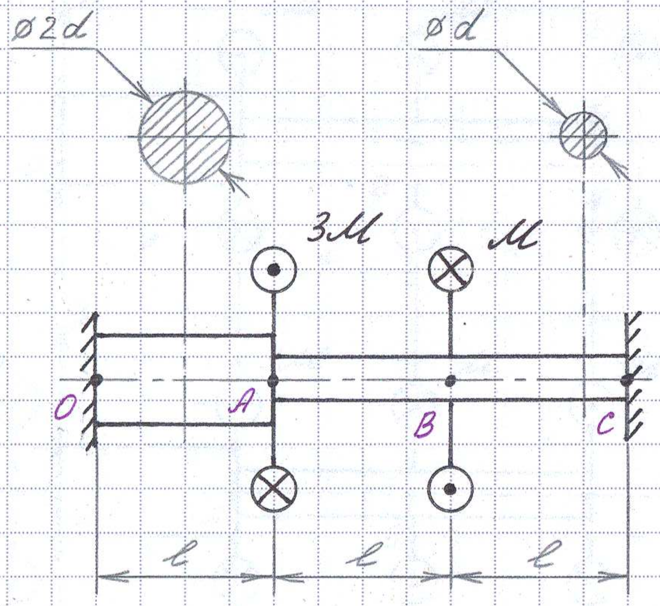


Дано: $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа

$l = 15$ см

$d = 10$ мм

$\tau_т = 150$ МПа

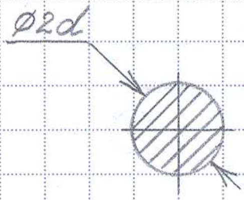
Определить: 1) $M_{кр}$, τ_{max}, φ

2) Участок стержня, на котором появятся первые пластические деформации;

3) Значение параметра нагрузки M, соответствующего появлению первых пластических деформаций: $M_т$.

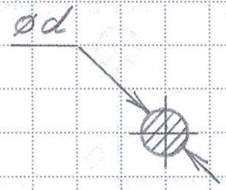
Решение

Геометрические характеристики всех поперечных сечений выражаем через какую-то одну величину:



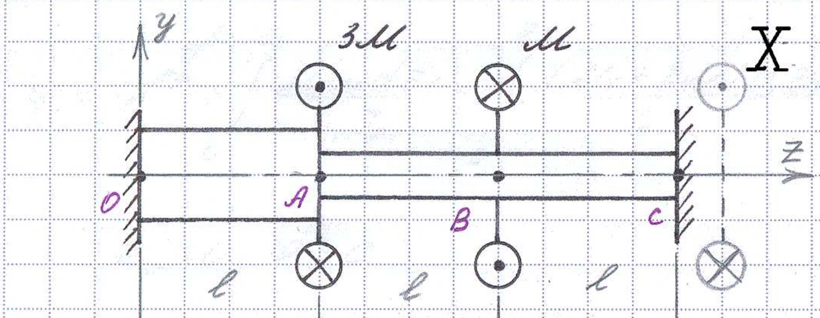
$$W_к = W_р = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2} \triangleq W$$

$$J_к = J_р = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2} \triangleq J$$

