

Дано: $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

$l = 0,1 \text{ м}$

$a = 5 \text{ мм}$

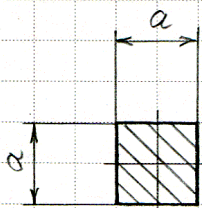
$M = 8 \text{ Н·м}$

Определить: момент X, при котором $\varphi_c = -2 \cdot \varphi_H$

Для найденного значения X подсчитать работу внешних моментов A и потенциальную энергию деформации U стержня.

Решение

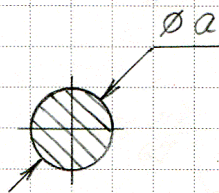
Геометрические характеристики всех поперечных сечений стержня выразим через какую-то одну величину:



$\alpha = 0,208 ; \beta = 0,141 ;$

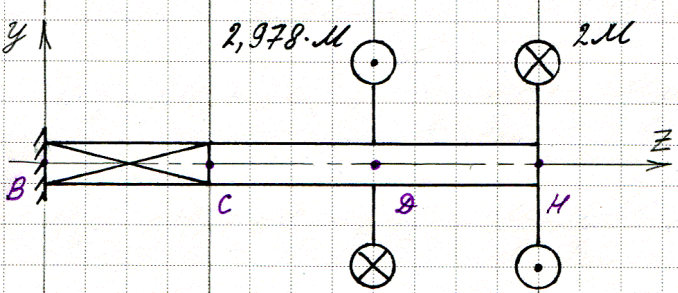
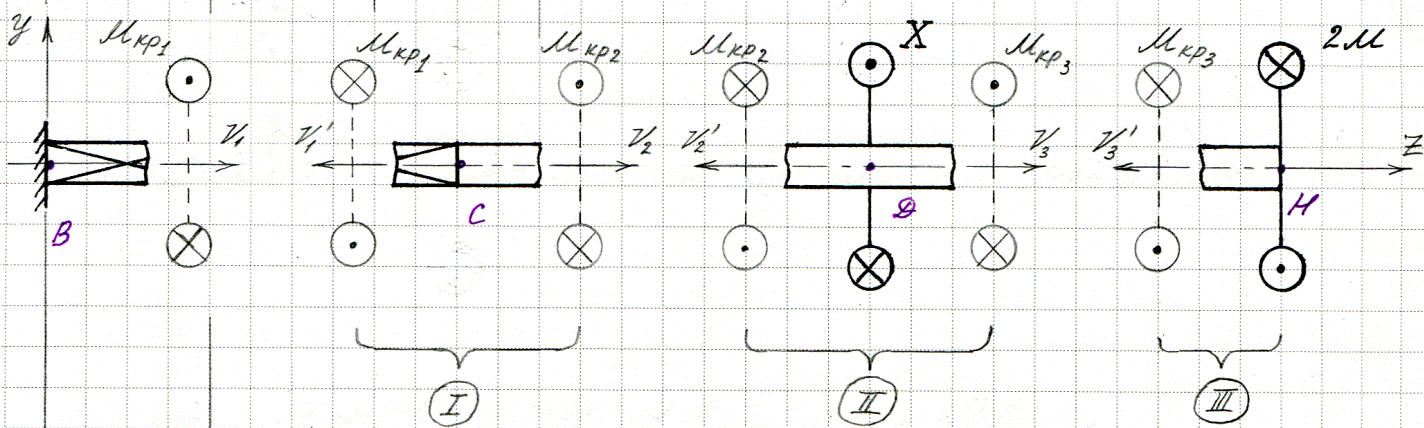
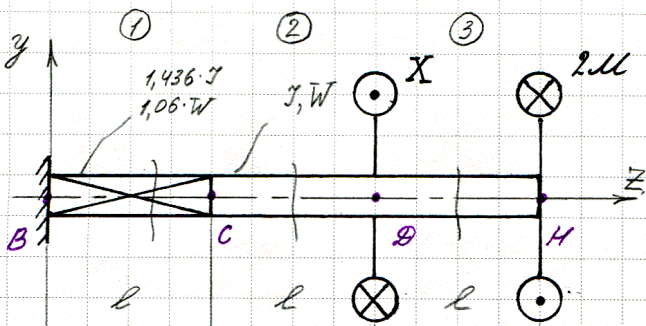
$W_k = 0,208 \cdot a^3 = 1,06 \cdot W$

