

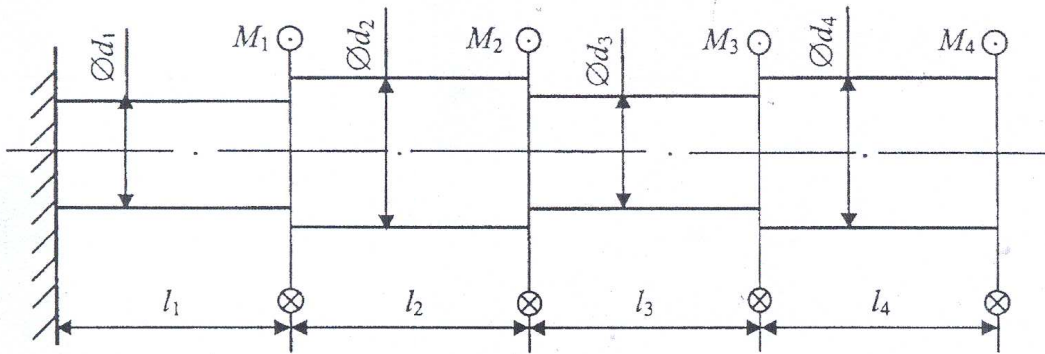
Пример решения домашнего задания:

Для заданной системы требуется:

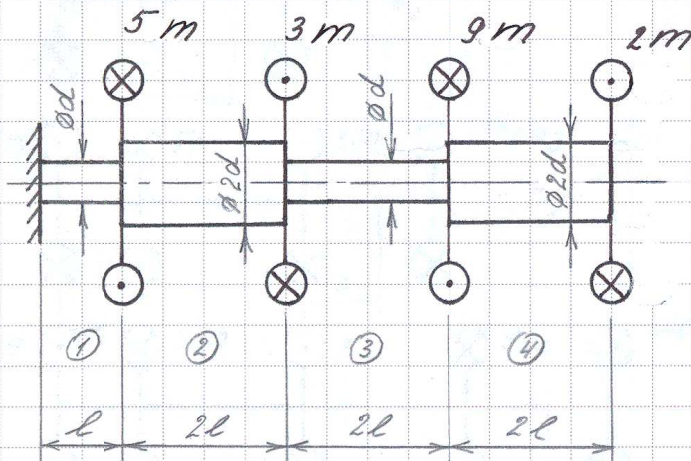
1. Начертить вал в масштабе. Расставить крутящие моменты в соответствии с заданием.
2. Построить эпюры крутящих моментов, наибольших касательных напряжений, угловых перемещений (в общем виде). Вычислить угол поворота свободного сечения и коэффициент запаса прочности вала по пределу текучести.
3. Определить работу внешних сил и потенциальную энергию деформации бруса.

Дано: $d=20$ мм, $l=160$ мм, $m=50$ Н·м, $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа, Сталь 10 $\tau_T=137$ МПа; Сталь 20 $\tau_T=157$ МПа; Сталь 30 $\tau_T=167$ МПа; Сталь 35 $\tau_T=186$ МПа; Сталь 45 $\tau_T=216$ МПа.

Handwritten notes:
 1) - мс
 2) - формула
 4) - коэффициент



№	l_1	l_2	l_3	l_4	d_1	d_2	d_3	d_4	M_1	M_2	M_3	M_4	материал
30	l	$2l$	$2l$	$2l$	d	$2d$	d	$2d$	$-5m$	$3m$	$-9m$	$2m$	Сталь 45



① $J_{x_1} = J_{p_1} = \frac{\pi d^4}{32} = J$
 $W_{x_1} = W_{p_1} = \frac{\pi d^3}{16} = W$

② $J_{p_2} = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2} = 16J$
 $W_{p_2} = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2} = 8W$