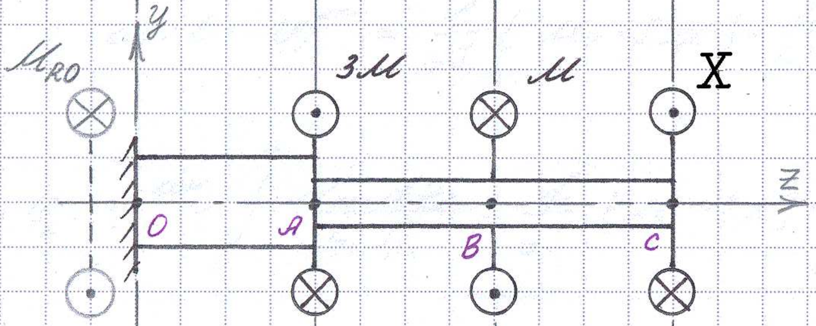


$$W_к = W_р = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{W}{8}$$

$$J_к = J_р = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{J}{16}$$

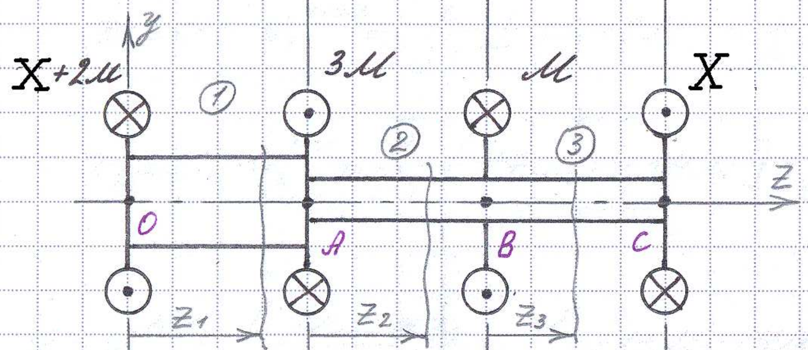


$M_{RC} \overset{\Delta}{=} X = \frac{14}{33}M$



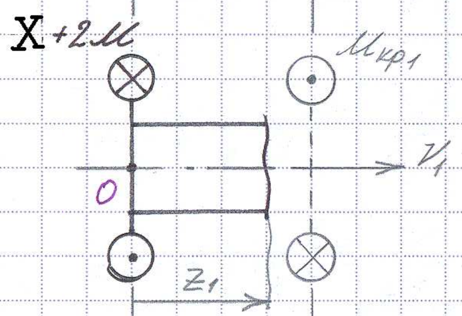
$\sum M_z = 0 = -M_{R0} + 3M - M + X$

$M_{R0} = X + 2M = \frac{14}{33}M + 2M = \frac{80}{33}M$



$\sum M_{V_1} = 0 = -(X + 2M) + M_{кр1}$

$M_{кр1} = X + 2M = \frac{14}{33}M + 2M = \frac{80}{33}M$

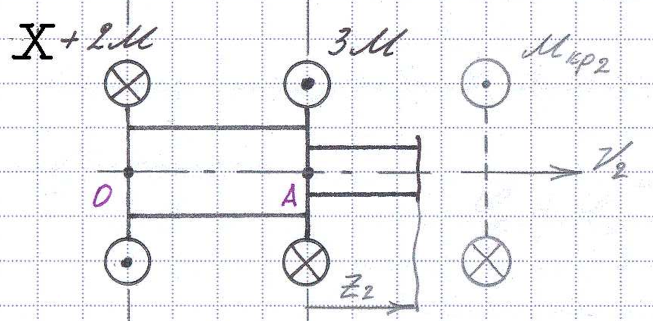


$\sum M_{V_2} = 0 = -(X + 2M) + 3M + M_{кр2}$

$M_{кр2} = X - M = \frac{14}{33}M - M = -\frac{19}{33}M$

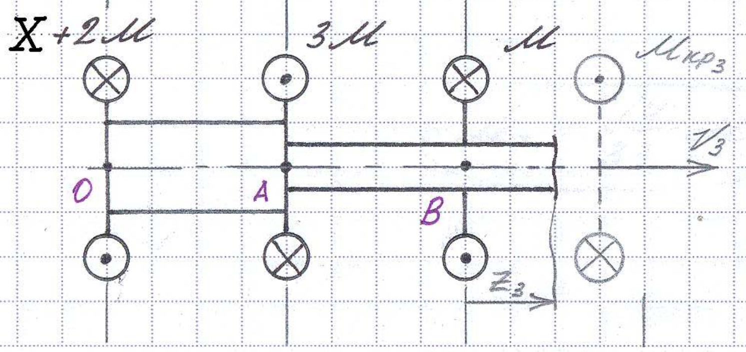
$\sum M_{V_3} = 0 = -(X + 2M) + 3M - M + M_{кр3}$

$M_{кр3} = X = \frac{14}{33}M$



$\tau_{max_1} = \frac{M_{кр1}}{W_{p1}} = \frac{X + 2M}{W} = \frac{\frac{14}{33}M + 2M}{W} =$

$= \frac{80}{33}\frac{M}{W}$



$\tau_{max_2} = \frac{M_{кр2}}{W_{p2}} = \frac{8(X - M)}{W} = -\frac{152}{33}\frac{M}{W}$