$J_k = 0,141 \cdot a^4 = 1,436 \cdot J$



$W_k = W_p = \frac{\pi a^3}{16} = 0,1963 \cdot a^3 \stackrel{\Delta}{=} W$

$J_k = J_p = \frac{\pi a^4}{32} = 0,09817 \cdot a^4 \stackrel{\Delta}{=} J$



Уравнения статического равновесия отсечённых частей:

$$\text{I: } \sum M_z = 0 = -M_{кр1} + M_{кр2} \quad (1)$$

$$\text{II: } \sum M_z = 0 = -M_{кр2} + X + M_{кр3} \quad (2)$$

$$\text{III: } \sum M_z = 0 = -M_{кр3} - 2M \quad (3)$$

Откуда: $M_{кр1} = X - 2M = 0,978M$

$M_{кр2} = X - 2M = 0,978M$

$M_{кр3} = -2M$

Дополнительное условие:

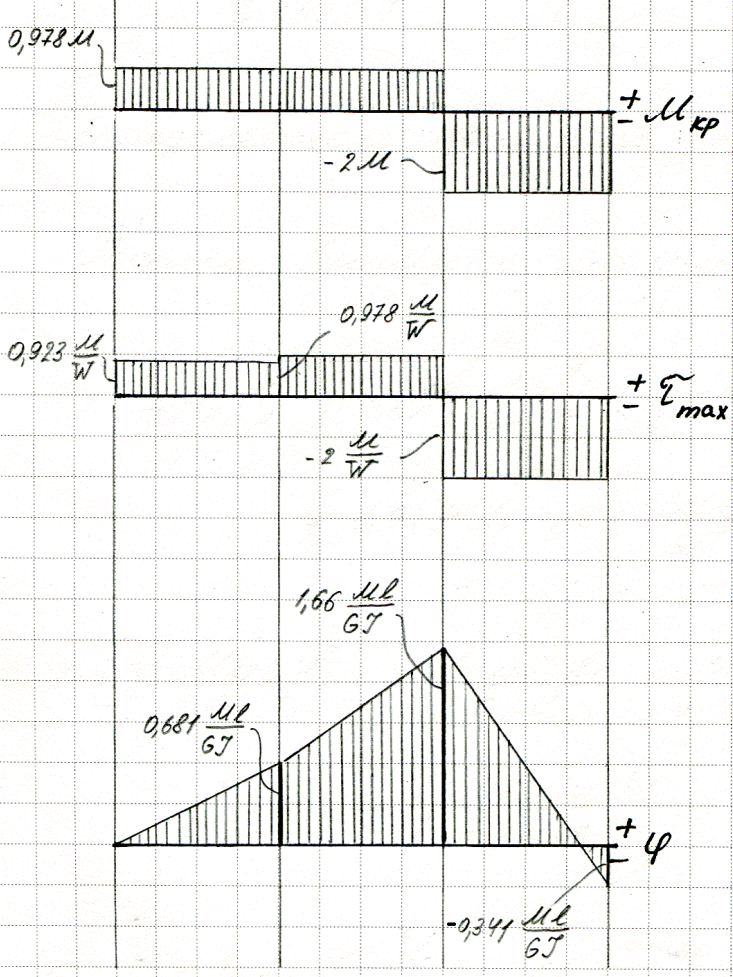
$$\varphi_c = -2 \cdot \varphi_0$$

$$\Delta \varphi_1 = -2 (\delta \varphi_1 + \delta \varphi_2 + \delta \varphi_3)$$

$$\frac{M_{кр1} l_1}{G_1 J_{кр1}} = -2 \left[\frac{M_{кр1} l_1}{G_1 J_{кр1}} + \frac{M_{кр1} l_2}{G_2 J_{кр2}} + \frac{M_{кр3} l_3}{G_3 J_{кр3}} \right]$$

$$\frac{(X-2M)l}{G \cdot 1,436 J} = -2 \left[\frac{(X-2M)l}{G \cdot 1,436 J} + \frac{(X-2M) \cdot l}{G \cdot J} - \frac{2Ml}{GJ} \right]$$

$$X = 2,978 \cdot M$$



Максимальные касательные напряжения в конструкции:

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_{кр1}}{W_{к1}} = \frac{0,978 \cdot \text{М}}{1,06 \cdot W} = 0,923 \frac{\text{М}}{W}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{кр2}}{W_{к2}} = \frac{0,978 \text{ М}}{W} = 0,978 \frac{\text{М}}{W}$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{M_{кр3}}{W_{к3}} = - \frac{2 \text{ М}}{W}$$

Углы поворота поперечных сечений на границах участков:

$$\varphi_B = 0 //$$

$$\varphi_C = \Delta \varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{к1}} = \frac{0,978 \cdot \text{М} \cdot l}{G \cdot 1,436 \cdot J} = 0,681 \frac{\text{М} \cdot l}{GJ} //$$

$$\varphi_D = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{к1}} + \frac{M_{кр2} \cdot l_2}{G_2 \cdot J_{к2}} = \frac{0,978 \cdot \text{М} \cdot l}{G \cdot 1,436 \cdot J} + \frac{0,978 \text{ М} \cdot l}{G \cdot J} = 1,66 \frac{\text{М} \cdot l}{GJ} //$$

$$\begin{aligned} \varphi_H &= \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 + \Delta \varphi_3 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G_1 \cdot J_{к1}} + \frac{M_{кр2} \cdot l_2}{G_2 \cdot J_{к2}} + \frac{M_{кр3} \cdot l_3}{G_3 \cdot J_{к3}} = \\ &= \frac{0,978 \cdot \text{М} \cdot l}{G \cdot 1,436 \cdot J} + \frac{0,978 \cdot \text{М} \cdot l}{G \cdot J} - \frac{2 \text{ М} \cdot l}{G \cdot J} = -0,341 \frac{\text{М} \cdot l}{GJ} // \end{aligned}$$

Распределённой нагрузки нет \Rightarrow по участкам φ меняется линейно.

Работа внешних моментов $\overset{A}{V}$ и потенциальная энергия V :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^4 M_j \cdot \varphi_j = \frac{1}{2} M_B \cdot \varphi_B + \frac{1}{2} M_C \cdot \varphi_C + \frac{1}{2} M_D \cdot \varphi_D + \frac{1}{2} M_H \cdot \varphi_H = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2,978 \cdot \text{М} \cdot 1,66 \cdot \frac{\text{М} \cdot l}{GJ} + \frac{1}{2} \cdot (-2 \text{ М}) \cdot \left(-0,341 \frac{\text{М} \cdot l}{GJ} \right) = 2,81 \frac{\text{М}^2 \cdot l}{GJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{M_{крi}^2 \cdot l_i}{2 \cdot G_i \cdot J_{ки}} = \frac{M_{кр1}^2 \cdot l_1}{2 \cdot G_1 \cdot J_{к1}} + \frac{M_{кр2}^2 \cdot l_2}{2 \cdot G_2 \cdot J_{к2}} + \frac{M_{кр3}^2 \cdot l_3}{2 \cdot G_3 \cdot J_{к3}} = \\ &= \frac{(0,978 \cdot \text{М})^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot 1,436 \cdot J} + \frac{(0,978 \cdot \text{М})^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J} + \frac{(2 \text{ М})^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J} = 2,81 \frac{\text{М}^2 \cdot l}{GJ} \end{aligned}$$

$$A \approx V = 2,81 \cdot \frac{\text{М}^2 \cdot l}{GJ} = 2,81 \cdot \frac{\text{М}^2 \cdot l}{G \cdot 0,09817 \cdot d^4} = 28,6 \cdot \frac{8^2 \cdot 0,1}{0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,005^4} = 3,7 \text{ Дж.}$$