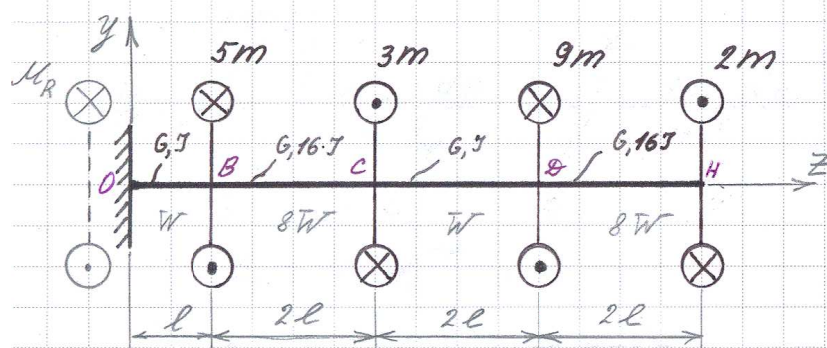
③ $J_{p_3} = J$
 $W_{p_3} = W$

④ $J_{p_4} = 16J$
 $W_{p_4} = 8W$

$J = \frac{\pi d^4}{32}$; $W = \frac{\pi d^3}{32}$

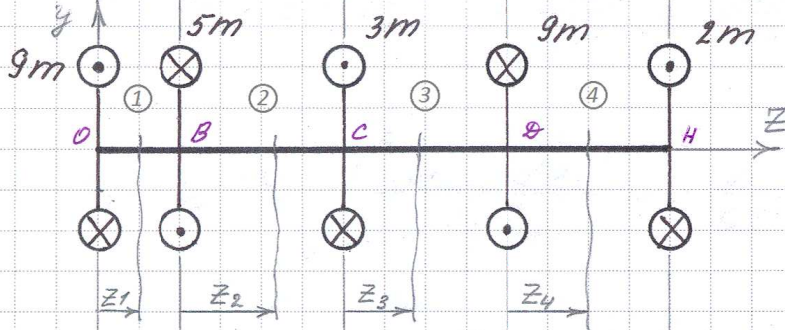
$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W = \frac{\pi d^3}{16}$$



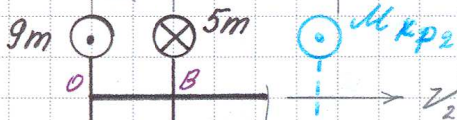
$$\sum M_z = 0 = -M_R - 5m + 3m - 9m + 2m$$

