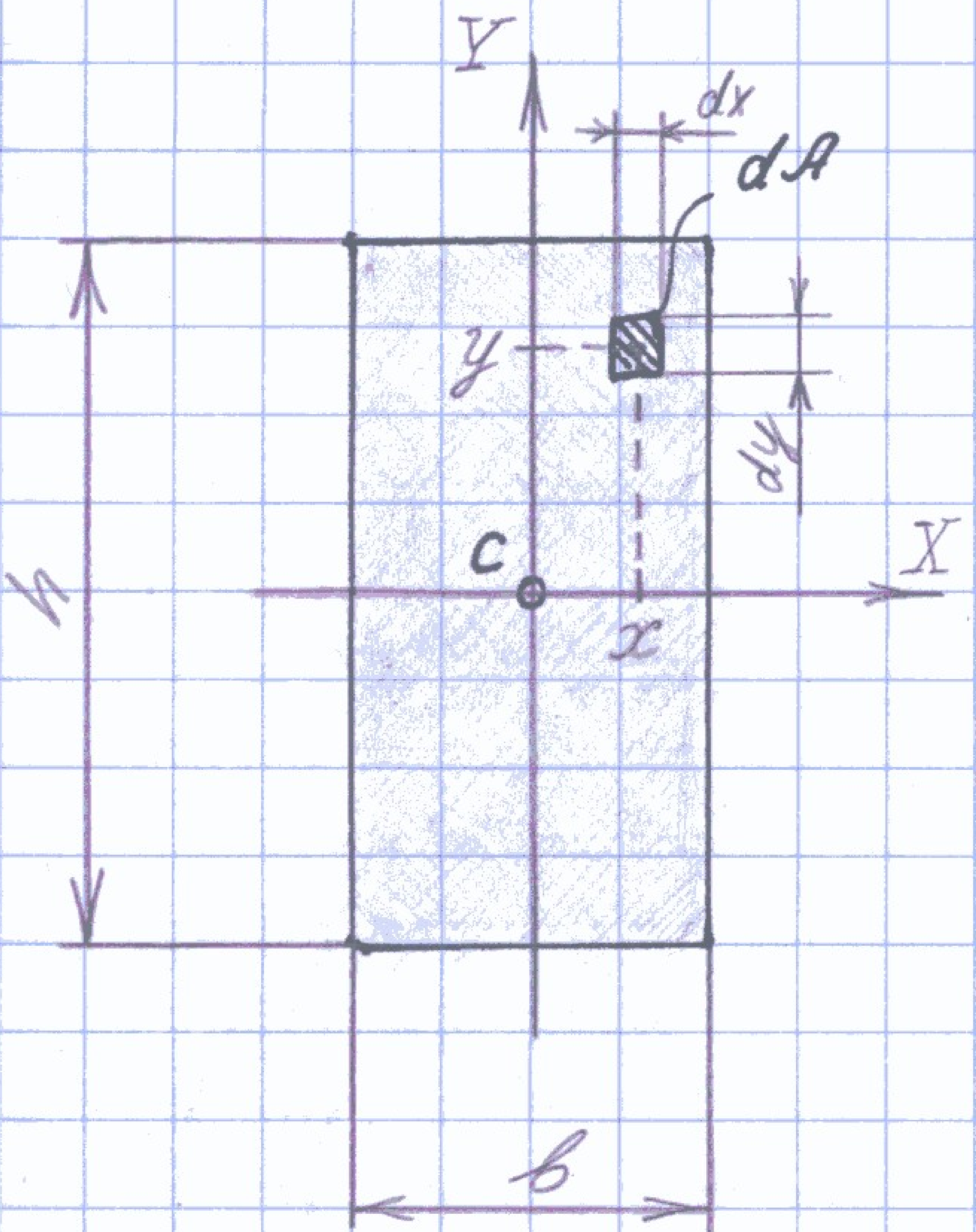
Моменты инерции простейших фигур

1) Прямоугольник:



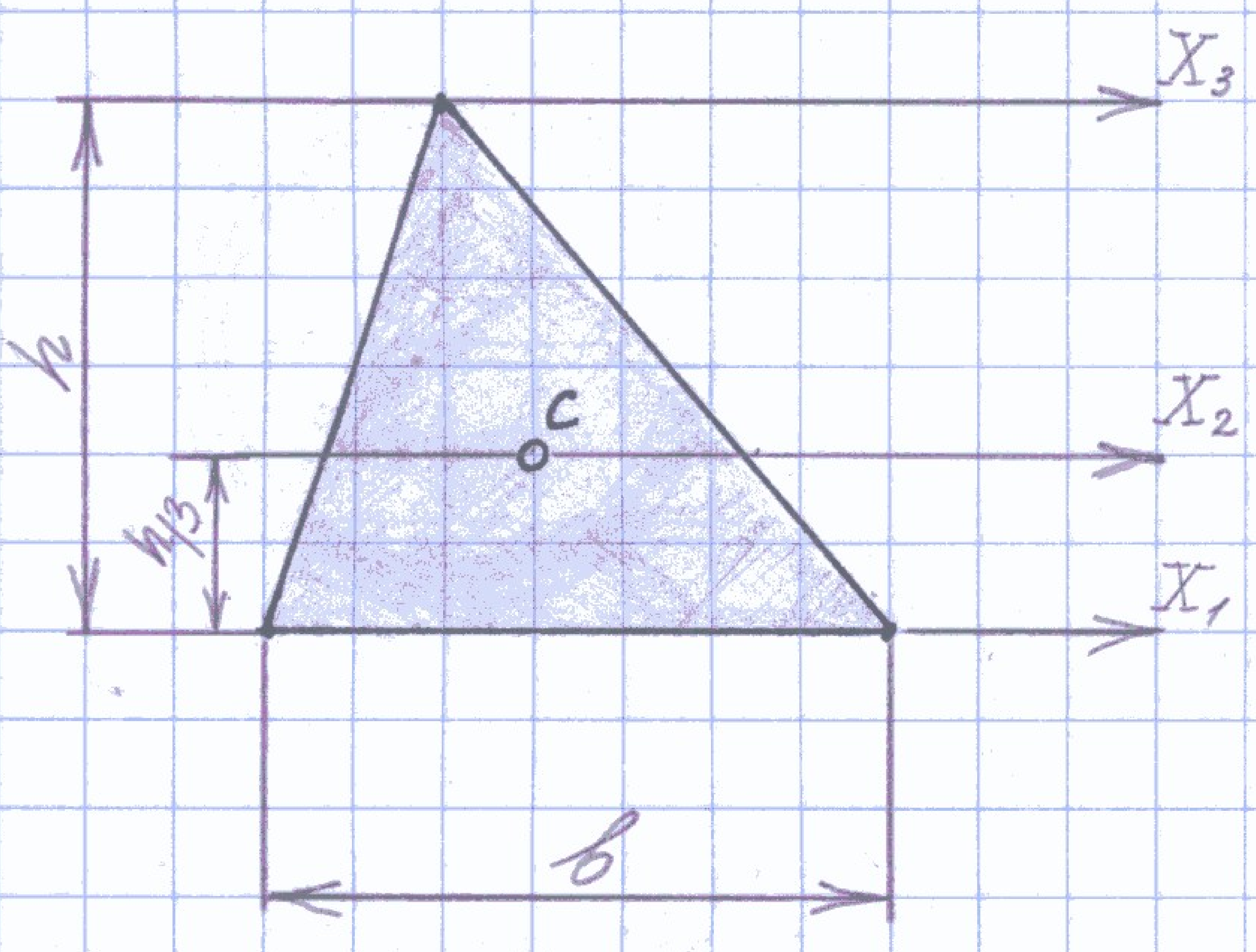
$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx\right) dy =$$

$$= b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\,dy = b\,\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{b}{3}\cdot 2\,\frac{h^3}{8} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

2) Треугольник:



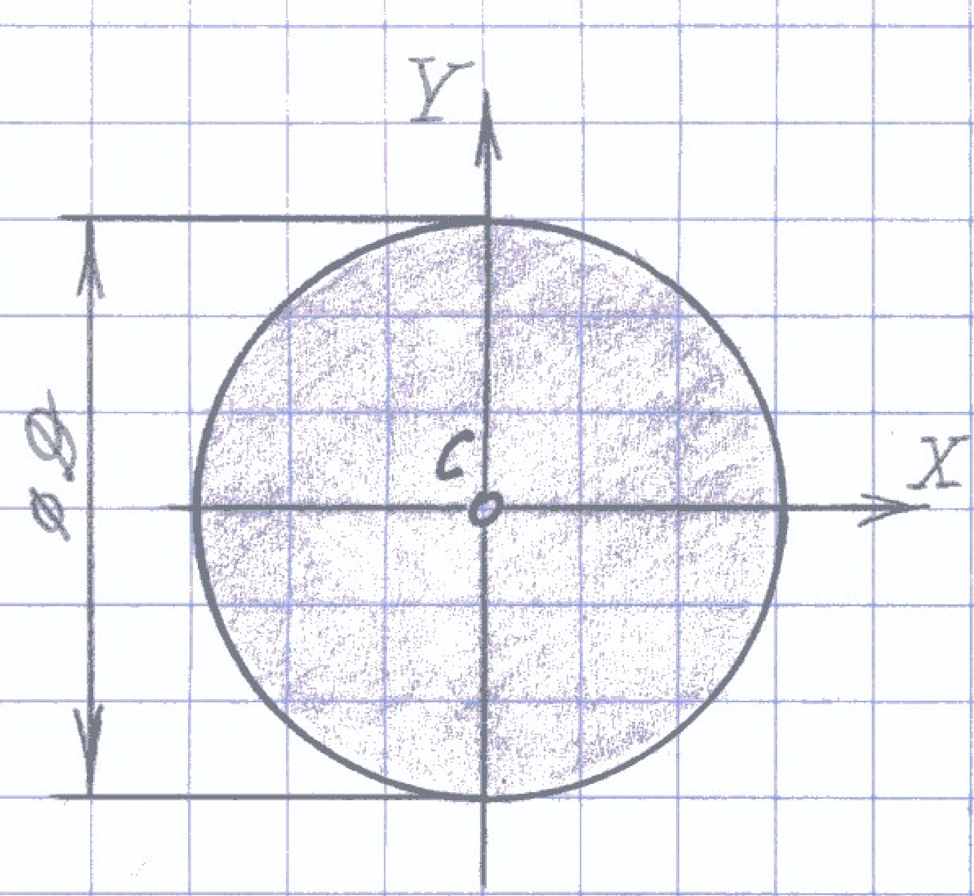
Без вывода:

$$I_{x_3} = \frac{bh^3}{4}$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$$

