3565056}{143360} a_4^2 l^7 =$$

$$= \frac{6963}{280} \cdot a_4^2 l^7$$

Значение критической силы:

$$P_{кр} = \frac{384}{5} E J_x \cancel{a_4^2} \cancel{\ell^5} \cdot \frac{280}{6963 \cdot \cancel{a_4^2} \ell^{\cancel{7}2}} \approx 3{,}088 \frac{E J_x}{\ell^2} =$$

$$= \frac{\pi^2 E J_x}{(1{,}788 \cdot \ell)^2}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{3{,}088}} \approx 1{,}788$$

$$\mu_{точное} = 1{,}826$$

$$\Delta \approx 2\%$$