$$M_R = -9m$$



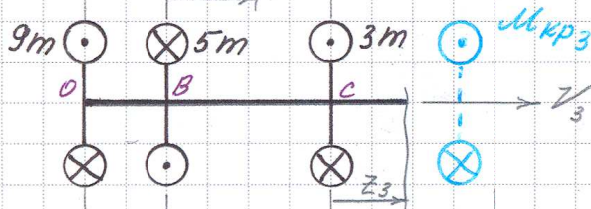
$$\sum M_H = 0 = M_{kp1} + 9m$$

$$M_{kp1} = -9m$$



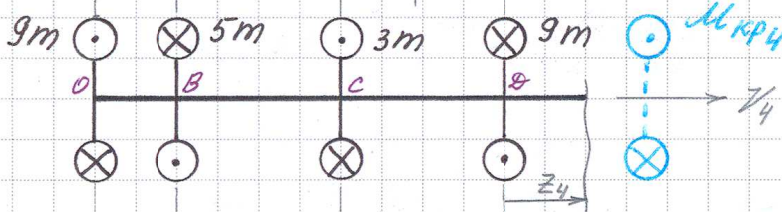
$$\sum M_C = 0 = 9m - 5m + M_{kp2}$$

$$M_{kp2} = -4m$$



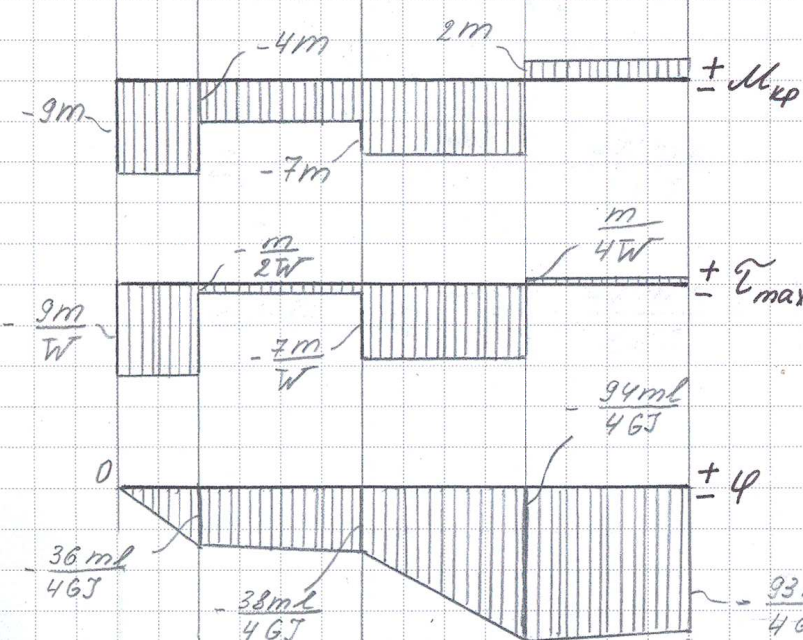
$$\sum M_D = 0 = 9m - 5m + 3m + M_{kp3}$$

$$M_{kp3} = -7m$$



$$\sum M_H = 0 = 9m - 5m + 3m - 9m + M_{kp4}$$

$$M_{kp4} = 2m$$



$$\tau_{max1} = \frac{M_{kp1}}{W_{p1}} = -\frac{9m}{W}$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_{kp2}}{W_{p2}} = -\frac{4m}{8W} = -\frac{m}{2W}$$

$$\tau_{max3} = \frac{M_{kp3}}{W_{p3}} = -\frac{7m}{W}$$

$$\tau_{max4} = \frac{M_{kp4}}{W_{p4}} = \frac{2m}{8W} = +\frac{m}{4W}$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \int_0^{z_1} \frac{M_{кр1} dz_1}{G_1 J_{к1}} = - \int_0^{z_1} \frac{9m \cdot dz_1}{GJ} = - \frac{9m}{GJ} z_1$$

$$z_1 = 0: \varphi_1^{нар.} = 0$$

$$z_1 = l: \varphi_1^{кон} = - \frac{9ml}{GJ} = - \frac{36ml}{4GJ}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1^{кон} + \int_0^{z_2} \frac{M_{кр2} dz_2}{G_2 J_{к2}} = - \frac{9ml}{GJ} + \int_0^{z_2} \frac{(-4m) \cdot dz_2}{G \cdot 16J} = - \frac{9ml}{GJ} - \frac{m}{4GJ} z_2$$

$$z_2 = 0: \varphi_2^{нар.} = - \frac{9ml}{GJ} = - \frac{36ml}{4GJ}$$

$$z_2 = 2l: \varphi_2^{кон} = - \frac{9ml}{GJ} - \frac{2ml}{4GJ} = - \frac{19ml}{2GJ} = - \frac{38ml}{4GJ}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2^{кон} + \int_0^{z_3} \frac{M_{кр3} dz_3}{G_3 J_{к3}} = - \frac{19ml}{2GJ} - \int_0^{z_3} \frac{7m \cdot dz_3}{GJ} = - \frac{19ml}{2GJ} - \frac{7m}{GJ} z_3$$

$$z_3 = 0: \varphi_3^{нар.} = - \frac{19ml}{2GJ} = - \frac{38ml}{4GJ}$$

$$z_3 = 2l: \varphi_3^{кон} = - \frac{19ml}{2GJ} - \frac{14ml}{GJ} = - \frac{47ml}{2GJ} = - \frac{94ml}{4GJ}$$

$$\varphi_4 = \varphi_3^{кон} + \int_0^{z_4} \frac{M_{кр4} dz_4}{G_4 J_{к4}} = - \frac{47ml}{2GJ} + \int_0^{z_4} \frac{2m dz_4}{G \cdot 16J} = - \frac{47ml}{2GJ} + \frac{m}{8GJ} z_4$$

$$z_4 = 0: \varphi_4^{нар.} = - \frac{47ml}{2GJ} = - \frac{94ml}{4GJ}$$

$$z_4 = 2l: \varphi_4^{кон} = - \frac{47ml}{2GJ} + \frac{2ml}{8GJ} = - \frac{94ml}{4GJ} + \frac{1ml}{4GJ} = - \frac{93ml}{4GJ}$$