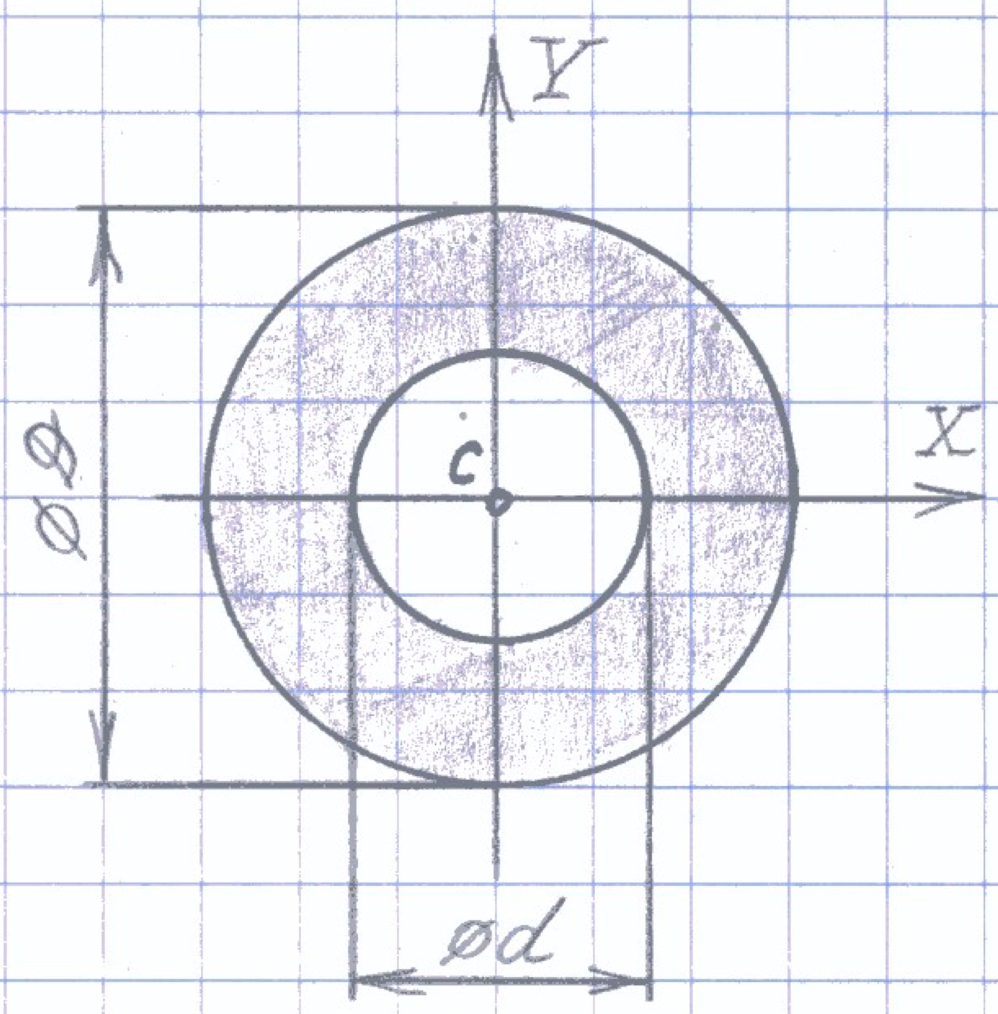
3) Круг:



$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$ – было выведено ранее;

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_y \\ J_x + J_y &= J_p \end{aligned}\right\} \quad J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi D^4}{64}.$$

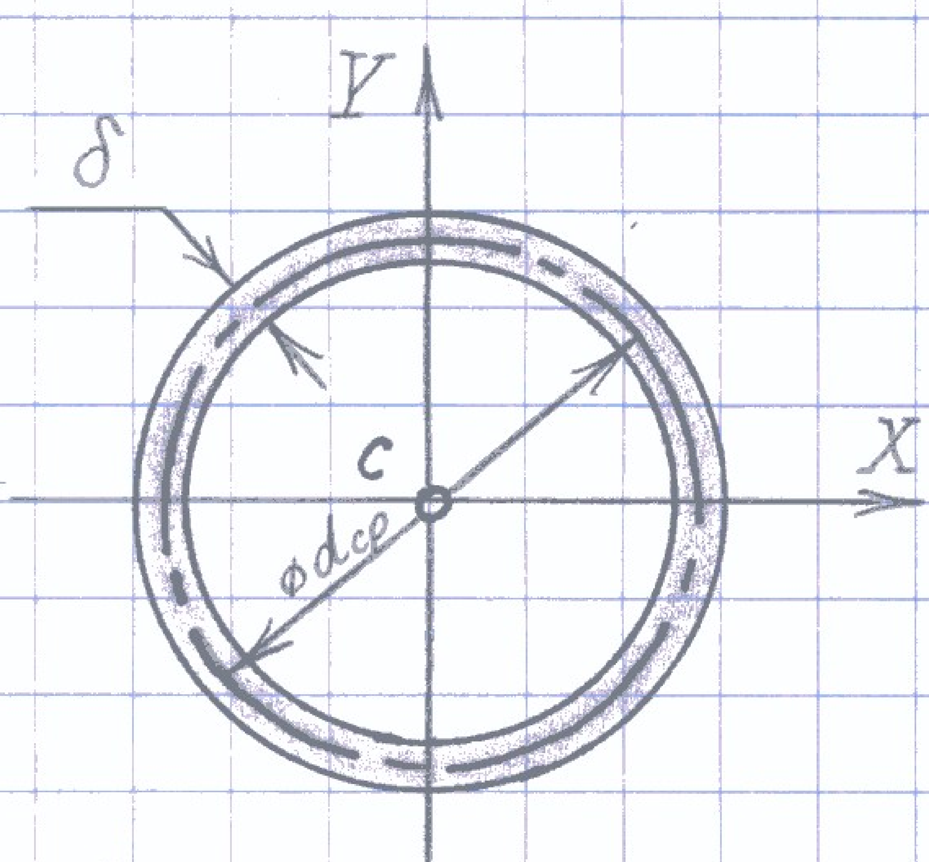
4) Кольцо:



$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \frac{d^4}{D^4}\right]$$ – выведено ранее;

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi D^4}{64}\left[1 - \frac{d^4}{D^4}\right].$$

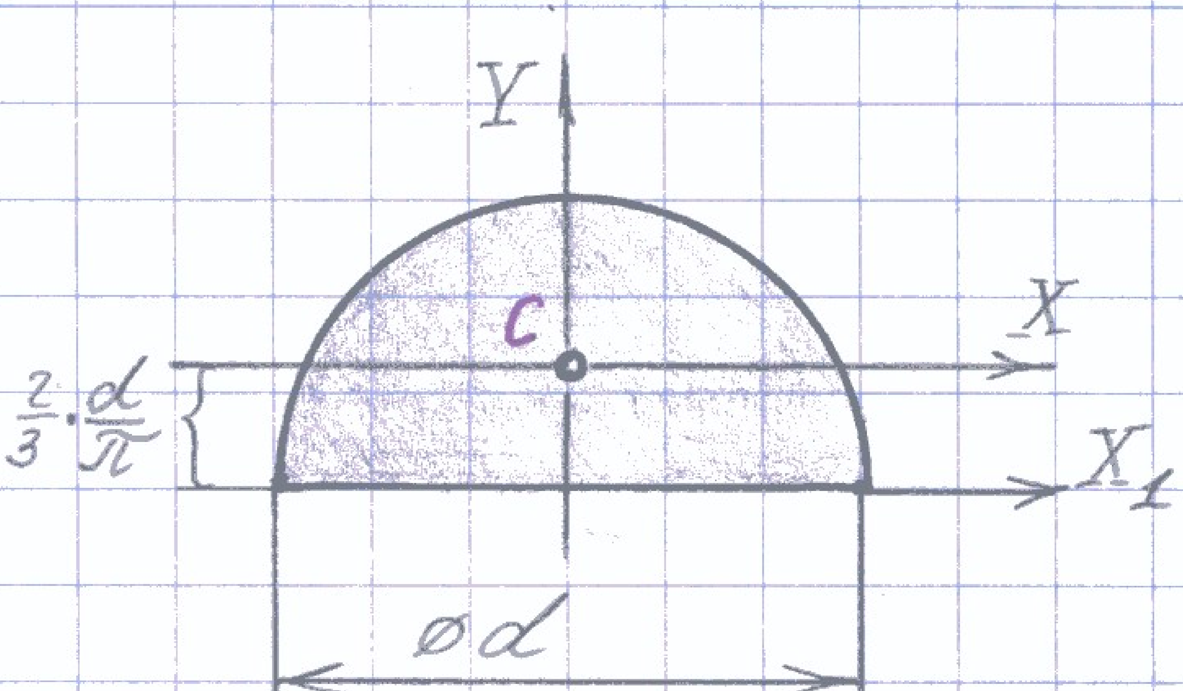
5) Тонкое кольцо:



$$J_p = \frac{\pi \cdot d_{ср}^3 \cdot \delta}{4}$$ – выведено ранее;

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi \cdot d_{ср}^3 \cdot \delta}{8}.$$

6) Полукруг:



Без вывода:

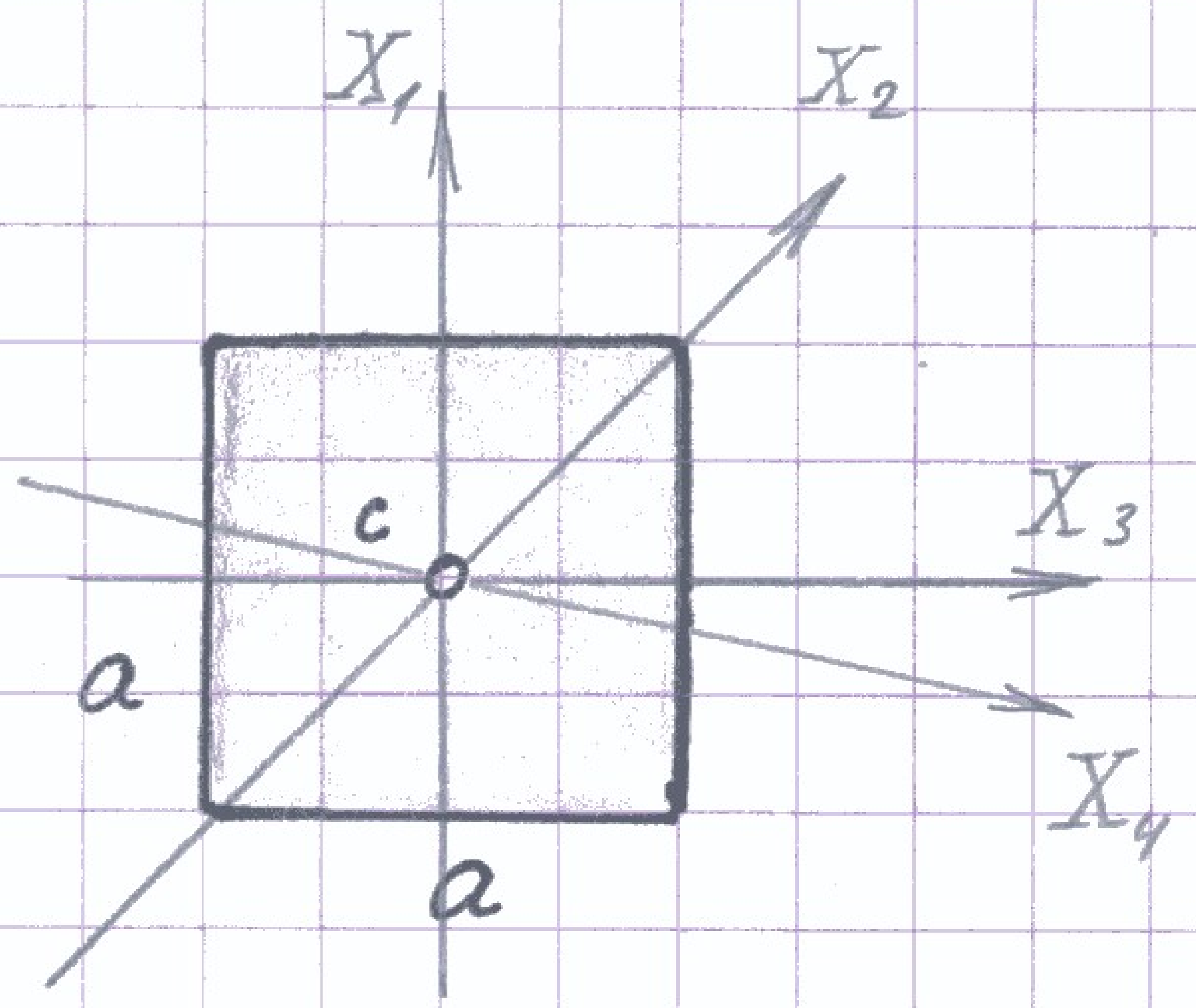
$$J_y = \frac{1}{2} J_y^0 = \frac{\pi D^4}{128}; \quad A = \frac{1}{2} A^0 = \frac{\pi d^2}{8};$$

$$J_x = J_{x_1} - A \cdot \left(\frac{2}{3}\frac{d}{\pi}\right)^2 \approx 0{,}00686 \cdot d^4;$$

$$J_{x_1} = \frac{\pi D^4}{128}.$$

Примечание:

У фигур, имеющих более трёх осей симметрии, любая центральная ось является главной центральной, а осевые моменты инерции равны друг другу:



Квадрат:

$$J_{x_1} = J_{x_2} = J_{x_3} = J_{x_4} = \frac{a^4}{12}$$

Оси X_1, X_2, X_3, X_4 – главные центральные.