$\tau_{max_3} = \frac{M_{кр3}}{W_{p3}} = \frac{8X}{W} = \frac{112}{33}\frac{M}{W}$

$$\varphi_1 = \cancelto{0}{\varphi_0^{кон}} + \int_0^{z_1} \frac{\mathcal{M}_{кр1}\, dz_1}{G_1 J_{p1}} = \int_0^{z_1} \frac{(X + 2\mathcal{M})\, dz_1}{GJ} = \frac{X + 2\mathcal{M}}{GJ} z_1$$

$$z_1 = 0: \ \varphi_1^{нач} = 0;$$

$$z_1 = \ell: \ \varphi_1^{кон} = \frac{\ell}{GJ}\left[X + 2\mathcal{M}\right] = \frac{\ell}{GJ}\left[\frac{14}{33}\mathcal{M} + 2\mathcal{M}\right] = \frac{80}{33}\frac{\mathcal{M}\ell}{GJ}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1^{кон} + \int_0^{z_2} \frac{\mathcal{M}_{кр2}\, dz_2}{G_2 J_{p2}} = \frac{\ell}{GJ}\left[X + 2\mathcal{M}\right] + \int_0^{z_2} \frac{16(X - \mathcal{M})}{GJ} dz_2 = \frac{1}{GJ}\left[(X + 2\mathcal{M})\ell + 16(X - \mathcal{M}) z_2\right]$$

$$z_2 = 0: \ \varphi_2^{нач} = \frac{\ell}{GJ}\left[X + 2\mathcal{M}\right] = \frac{\ell}{GJ}\left[\frac{14}{33}\mathcal{M} + 2\mathcal{M}\right] = \frac{80}{33}\frac{\mathcal{M}\ell}{GJ}$$

$$z_2 = \ell: \ \varphi_2^{кон} = \frac{\ell}{GJ}\left[17X - 14\mathcal{M}\right] = \frac{\ell}{GJ}\left[17\frac{14}{33}\mathcal{M} - 14\mathcal{M}\right] = -\frac{224}{33}\frac{\mathcal{M}\ell}{GJ}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2^{кон} + \int_0^{z_3} \frac{\mathcal{M}_{кр3}\, dz_3}{G_3 J_{p3}} = \frac{\ell}{GJ}\left[17X - 14\mathcal{M}\right] + \int_0^{z_3} \frac{16X}{GJ} dz_3 = \frac{1}{GJ}\left[(17X - 14\mathcal{M})\ell + 16X z_3\right]$$

$$z_3 = 0: \ \varphi_3^{нач} = \frac{\ell}{GJ}\left[17X - 14\mathcal{M}\right] = \frac{\ell}{GJ}\left[17\frac{14}{33}\mathcal{M} - 14\mathcal{M}\right] = -\frac{224}{33}\frac{\mathcal{M}\ell}{GJ}$$