Работа внешних моментов:

$$\begin{aligned} A &= \sum_j \frac{1}{2} M_j \varphi_j = \frac{1}{2} M_0 \varphi_0 + \frac{1}{2} M_B \varphi_B + \frac{1}{2} M_C \varphi_C + \frac{1}{2} M_D \varphi_D + \frac{1}{2} M_H \varphi_H \\ &= \frac{1}{2} 9m \cdot 0 + \frac{1}{2} (-5m) \left(-\frac{36ml}{4GJ} \right) + \frac{1}{2} 3m \left(-\frac{38ml}{4GJ} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (-9m) \left(-\frac{94ml}{4GJ} \right) + \frac{1}{2} 2m \left(-\frac{93ml}{4GJ} \right) = \\ &= \frac{m^2 l}{8GJ} \cdot \left[\underbrace{5 \cdot 36}_{180} - \underbrace{3 \cdot 38}_{-114} + \underbrace{9 \cdot 94}_{846} - \underbrace{2 \cdot 93}_{-186} \right] = \frac{726}{8} \cdot \frac{m^2 l}{GJ} = \frac{363}{4} \cdot \frac{m^2 l}{GJ} \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации:

$$\begin{aligned} U &= \sum_i \frac{M_{кр i}^2 \cdot l_i}{2 G_i J_{к i}} = \frac{M_{кр 1}^2 \cdot l_1}{2 G_1 J_{к 1}} + \frac{M_{кр 2}^2 \cdot l_2}{2 G_2 J_{к 2}} + \frac{M_{кр 3}^2 \cdot l_3}{2 G_3 J_{к 3}} + \frac{M_{кр 4}^2 \cdot l_4}{2 G_4 J_{к 4}} = \\ &= \frac{(-9m)^2 \cdot l}{2 GJ} + \frac{(-4m)^2 \cdot 2l}{2 \cdot G \cdot 16 \cdot J} + \frac{(-7m)^2 \cdot 2l}{2 \cdot G \cdot J} + \frac{(2m)^2 \cdot 2l}{2 \cdot G \cdot 16 \cdot J} = \\ &= \frac{m^2 l}{2 GJ} \left[81 + \frac{16}{16} \cdot 2 + 49 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 2}{16} \right] = \frac{m^2 l}{4 GJ} [162 + 4 + 196 + 1] = \\ &= \frac{363}{4} \cdot \frac{m^2 l}{GJ} \end{aligned}$$

$$A = U$$

Максимальное напряжение:

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \max(|\tau_{\max_1}|, |\tau_{\max_2}|, |\tau_{\max_3}|, |\tau_{\max_4}|) = \\ &= \frac{9m}{W} = \frac{16 \cdot 9 \cdot m}{\pi \cdot d^3} = \frac{144 \cdot 50}{\pi \cdot 0,02^3} = \\ &= 286478897,6 \text{ Па} \approx 286 \cdot 10^6 \text{ Па} = 286 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Коэффициент запаса прочности:

$$\eta = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{216}{286} = 0,755 < 1 \Rightarrow \text{конструкция неработоспособна!}$$

Угол поворота свободного сечения (сечение G):

$$\varphi_G = - \frac{93}{4} \cdot \frac{m \cdot l}{GJ} = - \frac{93}{4} \cdot \frac{50 \cdot 0,160 \cdot 32}{0,810 \cdot \pi \cdot 0,02^4} = 0,148 \text{ рад} = 8^\circ 28'$$