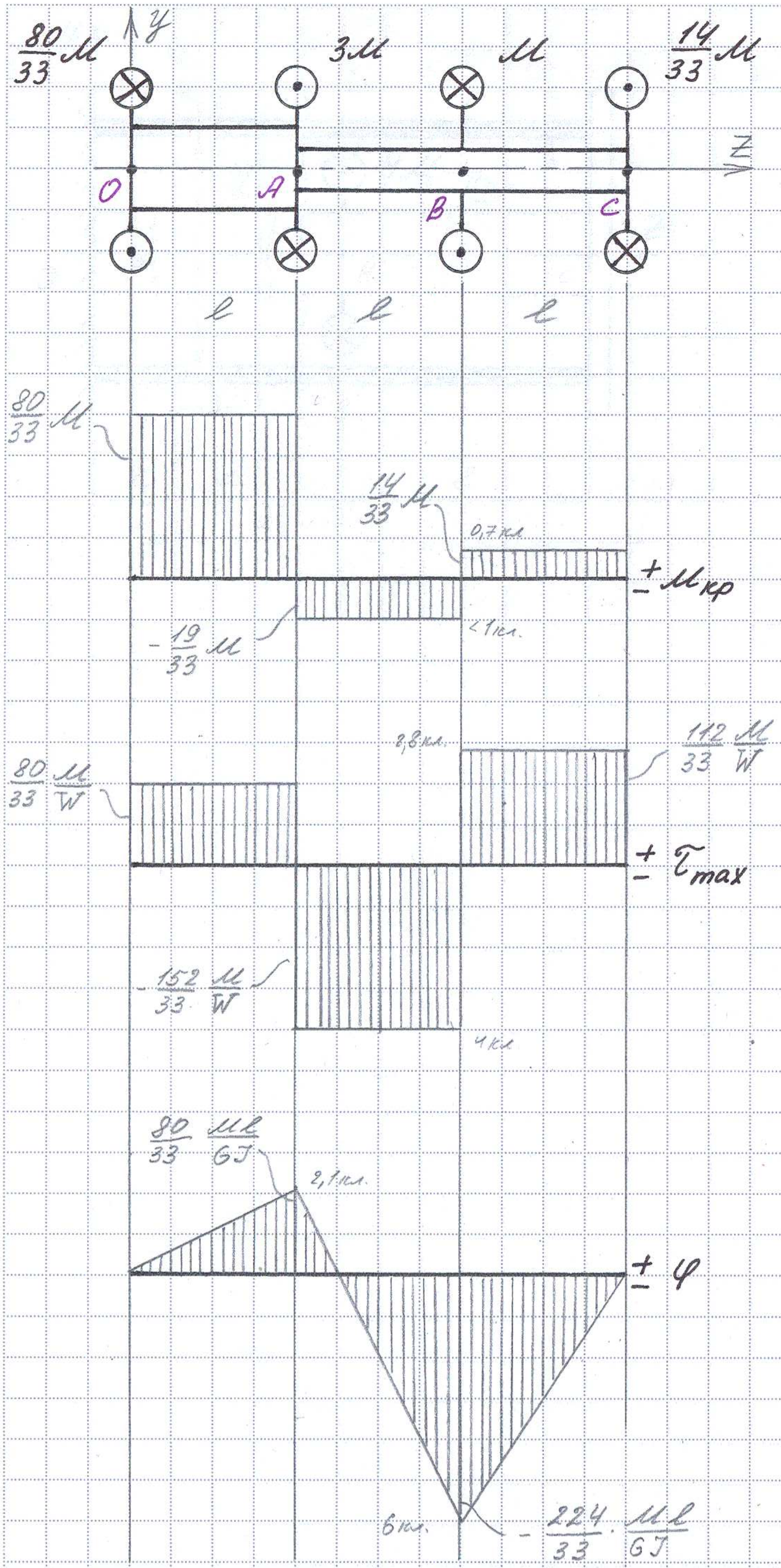
$$z_3 = \ell: \ \varphi_3^{кон} = \frac{\ell}{GJ}\left[33X - 14\mathcal{M}\right] = \frac{\ell}{GJ}\left[33\frac{14}{33}\mathcal{M} - 14\mathcal{M}\right] = 0$$

Конец стержня жёстко заделан, точка C поворачиваться не может:

$$\varphi_C = \varphi_3^{кон} = \frac{\ell}{GJ}\left[33 \cdot X - 14\mathcal{M}\right] = 0$$

$$33 \cdot X - 14\mathcal{M} = 0$$

$$X = \frac{14}{33}\mathcal{M}$$



Деление касательных напряжений τ на „положительные" и „отрицательные" весьма условно: их разрушающее действие от знака не зависит.

Первые пластические деформации появятся на том участке, где касательные напряжения наибольшие по модулю:

$$|\tau_{max}|_{max} = |\tau_{max_2}| =$$

$$= \frac{152}{33} \cdot \frac{M}{W}$$

Появятся они при действии на стержень внешней нагрузки с параметром $M_т$:

$$\tau_т = |\tau_{max_2}| = \frac{152}{33}\frac{M_т}{W}$$

$$M_т = \frac{33\, W \tau_т}{152} = \frac{33 \cdot \pi d^3 \tau_т}{2 \cdot 152} = \frac{33 \cdot \pi \cdot 0{,}010^3 \cdot 150 \cdot 10^6}{304} = 51{,}15 \text{ Н·м}.$$

Наибольший по модулю угол поворота при этом:

$$|\varphi_B| = \varphi_{max} = \frac{224}{33}\frac{M_т l}{GJ} = \frac{2 \cdot 224\, M_т \cdot l}{33 \cdot G \cdot \pi d^4} = \frac{448 \cdot 51{,}15 \cdot 0{,}15}{33 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0{,}010^4} = 0{,}04144 \text{ рад}.$$